

T.C.
İSTANBUL KÜLTÜR ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

YALINKAT ve p -VALENT FONKSİYONLARIN BAZI ÖZELLİKLERİ

DOKTORA TEZİ
Zeliha KARAHÜSEYİN
1800004466

Anabilim Dalı: Matematik ve Bilgisayar Bilimleri

Program: Matematik

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Emel YAVUZ
Tez Eşdanışmanı: Prof. Dr. S. Melike AYDOĞAN

TEMMUZ 2024

T.C.
İSTANBUL KÜLTÜR ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

YALINKAT ve p -VALENT FONKSİYONLARIN BAZI ÖZELLİKLERİ

DOKTORA TEZİ
Zeliha KARAHÜSEYİN
1800004466

Anabilim Dalı: Matematik ve Bilgisayar Bilimleri
Program: Matematik

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Emel YAVUZ
Tez Eşdanışmanı: Prof. Dr. S. Melike AYDOĞAN
Jüri Üyeleri: Prof. Dr. Mert ÇAĞLAR
Prof. Dr. Sevtap SÜMER EKER
Doç. Dr. Fethiye Müge SAKAR
Doç. Dr. Üyesi Alper ÜLKER
Dr. Öğr. Üyesi Günay ASLAN

TEMMUZ 2024

Önsöz

Bu tez, bir akademik yolculuğun ürünüdür ve bu yolculukta birçok kişi ve kaynak bana ilham verdi ve rehberlik etti.

İlk olarak, danışman hocalarım Prof. Dr. Emel YAVUZ ve Prof. Dr. Seher Melike AYDOĞAN'a sonsuz teşekkürlerimi sunmak isterim. Kendilerinin sabrı, bilgeliği ve rehberliği olmadan bu çalışma gerçekleşemezdi. Bu rehberlik altında, kendi potansiyelimden ötesine geçebildim.

Ayrıca, tezin gelişimine katkıda bulunan Prof. Dr. Shigeyoshi OWA ve Doç. Dr. Fethiye Müge SAKAR'a teşekkür etmek istiyorum. Onların değerli geri bildirimleri ve önerileri, tezimin kalitesini artırdı ve bakış açımı zenginleştirdi.

Bu süreç boyunca aileme ve sevdiklerime teşekkür etmeyi ihmal etmek istemem. Onların destekleri, motivasyon kaynağım oldu ve her zaman yanımda oldular.

Son olarak, bu tezin tamamlanmasında emeği geçen herkese teşekkür etmek istiyorum. Her birinin katkısı, bu çalışmanın başarılı bir şekilde sonuçlanmasında önemli bir rol oynadı.

Bu tez, birçok zorlukla dolu bir yolculuğun sonucunda ortaya çıktı. Ancak, bu zorlukların üstesinden gelmemi sağlayan herkese minnettarım.

Temmuz 2024

Zeliha KARAHÜSEYİN

İçindekiler

Önsöz	ii
Simge Listesi	v
Şekil Listesi	vi
Kısa Özet	vii
İngilizce Özet	viii
1 Giriş	1
2 Ön Bilgiler	3
2.1 Temel Kavramlar	3
2.2 Analitik Yalınkat Fonksiyonlar ve Bazı Özellikleri	5
2.3 $\mathcal{P}$ Sınıfı ve Bazı Özellikleri	8
2.4 Analitik Yalınkat Fonksiyonların Bazı Alt Sınıfları	10
3 p -Valent Fonksiyonlar	12
3.1 p -Valent Fonksiyonların Özellikleri	13
3.2 $\mathcal{A}_p(j, \eta)$ için $j = 1$ durumu	16
4 Belirli Yalınkat Fonksiyonların Alt Sınıfları İçin Bazı Koşullar	19
4.1 Yalınkathlık için Koşullar	19
4.2 Güçlü Fonksiyonlar	24
5 Sonuçlar	31

Kaynakça	32
----------------	----



Simge Listesi

$\mathcal{A}$	: $\mathcal{U}$ 'da analitik ve normalize edilmiş fonksiyonlar sınıfı
$\mathcal{A}_p$	: p -valent (çok değerli) fonksiyonlar sınıfı
$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar kümesi
$r \prec s$	: r subordinatedir s
$k(z)$	: Koebe fonksiyonu
$\mathcal{K}$	: Konveks fonksiyonlar sınıfı
$\mathcal{K}(\eta)$	: η -mertebeli konveks fonksiyonlar sınıfı
$\mathcal{K}_S(\eta)$	: η -mertebeli güçlü konveks fonksiyonlar sınıfı
$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathcal{P}$	: Gerçek kısmı pozitif analitik fonksiyonlar sınıfı
$\mathbb{R}$	: Gerçek sayılar kümesi
$\mathcal{S}$	: $\mathcal{U}$ 'da normalize edilmiş yalınkat fonksiyonlar sınıfı
$\mathcal{S}_S(\eta)$	: η -mertebeli güçlü yalınkat fonksiyonlar sınıfı
$\mathcal{S}^*$	: Yıldızl fonksiyonlar sınıfı
$\mathcal{S}^*(\eta)$	: η -mertebeli yıldızl fonksiyonlar sınıfı
$\mathcal{S}_S^*(\eta)$	: η -mertebeli güçlü yıldızl fonksiyonlar sınıfı
$\mathcal{U}$	: $\{z \in \mathbb{C} : z < 1\}$, açık birim disk
$\mathbb{Z}$	: Tam sayılar kümesi

Şekil Listesi

2.1	$k(\mathcal{U})$ görüntü bölgesi	6
2.2	Subordinasyon	9



Dalı : Matematik ve Bilgisayar Bilimleri
Programı : Matematik
Tez Danışmanı : Prof. Dr. Emel YAVUZ
Tez Eşdanışmanı : Prof. Dr. Seher Melike AYDOĞAN
Tez Türü ve Tarihi : Doktora - Temmuz 2024

KISA ÖZET

YALINKAT ve p -VALENT FONKSİYONLARIN BAZI ÖZELLİKLERİ

Zeliha Karahüseyin

Yalınkat fonksiyonlar teorisi, kompleks analiz üzerindeki en ilgi çeken konulardan biridir. Bu tez kapsamında öncelikle analitik yalınkat fonksiyonlar ve bazı alt sınıfları verilmiştir. Daha sonra p -valent fonksiyonların özellikleri verilerek bu fonksiyon sınıfının bazı özel durumları incelenmiştir. Ardından yalınkat olma koşulları verilip daha sonra $\mathcal{A}$ sınıfının belli alt sınıfları tanıtılarak bu sınıflara ait olma koşulları verilmiştir.

Anahtar Kelimeler : Analitik fonksiyon, p -valent fonksiyon, yalınkat fonksiyon
Bilim Dalı Sayısal Kodu : 0924

University : İstanbul Kültür University
Department : Mathematics and Computer Science
Programme : Mathematics
Supervisor : Prof. Dr. Emel YAVUZ
Co-supervisor : Prof. Dr. Seher Melike AYDOĞAN
Degree Awarded and Date : Ph.D. - July 2024

ABSTRACT

SOME PROPERTIES OF UNIVALENT AND p -VALENT FUNCTIONS

Zeliha Karahüseyin

Univalent functions theory stands out as one of the most captivating areas within complex analysis. Within the scope of this thesis, firstly analytic simple functions and some of their subclasses are given. Then, the properties of p -valent functions are given and some special cases of this function class are examined. Then, the conditions for being univalent are given and then certain subclasses of the $\mathcal{A}$ class are introduced and the conditions for belonging to these classes are given.

Keywords : Analytic function, p -valent function, univalent function
Science Code : 0924

Bölüm 1

Giriş

Yalınkat fonksiyonlar teorisi, kompleks analiz üzerindeki en ilgi çeken konulardan biridir. Bu alandaki temel taşlar, 1907 yılında yayınladığı makaleyle Koebe tarafından atılmıştır [13]. Ardından 1914 yılında alan teoremini ispatlayan Gronwall [7] ve 1916 yılında Bieberbach [1] tarafından yalınkat fonksiyonların ikinci dereceden katsayıları üzerine elde ettiği sonuçlar ve bu fonksiyonların özellikleri bu alanda önemli adımları temsil etmiştir.

Riemann tasvir teoremi, $D \subset \mathbb{C}$ basit bağlantılı bölgesini $\mathcal{U}$ birim diski üzerine hem birebir hem de konform olarak tasvir eden bir dönüşümün varlığını ifade eder. Bu nedenle keyfi basit bağlantılı bölgeler yerine $\mathcal{U}$ da tanımlı yalınkat fonksiyonlarla çalışmak çoğu zaman daha uygundur. Yalınkat fonksiyonlar üzerine yapılan çalışmalar $\mathcal{U}$ üzerinde analitik, yalınkat ve $s(0) = s'(0) - 1 = 0$ normalizasyonunu gerçekleyen s fonksiyonlarının oluşturduğu bir $\mathcal{S}$ sınıfı üzerinde yoğunlaşmıştır. Bu normalizasyon, birim disk üzerinde tanımlı bu özel fonksiyon sınıfı üzerindeki çalışmaları, geometrik ve analitik özelliklerini daha rahat anlamamızı sağlar.

Fonksiyonların çok değerli olup olmaması, ilk olarak 1935'te Cartwright [2] tarafından incelenmeye başlanmıştır. Daha sonra, 1940'ta Spencer'in [22] ve W.K. Hayman'ın 1950-1960 arasında yaptığı çalışmalarla bu konu daha da derinlemesine ele alınmıştır [9], [10]. Geçtiğimiz 50 yıl içinde, özellikle Duren, Goodman, Libera, Miller, Silverman, Ruschweyh, Salagean, Srivastava, Owa gibi birçok bilim insanı bu alanda önemli araştırmalar yapmıştır. Daha fazla bilgi için bu kitaplara başvurulabilir [3], [5].

Bu çalışma, beş bölümden oluşmaktadır. İlk bölüm giriş mahiyetindedir. İkinci bölümde, tezin sonraki bölümlerinde kullanılacak bazı temel tanım ve teoremler ele alınmıştır. Buna ek olarak, analitik yalınkat fonksiyonlar, pozitif reel kısma sahip fonksiyonlar sınıfı ve bu fonksiyonların bazı alt sınıfları ve özellikleri detaylı bir şe-

kilde incelenmiştir. Üçüncü bölümde, p -valent fonksiyonlar ve özellikleri ele alınmış, özel durumları detaylı bir şekilde incelenmiştir. Dördüncü bölümde ise yalınkat olma koşulları ve belirli yalınkat fonksiyonların alt sınıfları tanıtılmış ve bu sınıflara ait olma koşulları ve ilgili sonuçlar ayrıntılı bir şekilde açıklanmıştır. Son olarak beşinci bölümde elde edilen sonuçların tamamı gözden geçirilmiş ve çalışmanın genel bir özeti sunulmuştur.



Bölüm 2

Ön Bilgiler

2.1 Temel Kavramlar

Bu kısımda, sonraki bölümlerde kullanılacak olan temel tanımlar ve teoremler sunulmaktadır. Bu temel kavramlar, tezin ilerleyen kısımlarında önemli bir rol oynayacak ve yapılan analizlerin temelini oluşturacaktır. Bu tanımlar ve teoremler, çalışmanın akışını anlamak ve ileriki tartışmalara hazırlık yapmak için gereklidir.

Tanım 2.1. $\mathbb{C}$ kompleks sayılar kümesini göstermek üzere, $r > 0$ ve $z_0 \in \mathbb{C}$ olsun. $D(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$ kümesi z_0 merkezli r yarıçaplı **açık disk**, $\overline{D}(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\}$ kümesi z_0 merkezli r yarıçaplı **kapalı disk**, $D^*(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| \leq r\}$ kümesi z_0 merkezli r yarıçaplı **delinmiş açık disk** ve $\partial D(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}$ kümesi z_0 merkezli r yarıçaplı **çemberi** gösterir. Bu notasyon ile $D(0, 1)$ kümesi de açık birim disk temsil eder ve $\mathcal{U}$ ile sembolize edilir.

Tanım 2.2. Bir $\mathcal{E} \subset \mathbb{C}$ kümesinin belirli bir noktası, bu noktanın etrafındaki bir komşulukla birlikte yine $\mathcal{E}$ kümesinde bulunuyorsa, bu noktaya $\mathcal{E}$ kümesinin bir **iç noktası** denir. Bu özelliği taşıyan noktaların oluşturduğu küme $\mathcal{E}$ kümesinin **içi** olarak adlandırılır. Eğer $\mathcal{E}$ kümesi sadece iç noktalardan oluşuyorsa, bu küme **açık** olarak tanımlanır. Eğer $\mathcal{E}$ 'nin tümleyeni açıksa, bu durumda $\mathcal{E}$, **kapalı** bir küme olarak adlandırılır.

Tanım 2.3. Herhangi bir $\mathcal{E} \subset \mathbb{C}$ verilsin. Eğer $\mathcal{E}$ kesişimi boş, açık iki kümenin birleşimi biçiminde ifade edilemiyorsa $\mathcal{E}$ kümesine **bağlantılıdır** denir. Açık ve bağlantılı bir küme ise **bölge** ile isimlendirilir.

Tanım 2.4. X vektör uzayı olmak üzere, $L[c, d] = \{e = tc + (1 - t)d : 0 \leq t \leq 1\}$ kümesi c ve d noktalarını birleştiren bir **doğru parçası** olarak adlandırılır. $F \subset X$ olması durumunda, her c ve d noktası için $L[c, d] \subset F$ ise, F kümesi **konveks küme** ile adlandırılır.

Tanım 2.5. $[x, y]$ kapalı aralığının $z = \psi(t)$ sürekli fonksiyonundaki tasvirine kompleks düzlemde **eğri** adı verilir. Her $t \in [x, y]$ için $\psi'(t)$ var ve $\psi'(t) \neq 0$ oluyorsa bu resme **düzgün eğri** denir. Uç noktaları bitişik olan eğriye **kapalı eğri** ve uç noktaları dışında hiçbir noktada kesişmeyen eğri **basit kapalı eğri (Jordan eğrisi)** ile temsil edilir.

Tanım 2.6. $E \subset \mathbb{C}$ ve $s : E \rightarrow \mathbb{C}$ bir fonksiyon olmak üzere, $z_0 \in E$ olsun. Her $\epsilon > 0$ için,

$$s[E \cap D(z_0, \delta)] \subset D(s(z_0), \epsilon)$$

şeklinde bir $\delta = \delta(\epsilon, z_0) > 0$ sayısı varsa, s fonksiyonuna z_0 noktasında **süreklidir** denir. Eğer her $z \in E$ için,

$$s[E \cap D(z, \delta)] \subset D(s(z), \epsilon)$$

şeklinde bir $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ sayısı varsa, s fonksiyonuna E kümesinde **düzgün süreklidir** denir.

Tanım 2.7. s , $\mathcal{B}$ bölgesinde tanımlı bir kompleks değişkenli fonksiyon ve $z_0 \in \mathcal{B}$ olsun. Şayet

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{s(z) - s(z_0)}{z - z_0}$$

değeri bulunabiliyorsa, s fonksiyonu z_0 noktasında **diferansiyellenebilir** bir fonksiyon olarak adlandırılır. Bu limit değeri s fonksiyonunun z_0 noktasındaki **türevini** temsil eder ve $s'(z_0)$ ile sembolize edilir. s fonksiyonu z_0 noktasının belli bir komşuluğunda bulunan tüm noktalarda diferansiyellenebilirse, s fonksiyonu z_0 noktasında **analitik** olarak isimlendirilir.

Teorem 2.8 (Maksimum Modül Teoremi). Sınırlı bir E bölgesinde analitik ve sınırında sürekli, sabit olmayan bir s fonksiyonu maksimum modülünü E bölgesinin sınırında alır. Eğer, $s(z)$ fonksiyonu sabit ise, bu durumda s fonksiyonu maksimum modülünü E bölgesinin bir iç noktasında alır ([3]).

Teorem 2.9 (Schwarz Lemma). s fonksiyonu $\mathcal{U}$ 'da $s(0) = 0$ ve $|s(z)| < 1$ ifadelerini gerçekleyen analitik bir fonksiyon olarak kabul edilsin. Bu durumda, $\mathcal{U}$ içinde $|s(z)| < |z|$ ve $|s'(0)| < 1$ gerçekleşir. Ayrıca, eşitlik $s(z) = e^{i\theta}z$ fonksiyonu için geçerlidir ([3]).

Teorem 2.10 (Schwarz-Pick Lemma). $z \in \mathcal{U}$, $|s(z)| < 1$ koşulunu gerçekleyen $s : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$ analitik fonksiyonu verilsin. Bu takdirde, $z \in \mathcal{U}$ için,

$$|s'(z)| < \frac{1 - |s(z)|^2}{1 - |z|^2}$$

dir ([6]).

Tanım 2.11. Kompleks düzlemin sürekli bir D bölgesinde z_0 noktasından geçen eğri çiftlerinin arasındaki açının yön ve büyüklüğü; tasvir eğrilerinin de $s(z_0)$ noktasından geçip korunuyor ise, s fonksiyonuna bu noktada **konform** denir. Bir bölgedeki tüm noktalarda konform özellik gösteren dönüşüme ise **konform dönüşüm** adı verilir.

Teorem 2.12 (Riemann Tasvir Teoremi). $D \subset \mathbb{C}$ basit bağlantılı bölge olmak üzere, D yi $\mathcal{U}$ üzerine hem birebir hem de konform olarak tasvir eden $z_0 \in D$ için, $s(z_0) = 0$ ve $s'(z_0) > 0$ özelliklerine sahip tek bir s analitik fonksiyonu vardır ([20]).

2.2 Analitik Yalınkat Fonksiyonlar ve Bazı Özellikleri

Bu kısımda, birim disk üzerinde tanımlı analitik, yalınkat ve normalize edilmiş fonksiyonları içeren $\mathcal{S}$ sınıfı sunulacaktır.

Tanım 2.13. D kompleks düzlemde bir bölge olmak üzere, $s : D \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonu birebir ise s ye D üzerinde **yalınkattır** denir. Başka bir deyişle, eğer $\forall z_1, z_2 \in D$ için $s(z_1) = s(z_2)$ sadece $z_1 = z_2$ durumunda geçerli ise, s fonksiyonu D üzerinde **yalınkat** olarak isimlendirilir. Geometrik açıdan, bu durum, düzlemde $s(D)$ görüntü bölgesinin katlanmamış bir bölge olması anlamına gelir.

D bölgesinde yalınkat olan bir fonksiyon, bu bölgenin tüm alt kümelerinde de yalınkat özellik taşır.

Tanım 2.14. $\mathcal{U}$ üzerinde tanımlı, analitik olan ve $s(0) = 0$ ile $s'(0) - 1 = 0$ özelliklerine sahip fonksiyonların sınıfı $\mathcal{A}$ ile sembolize edilir. Her $s \in \mathcal{A}$ fonksiyonu,

$$s(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots + a_n z^n + \cdots = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \quad (2.1)$$

tipinde bir Taylor serisi ile temsil edilebilir.

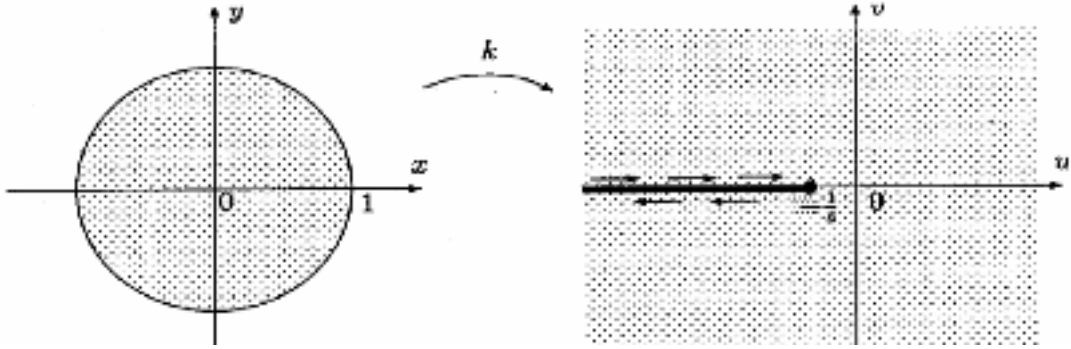
Tanım 2.15. $\mathcal{U}$ üzerinde analitik, yalınkat ve $s(0) = s'(0) - 1 = 0$ özelliğine sahip (2.1) tipindeki fonksiyonlara **normalize edilmiş analitik yalınkat fonksiyon** adı verilir. Bu fonksiyonların sınıfı $\mathcal{S}$ ile sembolize edilir.

$\mathcal{S}$ sınıfına mensup birtakım fonksiyon örnekleri aşağıda verilmiştir:

- (i) $s(z) = z$ özdeşlik fonksiyonu, $\mathcal{U}$ yu kendi üzerine tasvir eder.
- (ii) $k(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = z + 2z^2 + 3z^3 + \cdots$ fonksiyonu *Koebe Fonksiyonu* olarak adlandırılır. $w = \frac{z}{(1-z)^2}$ olarak tanımlandığında, $wz^2 - (2w+1)z + w = 0$ yazılır. z ye göre ikinci dereceden bu ifadenin köklerinin varlığı,

$$\Delta = 1 + 4w > 0, \quad (w \in \mathbb{R})$$

koşuluyla mümkündür. Dolayısıyla, $w \geq -\frac{1}{4}$ olamaz. Bu durumda $k(z)$ dönüşümü, $\mathcal{U}$ yu $-\infty$ dan $-\frac{1}{4}$ e kadar negatif gerçel eksenı çıkartılmış karmaşık düzlem üzerine konform olarak tasvir eder.



Şekil 2.1: $k(\mathcal{U})$ görüntü bölgesi

- (iii) $w = s(z) = \frac{1}{1-z}$ fonksiyonu $\mathcal{U}$ yu $\text{Re } w > -\frac{1}{2}$ yarı düzlemine birebir olarak tasvir eder.

- (iv) $s(z) = \frac{1}{2} \log \left(\frac{1+z}{1-z} \right)$ fonksiyonu $\mathcal{U}$ yu $-\frac{\pi}{4} < \text{Im}(w) < \frac{\pi}{4}$ yatay şeridi üzerine birebir olarak tasvir eder.
- (v) $s(z) = z - \frac{1}{2}z^2$ fonksiyonu $\mathcal{U}$ yu bir kardiodin içi üzerine birebir olarak tasvir eder.

Yalınkat fonksiyonlar teorisinde önemli bir yere sahip olan Bieberbach Teoremi, $\mathcal{S}$ sınıfına ait bir s fonksiyonu için a_2 katsayısının hesaplanmasında kritik bir rol oynar.

Teorem 2.16 (Bieberbach Teoremi). *Her $s \in \mathcal{S}$ için, $|a_2| \leq 2$ ifadesi gerçekleşir. Eşitlik hali, Koebe fonksiyonu $k(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$ ve onun rotasyonları tarafından gerçekleştirir ([1]).*

Teorem 2.17 (Koebe Dörtte Bir Teoremi). *$s \in \mathcal{S}$ ve s fonksiyonunun γ değerini almadığı göz önüne alınsın. Diğer bir deyişle, $s(z) = \gamma$ denkleminin $\mathcal{U}$ da çözümü olmasın. Bu durumda $\gamma \geq \frac{1}{4}$ dır. Eşitlik durumu, Koebe fonksiyonu ve rotasyonları için gerçekleşir ([13]).*

Koebe Dörtte Bir Teoremi, $\mathcal{S}$ sınıfına ait her s fonksiyonunun $s(\mathcal{U})$ görüntü bölgesinin, orijin merkezli ve yarıçapı $\frac{1}{4}$ olan açık bir disk kapsadığını gösterir.

Teorem 2.18 (Bieberbach Tahmini). *Her $s \in \mathcal{S}$ fonksiyonu, $n \geq 2$ olmak üzere $|a_n| \leq n$ ifadesini gerçekler. Eşitlik, yalnızca Koebe fonksiyonu ve onun rotasyonları için geçerlidir ([1]).*

Bir sonraki teorem, $\mathcal{S}$ sınıfına ait fonksiyonların belirli işlemlere tabi tutulsa da karakter değiştirmedğini gösterir.

Teorem 2.19. *[5] $z \in \mathcal{U}$ ve $s \in \mathcal{S}$ ise aşağıda tanımlanan g fonksiyonları da $\mathcal{S}$ sınıfına aittir:*

- (i) $g(z) = \overline{s(\bar{z})} = z + \overline{a_2}z^2 + \overline{a_3}z^3 + \dots$ eşlenik dönüşümü.
- (ii) $\theta \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $g(z) = e^{-i\theta}s(e^{i\theta}z)$ rotasyonu.
- (iii) $0 < r < 1$ için $g(z) = \frac{1}{r}s(rz)$ genişlemesi.
- (iv) $|\alpha| < 1$ ve $\phi(z) = \frac{z+\alpha}{1+\bar{\alpha}z}$ olmak üzere $g(z) = \frac{s(\phi(z))-s(\alpha)}{(1-|\alpha|^2)s'(\alpha)}$ disk otomorfizmi.
- (v) $n \in \mathbb{Z}^+$ için $g(z) = \sqrt[n]{s(z^n)} = \left(\frac{s(z^n)}{z^n} \right)^{\frac{1}{n}}$ kök dönüşümü.

(vi) $s(z) \neq w$ olmak üzere $g(z) = \frac{ws(z)}{w-s(z)}$ atlanmış değer dönüşümü.

(vii) φ , s fonksiyonunun değer kümesi üzerinde yalınkat ve analitik bir fonksiyon olmak üzere $g(z) = (\varphi \circ s)(z)$ bileşke dönüşümü.

2.3 $\mathcal{P}$ Sınıfı ve Bazı Özellikleri

Bu bölümde, $\mathcal{U}$ üzerinde analitik ve gerçel kısmı pozitif olan fonksiyonların sınıfı tanımlanacak ve kompleks düzlemde subordinasyon prensibi verilecektir.

Tanım 2.20. $\mathcal{U}$ üzerinde analitik, $s(0) = 1$ ve $z \in \mathcal{U}$ için $\operatorname{Re} s(z) > 0$ olan

$$s(z) = 1 + p_1 z + p_2 z^2 + \cdots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} p_n z^n$$

şeklinde tanımlı fonksiyonlara **gerçel kısmı pozitif analitik fonksiyon** adı verilir ve bu sınıf $\mathcal{P}$ ile sembolize edilir.

$\mathcal{P}$ sınıfına mensup bir fonksiyonun yalınkat olması gerekmez. Örnek olarak, $n \geq 2$ tam sayısı için $s(z) = 1 + z^n$, $\mathcal{P}$ 'dedir ancak $\mathcal{U}$ da yalınkat değildir.

$\mathcal{S}$ sınıfında, $k(z)$ fonksiyonunun oynadığı temel rolü, $\mathcal{P}$ sınıfında

$$p(z) = \frac{1+z}{1-z}$$

şeklinde tanımlı Mobius fonksiyonu oynar. Yalınkat ve analitik olan p fonksiyonu $\mathcal{U}$ yu sağ yarı düzlem üzerine konform olarak dönüştürür.

Bir sonraki teorem, $\mathcal{P}$ sınıfına ait fonksiyonların belirli işlemlere tabi tutulsa da karakter değiştirmedigini gösterir.

Teorem 2.21. ([3]) s , s_1 ve s_2 fonksiyonları $\mathcal{P}$ sınıfının üyeleri ise, aşağıda verilen g fonksiyonları da $\mathcal{P}$ sınıfının üyeleri olacaktır:

(i) $\alpha \in \mathbb{R}$ için $g(z) = s(e^{i\alpha} z)$.

(ii) $-1 \leq t \leq 1$ için $g(z) = [s(z)]^t$ veya $g(z) = s(tz)$.

$$(iii) \ g(z) = \frac{1}{s(z)}.$$

$$(iv) \ t_1, t_2 > 0 \text{ ve } t_1 + t_2 \leq 1 \text{ için } g(z) = [s_1(z)]^{t_1} [s_2(z)]^{t_2}.$$

$$(v) \ \lambda \in \mathcal{U}, \ s(\lambda) = a + ib \text{ ise } g(z) = \frac{1}{a} \left[s \left(\frac{z+\lambda}{1-\bar{\lambda}z} \right) - ib \right].$$

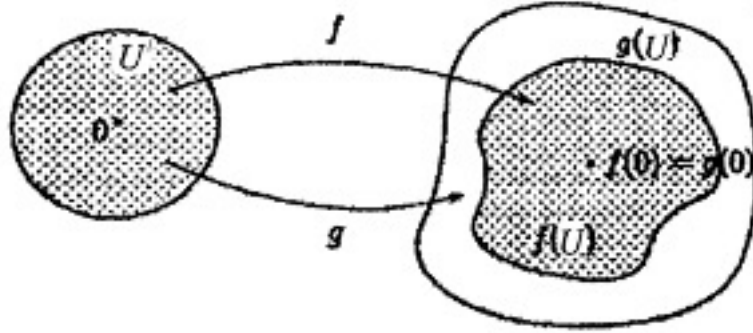
$$(vi) \ b \in \mathbb{R} \text{ için } g(z) = \frac{s(z)+ib}{1+ibs(z)}.$$

Teorem 2.22. Gerçel kısmı pozitif olan $s(z) = 1 + p_1z + p_2z^2 + \dots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} p_n z^n$ fonksiyonunun $\mathcal{U}$ üzerinde analitik olduğu durumda,

$$|p_n| \leq 2 \quad (n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\})$$

dir ([3]).

Teorem 2.23 (Subordinasyon Prensibi). $s_1(z)$ ve $s_2(z)$ fonksiyonları $\mathcal{U}$ üzerinde tanımlı analitik iki fonksiyon olmak üzere, $\phi(z)$ fonksiyonu $\mathcal{U}$ üzerinde tanımlı, analitik ve $\phi(0) = 0$, $|\phi(z)| < 1$ ifadelerini sağlayan bir fonksiyon ise ve $s_1(z) = s_1(\phi(z))$ şeklinde temsil edilebiliyorsa, $s_1(z)$ fonksiyonu $s_2(z)$ fonksiyonuna **subordinatedir** ve $s_1(z) \prec s_2(z)$ ile sembolize edilir ([5]).



Şekil 2.2: Subordinasyon

Subordinasyon prensibi Schwarz Lemmasının genelleştirilmiş bir formülasyonudur. $\phi(z) = z$ alındığında Subordinasyon Prensibi Schwarz Lemmasına dönüşür.

Bir sonraki teorem, subordinasyon prensibinin geometrik yorumunu sunar:

Teorem 2.24. $s_1(z)$ ve $s_2(z)$, $\mathcal{U}$ üzerinde tanımlı analitik iki fonksiyon olmak üzere, $s_2(z)$ fonksiyonu $\mathcal{U}$ üzerinde yalınkat ise, $s_1(z)$ fonksiyonu $s_2(z)$ fonksiyonuna subordinatedir ancak ve ancak,

$$s_1(0) = s_2(0) \text{ ve } s_1(\mathcal{U}) \subset s_2(\mathcal{U})$$

dir ([5]).

2.4 Analitik Yalınkat Fonksiyonların Bazı Alt Sınıfları

Bu bölümde, $\mathcal{U}$ üzerinde analitik yalınkat fonksiyonların tasvir bölgelerinin yıldızl ve konveks bölge olması durumunda oluşan alt sınıflar verilecektir.

Tanım 2.25. Bir $D \subset \mathbb{C}$ kümesi ve bir $z_0 \in D$ noktası ele alınsın. z_0 noktasını her $z \in D$ noktasına birleştiren doğru parçası tamamen D içinde kalıyorsa, bu durumda D kümesine z_0 noktasına göre **yıldızl küme** adı verilir. Geometrik açıdan, D kümesinin yıldızl olması, her noktasının z_0 noktasından 'görünür' olduğu anlamına gelir. Her noktasının yıldızl olduğu bir D kümesine **konveks küme** denir. Bu ifade, konveks kümenin her bir noktasına göre yıldızl küme olacağını söyler.

Tanım 2.26. Eğer s fonksiyonu yalınkat ve $I = s(\Delta)$ tasvir bölgesi orijine göre yıldızl ise, yani $p \in I$ ve $r \in [0, 1]$ alındığında $rp \in I$ oluyorsa, bu fonksiyona **yıldızl fonksiyon** denir. Bu fonksiyonların sınıfı S^* ile sembolize edilir. Ayrıca, s fonksiyonu yalınkat olup $s(\Delta)$ tasvir bölgesi konveks ise, bu fonksiyona **konveks fonksiyon** adı verilir ve bu fonksiyonlardan oluşan sınıf $\mathcal{K}$ ile sembolize edilir.

Teorem 2.27. $s : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$ tanımlı analitik bir fonksiyon ve $s(0) = 0$ olsun. Bu durumda, s fonksiyonu yıldızıldır ancak ve ancak $s'(0) \neq 0$ ve her $z \in \mathcal{U}$ için,

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{zs'(z)}{s(z)} \right\} > 0$$

dir ([5]).

Teorem 2.28. $s : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$ tanımlı analitik bir fonksiyon olsun. Bu durumda, s fonksiyonu konvekstir ancak ve ancak $s'(0) \neq 0$ ve her $z \in \mathcal{U}$ için,

$$\operatorname{Re} \left\{ 1 + \frac{zs''(z)}{s'(z)} \right\} > 0$$

dir ([5]).

Teorem 2.29. $s(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \in \mathcal{K}$ olsun. Bu durumda, her $n \in \mathbb{Z}^+$ için $|a_n| \leq 1$ olacaktır ([5]).

Tanım 2.30. $s : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$ analitik bir fonksiyon olsun. $0 \leq \eta \leq 1$, $s(0) = 0$ ve $s'(0) \neq 0$ olmak üzere $z \in \mathcal{U}$ için,

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{zs'(z)}{s(z)} \right\} > \eta$$

koşulunu sağlayan s fonksiyonuna η -**mertebeli yıldızl fonksiyon** adı verilir. Bu fonksiyonların sınıfı $\mathcal{S}^*(\eta)$ ile sembolize edilir.

Tanım 2.31. $s : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$ analitik bir fonksiyon olsun. $0 \leq \eta \leq 1$, $s(0) = 0$ ve $s'(0) \neq 0$ olmak üzere $z \in \mathcal{U}$ için,

$$\operatorname{Re} \left\{ 1 + \frac{zs''(z)}{s'(z)} \right\} > \eta$$

koşulunu gerçekleyen s fonksiyonuna η -**mertebeli konveks fonksiyon** adı verilir. Bu fonksiyonların sınıfı $\mathcal{K}(\eta)$ ile gösterilir.



Bölüm 3

p -Valent Fonksiyonlar

Bu bölümde p -valent fonksiyonlar incelenecektir. Ayrıca bu bölümdeki çalışma ‘Communication in Mathematical Modeling and Applications’ isimli dergide yayınlanmıştır [11].

Tanım 3.1. $\mathcal{U}$ da analitik olan

$$s(z) = z^p + \sum_{k=p+1}^{\infty} a_k z^k \quad (p \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}) \quad (3.1)$$

tipindeki fonksiyonların sınıfı $\mathcal{A}_p$ ile gösterilsin. $s(z) \in \mathcal{A}_p$ olsun. η ($0 < \eta \leq \frac{\pi}{2}$) ve $j = 1, 2, 3, \dots, p$ reel sayıları için,

$$\left| \arg \left(\frac{s^{(j)}(z)}{z^{p-j}} \right) \right| < \eta \left(1 + \frac{1}{\pi} \log j \right) \quad (z \in \mathcal{U}) \quad (3.2)$$

koşulu sağlanıyorsa $s(z) \in \mathcal{A}_p(j, \eta)$ dir denir. (3.2) ifadesinde $j = p$ ve $\eta = \frac{\pi}{2}$ alınrsa eşitsizlik

$$\left| \arg s^{(p)}(z) \right| < \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{1}{\pi} \log p \right) \quad (z \in \mathcal{U}) \quad (3.3)$$

halini alır.

(3.3) eşitsizliği 1996 da Nunokawa tarafından ele alınmıştır [15]. $s(z)$, (3.3) ifadesini sağlıyorsa, $s(z) \in \mathcal{A}_p$ fonksiyonu $\mathcal{U}$ da p -valenttir [15]. Ayrıca $s(z) \in \mathcal{A}_p$,

$$|\arg s^{(p)}(z)| < \frac{3}{4}\pi \quad (z \in \mathcal{U}), \quad (3.4)$$

ifadesini sağlıyorsa $s(z)$ fonksiyonu $\mathcal{U}$ da p -valenttir [16].

$\mathcal{A}_p(j, \eta)$ sınıfı adına problemimizi tartışmak için aşağıdaki lemmayı hatırlamak gerekir [4].

Lemma 3.2. $s(z)$, $|z| \leq 1$ de analitik bir fonksiyon olsun. Bu takdirde, $s(z)$

$$\int_{-1}^1 |s(z)|^q dz \leq \frac{1}{2} \int_{|z|=1} |s(z)|^q |dz| \quad (q > 0) \quad (3.5)$$

eşitsizliğini sağlar.

Lemma 3.2 de değişken dönüşümü yapılırsa, (3.5)

$$\int_{-r}^r |s(\rho e^{i\theta})|^q d\rho \leq \frac{r}{2} \int_0^{2\pi} |s(re^{i\theta})|^q d\theta. \quad (3.6)$$

şeklinde ifade edilebilir.

3.1 p -Valent Fonksiyonların Özellikleri

Bu kısımda p -valent fonksiyonların özellikleri verilecektir. Aşağıda verilen teorem $s(z) \in \mathcal{A}_p(j, \eta)$ fonksiyonları için ilk sonuçtur.

Teorem 3.3. Bir $s(z) \in \mathcal{A}_p$ fonksiyonu, η ($0 < \eta \leq \frac{\pi}{2}$) ve $j = 1, 2, 3, \dots, p$ reel sayıları için,

$$\left| \frac{zs^{(j+1)}(z)}{s^{(j)}(z)} \right| \leq \frac{\eta}{\pi} \left(1 + \frac{1}{\pi} \log j \right) - 2(p-j) \quad (z \in \mathcal{U}) \quad (3.7)$$

ifadesini sağlıyorsa $s(z) \in \mathcal{A}_p(j, \eta)$ dır.

Kanıt.

$$\log \left(\frac{s^{(j)}(z)}{z^{p-j}} \right) = \log \left| \frac{s^{(j)}(z)}{z^{p-j}} \right| + i \arg \left(\frac{s^{(j)}(z)}{z^{p-j}} \right) \quad (3.8)$$

ve

$$\begin{aligned} \log \left(\frac{s^{(j)}(z)}{z^{p-j}} \right) &= \int_0^z \left(\log \left(\frac{s^{(j)}(t)}{t^{p-j}} \right) \right)' dt \\ &= \int_0^z (\log s^{(j)}(t))' dt - \int_0^z (\log t^{p-j})' dt \\ &= \int_0^z \frac{s^{(j+1)}(t)}{s^{(j)}(t)} dt - (p-j) \int_0^z \frac{1}{t} dt. \end{aligned} \quad (3.9)$$

dir. Buradan, $z = re^{i\theta}$, $0 \leq r < 1$, $0 \leq \rho \leq r$ ve $0 \leq \theta \leq 2\pi$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
\left| \arg \left(\frac{s^{(j)}(z)}{z^{p-j}} \right) \right| &= \left| \operatorname{Im} \int_0^z \frac{s^{(j+1)}(t)}{s^{(j)}(t)} dt - (p-j) \arg(z) \right| \\
&\leq \left| \operatorname{Im} \int_0^r \frac{s^{(j+1)}(\rho e^{i\theta})}{s^{(j)}(\rho e^{i\theta})} e^{i\theta} d\rho \right| + (p-j) |\arg(z)| \\
&\leq \int_0^r \left| \operatorname{Im} \left(\frac{e^{i\theta} s^{(j+1)}(\rho e^{i\theta})}{s^{(j)}(\rho e^{i\theta})} \right) \right| d\rho + 2(p-j)\pi \\
&< \int_{-r}^r \left| \operatorname{Im} \left(\frac{e^{i\theta} s^{(j+1)}(\rho e^{i\theta})}{s^{(j)}(\rho e^{i\theta})} \right) \right| d\rho + 2(p-j)\pi \\
&\leq \int_{-r}^r \left| \frac{s^{(j+1)}(\rho e^{i\theta})}{s^{(j)}(\rho e^{i\theta})} \right| d\rho + 2(p-j)\pi,
\end{aligned} \tag{3.10}$$

olduğu görülür. Lemma 3.2, (3.6) ile birlikte uygulandığında,

$$\begin{aligned}
\left| \arg \left(\frac{s^{(j)}(z)}{z^{p-j}} \right) \right| &< \frac{r}{2} \int_0^{2\pi} \left| \frac{s^{(j+1)}(re^{i\theta})}{s^{(j)}(re^{i\theta})} \right| d\theta + 2(p-j)\pi \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left| \frac{re^{i\theta} s^{(j+1)}(re^{i\theta})}{s^{(j)}(re^{i\theta})} \right| d\theta + 2(p-j)\pi \\
&\leq \frac{1}{2} \left(\frac{\eta}{\pi} \left(1 + \frac{1}{\pi} \log j \right) - 2(p-j) \right) \int_0^{2\pi} d\theta + 2(p-j)\pi \\
&= \eta \left(1 + \frac{1}{\pi} \log j \right).
\end{aligned} \tag{3.11}$$

elde edilir. Buradan, $s(z) \in \mathcal{A}_p(j, \eta)$ dir. □

Teorem 3.3 de $j = p$ ve $\eta = \frac{\pi}{2}$ alınırsa bir sonraki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.4. Bir $s(z) \in \mathcal{A}_p$ fonksiyonu

$$\left| \frac{zs^{(p+1)}(z)}{s^{(p)}(z)} \right| \leq \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\pi} \log p \right) \quad (z \in \mathcal{U}) \tag{3.12}$$

ifadesini sağlıyorsa,

$$|\arg s^{(p)}(z)| < \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\pi} \log p \right) \quad (z \in \mathcal{U}) \tag{3.13}$$

dir.

Uyarı 3.5. Sonuç 3.4 (Nunokawa vd. 2019) tarafından verilmiştir [18].

Teorem 3.6. Bir $s(z) \in \mathcal{A}_p$ fonksiyonu, η ($0 < \eta \leq \frac{\pi}{2}$), $j = 1, 2, 3, \dots, p$ ve δ ($0 < \delta \leq 1$) reel sayıları için,

$$\left| \frac{zs^{(j+1)}(z)}{s^{(j)}(z)} \right| \leq \frac{\eta}{\pi} \left(1 + \frac{1}{\pi} \log j \right) \operatorname{Re} \left(\frac{1 + (2\delta - 1)z}{1 - z} \right) - 2(p - j) \quad (z \in \mathcal{U}) \quad (3.14)$$

ifadesini sağlıyorsa $s(z) \in \mathcal{A}_p(j, \eta)$ dir.

Kanıt. Teorem 3.3 ün ispatından hareketle,

$$\begin{aligned} \left| \arg \left(\frac{s^{(j)}(z)}{z^{p-j}} \right) \right| &< \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left| \frac{re^{i\theta} s^{(j+1)}(re^{i\theta})}{s^{(j)}(re^{i\theta})} \right| d\theta + 2(p - j)\pi \\ &\leq \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{\eta}{\pi} \left(1 + \frac{1}{\pi} \log j \right) \operatorname{Re} \left(\frac{1 + (2\delta - 1)re^{i\theta}}{1 - re^{i\theta}} \right) - 2(p - j) \right\} d\theta \\ &\quad + 2(p - j)\pi \\ &= \frac{\eta}{2\pi} \left(1 + \frac{1}{\pi} \log j \right) \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} \left(\frac{1 + (2\delta - 1)re^{i\theta}}{1 - re^{i\theta}} \right) d\theta \\ &= \frac{\eta}{2\pi} \left(1 + \frac{1}{\pi} \log j \right) \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} \left(1 - 2\delta + \frac{2\delta}{1 - re^{i\theta}} \right) d\theta \\ &= \eta \left(1 + \frac{1}{\pi} \log j \right). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Buradan, $s(z) \in \mathcal{A}_p(j, \eta)$ dir. □

Teorem 3.6 da $j = p$ ve $\eta = \frac{\pi}{2}$ alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.7. Bir $s(z) \in \mathcal{A}_p$ fonksiyonu, bir δ ($0 < \delta \leq 1$) reel sayısı için,

$$\left| \frac{zs^{(p+1)}(z)}{s^{(p)}(z)} \right| \leq \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\pi} \log p \right) \operatorname{Re} \left(\frac{1 + (2\delta - 1)z}{1 - z} \right) \quad (z \in \mathcal{U}) \quad (3.16)$$

ifadesini sağlıyorsa,

$$|\arg s^{(p)}(z)| < \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{1}{\pi} \log p \right) \quad (z \in \mathcal{U}), \quad (3.17)$$

dir. Yani, $s(z)$, $\mathcal{U}$ da p -valenttir.

Uyarı 3.8. Sonuç 3.7 da $\delta = 1$ alınır, (Nunokawa vd. 2019) tarafından verilen sonuca ulaşılır [18].

Teorem 3.6 da $\delta = \frac{1}{2}$ olarak alınır, aşağıdaki sonuç elde edilecektir.

Sonuç 3.9. Bir $s(z) \in \mathcal{A}_p$ fonksiyonu, $\eta(0 < \eta \leq \frac{\pi}{2})$ ve $j = 1, 2, 3, \dots, p$ reel sayıları için,

$$\left| \frac{zs^{(j+1)}(z)}{s^{(j)}(z)} \right| \leq \frac{\eta}{\pi} \left(1 + \frac{1}{\pi} \log j \right) \operatorname{Re} \left(\frac{1}{1-z} \right) - 2(p-j) \quad (z \in \mathcal{U}) \quad (3.18)$$

ifadesini sağlıyorsa, $s(z) \in \mathcal{A}_p(j, \eta)$ dir.

Uyarı 3.10. Sonuç 3.9 de $\eta = \frac{\pi}{2}$ ve $j = p$ alınır, (Nunokawa vd. 2019) tarafından verilen sonuca ulaşılır [18].

3.2 $\mathcal{A}_p(j, \eta)$ için $j = 1$ durumu

Bu kısımda, $\mathcal{A}_p(j, \eta)$ için $j = 1$ durumu incelenecek.

Sonuç 3.11. Bir $s(z) \in \mathcal{A}_p$ fonksiyonu, $\eta(0 < \eta \leq \frac{\pi}{2})$ ve $j = 1, 2, 3, \dots, p$ reel sayıları için,

$$\left| \frac{zs''(z)}{s'(z)} \right| \leq \frac{\eta}{\pi} - 2(p-1) \quad (z \in \mathcal{U}) \quad (3.19)$$

ifadesini sağlıyorsa, $s(z) \in \mathcal{A}_p(1, \eta)$ dir. Dahası, (3.19) ifadesinde $p = 1$ ise,

$$|\arg s'(z)| < \eta \quad (z \in \mathcal{U}) \quad (3.20)$$

dir. Buradan, $s(z)$, $\mathcal{U}$ 'da yalınkattır.

Teorem 3.6 aracılığıyla bir sonraki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.12. Bir $s(z) \in \mathcal{A}_p$ fonksiyonu, $\eta(0 < \eta \leq \frac{\pi}{2})$ ve $\delta(0 < \delta \leq 1)$ reel sayıları için,

$$\left| \frac{zs''(z)}{s'(z)} \right| \leq \frac{\eta}{\pi} \operatorname{Re} \left(\frac{1 + (2\delta - 1)z}{1 - z} \right) - 2(p-1) \quad (z \in \mathcal{U}) \quad (3.21)$$

ifadesini sağlıyorsa, $s(z) \in \mathcal{A}_p(1, \eta)$ dir. Dahası, (3.21) ifadesinde $p = 1$ ise,

$$|\arg s'(z)| < \eta \quad (z \in \mathcal{U}) \quad (3.22)$$

dir. Buradan, $s(z)$, $\mathcal{U}$ da yalınkattır.

Son olarak, aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 3.13. Bir $s(z) \in \mathcal{A}_1$ fonksiyonu, η ($0 < \eta \leq \frac{\pi}{2}$) ve δ ($0 < \delta \leq 1$) reel sayıları için,

$$\left| 1 + \frac{zs''(z)}{s'(z)} - \frac{zs'(z)}{s(z)} \right| \leq \frac{\eta}{\pi} \operatorname{Re} \left(\frac{1 + (2\delta - 1)z}{1 - z} \right) \quad (z \in \mathcal{U}) \quad (3.23)$$

ifadesini sağlıyorsa,

$$\left| \arg \frac{zs'(z)}{s(z)} \right| < \eta \quad (z \in \mathcal{U}) \quad (3.24)$$

dir.

Kanıt.

$$\begin{aligned} \log \left(\frac{zs'(z)}{s(z)} \right) &= \int_0^z \left(\log \left(\frac{ts'(t)}{s(t)} \right) \right)' dt \\ &= \int_0^z \left(\frac{1}{t} + \frac{s''(t)}{s'(t)} - \frac{s'(t)}{s(t)} \right) dt \end{aligned} \quad (3.25)$$

ifadesi dikkate alınsın. Buradan, $z = re^{i\theta}$, $0 \leq r < 1$, $0 \leq \rho \leq r$, ve $0 \leq \theta \leq 2\pi$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \left| \arg \frac{zs'(z)}{s(z)} \right| &= \left| \operatorname{Im} \log \left(\frac{zs'(z)}{s(z)} \right) \right| \\ &= \left| \operatorname{Im} \int_0^z \left(\frac{1}{t} + \frac{s''(t)}{s'(t)} - \frac{s'(t)}{s(t)} \right) dt \right| \\ &= \left| \operatorname{Im} \int_0^r \left(\frac{1}{\rho e^{i\theta}} + \frac{s''(\rho e^{i\theta})}{s'(\rho e^{i\theta})} - \frac{s'(\rho e^{i\theta})}{s(\rho e^{i\theta})} \right) e^{i\theta} d\rho \right| \\ &\leq \int_0^r \left| \operatorname{Im} \left(\frac{1}{\rho e^{i\theta}} + \frac{s''(\rho e^{i\theta})}{s'(\rho e^{i\theta})} - \frac{s'(\rho e^{i\theta})}{s(\rho e^{i\theta})} \right) \right| d\rho \\ &\leq \int_{-r}^r \left| \frac{1}{\rho e^{i\theta}} + \frac{s''(\rho e^{i\theta})}{s'(\rho e^{i\theta})} - \frac{s'(\rho e^{i\theta})}{s(\rho e^{i\theta})} \right| d\rho, \end{aligned} \quad (3.26)$$

elde edilir. (3.6) ile Lemma 3.2 birlikte işleme koyulduğunda,

$$\begin{aligned}
\left| \arg \frac{zs'(z)}{s(z)} \right| &\leq \frac{r}{2} \int_0^{2\pi} \left| \frac{1}{re^{i\theta}} + \frac{s''(re^{i\theta})}{s'(re^{i\theta})} - \frac{s'(re^{i\theta})}{s(re^{i\theta})} \right| d\theta \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left| 1 + \frac{re^{i\theta} s''(re^{i\theta})}{s'(re^{i\theta})} - \frac{re^{i\theta} s'(re^{i\theta})}{s(re^{i\theta})} \right| d\theta \\
&< \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{\eta}{\pi} \operatorname{Re} \left(\frac{1 + (2\delta - 1)re^{i\theta}}{1 - re^{i\theta}} \right) d\theta \\
&= \frac{\eta}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} \left(\frac{1 + (2\delta - 1)re^{i\theta}}{1 - re^{i\theta}} \right) d\theta \\
&= \eta.
\end{aligned} \tag{3.27}$$

sonucuna ulaşılır ve ispat tamamlanır. $\square$

Teorem 3.13 de $\delta = 1$ ve $\delta = \frac{1}{2}$ alınırse aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Sonuç 3.14. Bir $s(z) \in \mathcal{A}_1$ fonksiyonu, η ($0 < \eta \leq \frac{\pi}{2}$) reel sayısı için,

$$\left| 1 + \frac{zs''(z)}{s'(z)} - \frac{zs'(z)}{s(z)} \right| \leq \frac{\eta}{\pi} \operatorname{Re} \left(\frac{1+z}{1-z} \right) \quad (z \in \mathcal{U}) \tag{3.28}$$

ifadesini sağlıyorsa,

$$\left| \arg \frac{zs'(z)}{s(z)} \right| < \eta \quad (z \in \mathcal{U}) \tag{3.29}$$

dir.

Sonuç 3.15. Bir $s(z) \in \mathcal{A}_1$ fonksiyonu, η ($0 < \eta \leq \frac{\pi}{2}$) reel sayısı için,

$$\left| 1 + \frac{zs''(z)}{s'(z)} - \frac{zs'(z)}{s(z)} \right| \leq \frac{\eta}{\pi} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{1-z} \right) \quad (z \in \mathcal{U}) \tag{3.30}$$

ifadesini sağlıyorsa,

$$\left| \arg \frac{zs'(z)}{s(z)} \right| < \eta \quad (z \in \mathcal{U}) \tag{3.31}$$

dir.

Uyarı 3.16. Sonuç 3.15 de $\eta = \frac{\pi}{2}$ olarak alınırse, (Nunokawa vd. 2019) tarafından verilen sonuca ulaşılır [18].

Bölüm 4

Belirli Yalınkat Fonksiyonların Alt Sınıfları İçin Bazı Koşullar

Yaptığımız çalışmalarda elde ettiğimiz teorem ve özellikler bu bölümde yer almaktadır. Ayrıca bu bölümdeki çalışma 'International Europa Scientific Research Congress' de sunulmuş ve tam metin olarak basılmıştır [12].

4.1 Yalınkathlık için Koşullar

Bu bölümde yalınkat olma koşulları verilmiştir. $s(z) \in \mathcal{A}$ için, (Nunokawa vd. 1989) tarafından aşağıdaki sonuçlar verilmiştir [17].

Lemma 4.1. *Bir $s(z) \in \mathcal{A}$ fonksiyonu, $\frac{s(z)}{z} \neq 0$ ($0 < |z| < 1$) olmak üzere,*

$$\left| \left(\frac{z}{s(z)} \right)'' \right| \leq 1 \quad (z \in \mathcal{U}) \quad (4.1)$$

koşulunu sağlıyorsa, $s(z) \in \mathcal{S}$ dir.

Yukarıdaki lemmanın kanıtı için, (Ozaki; Nunokawa 1972) tarafından verilen aşağıdaki lemma kullanılır [19].

Lemma 4.2. *Bir $s(z) \in \mathcal{A}$ fonksiyonu,*

$$\operatorname{Re} \left(\frac{s(z)^2}{z^2 s'(z)} \right) \geq \frac{1}{2} \quad (z \in \mathcal{U}) \quad (4.2)$$

koşulunu sağlıyorsa, $s(z) \in \mathcal{S}$ dir.

Sonuçlarımızı değerlendirmek için, (Suffridge 1970) tarafından verilen bir sonraki lemma gereklidir [21].

Lemma 4.3. $\mathcal{U}$ da analitik olan bir $p(z)$ fonksiyonu; bir $h(z)$ yıldızlı fonksiyonu için,

$$zp'(z) \prec h(z) \quad (z \in \mathcal{U}) \quad (4.3)$$

koşulunu sağlıyorsa,

$$p(z) \prec \int_0^z \frac{h(t)}{t} dt \quad (z \in \mathcal{U}) \quad (4.4)$$

dir.

Buradan, sıradaki teorem elde edilir.

Teorem 4.4. Bir $s(z) \in \mathcal{A}$ fonksiyonu; η ($0 \leq \eta < 1$) reel sayısı için,

$$\left| \left(\frac{z}{s(z)} \right)'' \right| < 1 - \eta \quad (z \in \mathcal{U}) \quad (4.5)$$

koşulunu sağlıyorsa,

$$\operatorname{Re} \left(\frac{s(z)^2}{z^2 s'(z)} \right) > \frac{1}{2 - \eta} \quad (z \in \mathcal{U}) \quad (4.6)$$

dir.

Kanıt.

$$p(z) = \frac{z}{s(z)} - z \left(\frac{z}{s(z)} \right)' = \frac{z^2 s'(z)}{s(z)^2} \quad (z \in \mathcal{U}) \quad (4.7)$$

ile verilen bir $p(z)$ fonksiyonu göz önüne alınsın. Ayrıca, $p(z)$; $p(0) = 1$, $\mathcal{U}$ da analitik ve

$$zp'(z) = -z^2 \left(\frac{z}{s(z)} \right)'' \quad (4.8)$$

dir. $p(z)$ fonksiyonu $0 \leq \eta < 1$ için,

$$zp'(z) = -z^2 \left(\frac{z}{s(z)} \right)'' \prec h(z) = (1 - \eta)z \quad (z \in \mathcal{U}) \quad (4.9)$$

koşulunu sağlıyorsa, Lemma 4.3 bağlantısıyla

$$p(z) = \frac{z^2 s'(z)}{s(z)^2} \prec \int_0^z \frac{h(t)}{t} dt = 1 + (1 - \eta)z \quad (z \in \mathcal{U}) \quad (4.10)$$

olduğu görülür. (4.9) ve (4.5) koşulundan hareketle,

$$|zp'(z)| = \left| z^2 \left(\frac{z}{s(z)} \right)'' \right| < \left| \left(\frac{z}{s(z)} \right)'' \right| \leq 1 - \eta \quad (z \in \mathcal{U}) \quad (4.11)$$

dir. Aynı zamanda

$$|p(z) - 1| = \left| \frac{z^2 s'(z)}{s(z)^2} - 1 \right| \leq (1 - \eta)|z| < 1 - \eta \quad (z \in \mathcal{U}) \quad (4.12)$$

dir. ($0 < \eta < 1$) için, (4.12)

$$\left| \frac{s(z)^2}{z^2 s'(z)} - \frac{1}{\eta(2 - \eta)} \right| < \frac{1 - \eta}{\eta(2 - \eta)} \quad (z \in \mathcal{U}) \quad (4.13)$$

ifadesini gerektirir. Bu ($0 < \eta < 1$) için,

$$\operatorname{Re} \left(\frac{s(z)^2}{z^2 s'(z)} \right) > \frac{1}{2 - \eta} \quad (z \in \mathcal{U}) \quad (4.14)$$

olduğunu gösterir. $\eta = 0$ ise, (4.12) ifadesi

$$\left| \frac{z^2 s'(z)}{s(z)^2} - 1 \right| < 1 \quad (z \in \mathcal{U}) \quad (4.15)$$

halini alır ve buradan

$$\operatorname{Re} \left(\frac{s(z)^2}{z^2 s'(z)} \right) > \frac{1}{2} \quad (z \in \mathcal{U}) \quad (4.16)$$

dir. Bu teoremin ispatını tamamlar. $\square$

Aşağıdaki lemma (Hallenbeck; Ruschewehy 1975) tarafından ifade edilmiştir [8].

Lemma 4.5. $p(z)$, $p(0) = 1$ ve $\mathcal{U}$ da analitik bir fonksiyon olmak üzere, bir $h(z)$ konveks fonksiyonu için

$$p(z) + zp'(z) \prec h(z) \quad (z \in \mathcal{U}) \quad (4.17)$$

koşulunu sağlıyorsa,

$$p(z) \prec \frac{1}{z} \int_0^z h(t) dt \quad (z \in \mathcal{U}) \quad (4.18)$$

dir.

Yukarıda lemma aracılığıyla aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 4.6. Bir $s(z) \in \mathcal{A}$ fonksiyonu, η ($0 \leq \eta < 1$) reel sayısı için,

$$s'(z) \prec 1 + (1 - \eta)z \quad (z \in \mathcal{U}) \quad (4.19)$$

ifadesini sağlıyorsa,

$$\frac{s(z)}{z} \prec 1 + \frac{1 - \eta}{2} z \quad (z \in \mathcal{U}) \quad (4.20)$$

dir.

Kanıt.

$$p(z) = \frac{s(z)}{z} \quad (4.21)$$

olacak şekilde bir $p(z)$ fonksiyonu alınsın. Ayrıca, $p(0) = 1$ ve $\mathcal{U}$ da analitiktir. (4.19) ifadesi,

$$s'(z) = p(z) + zp'(z) \prec h(z) = 1 + (1 - \eta)z \quad (z \in \mathcal{U}) \quad (4.22)$$

ifadesine karşılık gelir ki burada $h(z)$, $\mathcal{U}$ da konvektir. Dolayısıyla $s(z)$, (4.19) ifadesini sağlıyorsa, Lemma 4.5 aracılığıyla

$$p(z) = \frac{s(z)}{z} \prec \frac{1}{z} \int_0^z h(t)dt = 1 + \frac{1 - \eta}{2} z \quad (z \in \mathcal{U}) \quad (4.23)$$

elde edilir. □

$s(z) \in \mathcal{A}$ için,

$$p(z) = \frac{z}{s(z)} \quad (4.24)$$

ve

$$h(z) = 1 + (1 - \eta)z \quad (4.25)$$

olarak alındığında aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 4.7. Bir $s(z) \in \mathcal{A}$ fonksiyonu, η ($0 \leq \eta < 1$) reel sayısı için,

$$2\frac{z}{s(z)} - \frac{z^2 s'(z)}{s(z)^2} \prec 1 + (1 - \eta)z \quad (z \in \mathcal{U}) \quad (4.26)$$

ifadesini sağlıyorsa,

$$\frac{z}{s(z)} \prec 1 + \frac{1 - \eta}{2} z \quad (z \in \mathcal{U}) \quad (4.27)$$

dir.

$s(z) \in \mathcal{A}$ için, $p(z) = s'(z)$ olarak alındığında aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 4.8. Bir $s(z) \in \mathcal{A}$ fonksiyonu, η ($0 \leq \eta < 1$) reel sayısı için,

$$s'(z) + zs''(z) \prec 1 + (1 - \eta)z \quad (z \in \mathcal{U}) \quad (4.28)$$

ifadesini sağlıyorsa,

$$s'(z) \prec 1 + \frac{1 - \eta}{2} z \quad (z \in \mathcal{U}) \quad (4.29)$$

dir.

$s(z) \in \mathcal{A}$ için, $p(z) = \frac{zs'(z)}{s(z)}$ olarak alındığında aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 4.9. Bir $s(z) \in \mathcal{A}$ fonksiyonu, η ($0 \leq \eta < 1$) reel sayısı için,

$$\frac{zs'(z)}{s(z)} \left(2 + \frac{zs''(z)}{s'(z)} - \frac{zs'(z)}{s(z)} \right) \prec 1 + (1 - \eta)z \quad (z \in \mathcal{U}) \quad (4.30)$$

ifadesini sağlıyorsa,

$$\frac{zs'(z)}{s(z)} \prec 1 + \frac{1 - \eta}{2} z \quad (z \in \mathcal{U}) \quad (4.31)$$

dir.

Uyarı 4.10. $0 \leq \eta < 1$ için,

$$w(z) = 1 + \frac{1 - \eta}{2} z \quad (z \in \mathcal{U}) \quad (4.32)$$

şeklinde ifade edilirse,

$$|w(z) - 1| < \frac{1 - \eta}{2} \quad (z \in \mathcal{U}) \quad (4.33)$$

dir. Bu, (4.29) daki $s(z)$ nin

$$\frac{1}{2} \leq \frac{1 + \eta}{2} < \operatorname{Re}\{s'(z)\} < \frac{3 - \eta}{2} \leq \frac{3}{2} \quad (z \in \mathcal{U}) \quad (4.34)$$

ifadesini ve (4.31) deki $s(z)$ nin

$$\frac{1}{2} \leq \frac{1 + \eta}{2} < \operatorname{Re} \left(\frac{zs'(z)}{s(z)} \right) < \frac{3 - \eta}{2} \leq \frac{3}{2} \quad (z \in \mathcal{U}) \quad (4.35)$$

ifadesini sağladığını gösterir.

4.2 Güçlü Fonksiyonlar

Bu kısımda, $\mathcal{A}$ 'nın alt sınıfları olan $S_S(\eta)$, $S_S^*(\eta)$ ve $K_S(\eta)$ sınıfları tanıtılacak ve bu sınıflara ait olma koşulları verilecektir.

Tanım 4.11. Bir $s(z) \in \mathcal{A}$ fonksiyonu, η ($0 \leq \eta < 1$) reel sayı olmak üzere,

$$|\arg s'(z)| < \frac{\pi}{2} \eta \quad (z \in \mathcal{U}) \quad (4.36)$$

koşulunu sağlıyorsa, $s(z)$ ye $\mathcal{U}$ da η -**mertebeden güçlü yalınkattır** denir ve $s(z) \in S_S(\eta)$ ile gösterilir.

Tanım 4.12. Bir $s(z) \in \mathcal{A}$ fonksiyonu, η ($0 \leq \eta < 1$) reel sayı olmak üzere,

$$\left| \arg \left(\frac{zs'(z)}{s(z)} \right) \right| < \frac{\pi}{2} \eta \quad (z \in \mathcal{U}) \quad (4.37)$$

koşulunu sağlıyorsa, $s(z)$ ye $\mathcal{U}$ da η -**mertebeden güçlü yıldızıldır** denir ve $s(z) \in S_S^*(\eta)$ ile gösterilir.

Tanım 4.13. Bir $s(z) \in \mathcal{A}$ fonksiyonu, η ($0 \leq \eta < 1$) reel sayı olmak üzere,

$$\left| \arg \left(1 + \frac{zs''(z)}{s'(z)} \right) \right| < \frac{\pi}{2} \eta \quad (z \in \mathcal{U}) \quad (4.38)$$

koşulunu sağlıyorsa, $s(z)$ ye $\mathcal{U}$ da η -**mertebeden güçlü konvektir** denir ve $s(z) \in K_S(\eta)$ ile gösterilir.

$0 \leq \eta < 1$ için,

$$w(z) = \left(\frac{1+z}{1-z} \right)^\eta \quad (z \in \mathcal{U}) \quad (4.39)$$

ile verilen bir $w(z)$ fonksiyonu göz önüne alındığında,

$$\arg w(z) = \eta \left(\frac{1+z}{1-z} \right) = \frac{\pi}{2} \eta \quad (z \in \mathcal{U}) \quad (4.40)$$

elde edilir. Dolayısıyla,

$$s'(z) = \frac{1}{z} e^{\int_0^z \left(\frac{1+t}{1-t} \right)^\eta dt} \quad (4.41)$$

ise,

$$s(z) = \int_0^z \left(\frac{1+t}{1-t} \right)^\eta dt \in S_S(\eta), \quad (4.42)$$

$$s(z) = e^{\int_0^z \left(\frac{1+t}{1-t}\right)^\eta dt} \in S_S^*(\eta), \quad (4.43)$$

ve $s(z) \in K_S(\eta)$ olduğu görülür.

Buradan, aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 4.14. *Bir $s(z) \in \mathcal{A}$ fonksiyonu, η ($0 \leq \eta < 1$) ve δ ($\delta \neq -1$) reel sayıları için,*

$$\left| \frac{zs'(z)}{s(z)} - 1 \right| < \frac{\pi}{2} \operatorname{Re} \left(\frac{1 + \delta z}{1 - z} \right) \quad (z \in \mathcal{U}) \quad (4.44)$$

ifadesini sağlıyorsa,

$$\left| \arg \left(\frac{s(z)}{z} \right) \right| < \frac{\pi}{2} \eta \quad (z \in \mathcal{U}) \quad (4.45)$$

dir.

Kanıt. $s(z) \in \mathcal{A}$ için $p(z) = \frac{s(z)}{z}$ fonksiyonu göz önüne alınsın. $p(z)$, $\mathcal{U}$ da analitik ve $p(0) = 1$ 'dir. Buradan,

$$\frac{zp'(z)}{p(z)} = \frac{zs'(z)}{s(z)} - 1 \quad (4.46)$$

ve

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r \cos \theta} d\theta = 1 \quad (4.47)$$

ile verilen Poisson integrali kullanılarak,

$$\begin{aligned}
|\arg p(z)| &= |Im(\log p(z))| \\
&= \left| Im \int_0^z (\log p(t))' dt \right| \\
&= \left| Im \int_0^z \frac{p'(t)}{p(t)} dt \right| \\
&= \left| Im \int_0^r \frac{p'(\rho e^{i\theta})}{p(\rho e^{i\theta})} e^{i\theta} d\rho \right| \\
&\leq \int_0^r \left| Im \left(\frac{p'(\rho e^{i\theta})}{p(\rho e^{i\theta})} e^{i\theta} \right) \right| d\rho \\
&\leq \int_{-r}^r \left| \frac{p'(\rho e^{i\theta})}{p(\rho e^{i\theta})} \right| d\rho \\
&\leq \frac{r}{2} \int_0^{2\pi} \left| \frac{p'(re^{i\theta})}{p(re^{i\theta})} \right| d\theta \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left| \frac{re^{i\theta} p'(re^{i\theta})}{p(re^{i\theta})} \right| d\theta \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left| \frac{re^{i\theta} s'(re^{i\theta})}{s(re^{i\theta})} - 1 \right| d\theta \\
&< \frac{\eta}{4} \int_0^{2\pi} Re \left(\frac{1 + \delta re^{i\theta}}{1 - re^{i\theta}} \right) d\theta \\
&= \frac{\eta}{4} \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{1 - \delta}{2} + \left(\frac{1 + \delta}{2} \right) \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r \cos \theta} \right\} d\theta \\
&= \frac{\pi}{2} \eta
\end{aligned} \tag{4.48}$$

dir. Buradan,

$$|\arg p(z)| = \left| \arg \left(\frac{s(z)}{z} \right) \right| < \frac{\pi}{2} \eta \quad (z \in \mathcal{U}) \tag{4.49}$$

olduğu görülür. $\square$

Örnek 4.15. $0 \leq \eta < 1$ olmak üzere,

$$s(z) = z \left(\frac{2}{2 - z} \right)^{3\eta} \quad (z \in \mathcal{U}) \tag{4.50}$$

ile verilen bir $s(z)$ fonksiyonu göz önüne alınsın.

$$w = \frac{2}{2 - z} \tag{4.51}$$

olduğundan,

$$\left|w - \frac{4}{3}\right| < \frac{2}{3} \quad (4.52)$$

ve

$$|\arg w| < \frac{\pi}{6} \quad (4.53)$$

dir. Buradan,

$$\left|\arg \frac{s(z)}{z}\right| < \frac{\pi}{2} \eta \quad (z \in \mathcal{U}) \quad (4.54)$$

dir. Bu şekildeki bir $s(z)$ fonksiyonu için,

$$\left|\frac{zs'(z)}{s(z)} - 1\right| = 3\eta \left|\frac{z}{2-z}\right| < 3\eta \quad (z \in \mathcal{U}) \quad (4.55)$$

alınabilir. Buradan, $\delta \leq -1$ olacak şekilde bir δ alınırsa, $s(z)$,

$$\left|\frac{zs'(z)}{s(z)} - 1\right| < 3\eta \leq \frac{\eta(1-\delta)}{4} < \frac{\eta}{2} \operatorname{Re} \left(\frac{1+\delta z}{1-z} \right) \quad (z \in \mathcal{U}) \quad (4.56)$$

ifadesini sağlar.

Buradan, aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 4.16. Bir $s(z) \in \mathcal{A}$ fonksiyonu, η ($0 \leq \eta < 1$) ve δ ($\delta \neq -1$) reel sayıları için,

$$\left|\frac{zs''(z)}{s'(z)}\right| < \frac{\eta}{2} \operatorname{Re} \left(\frac{1+\delta z}{1-z} \right) \quad (z \in \mathcal{U}) \quad (4.57)$$

ifadesini sağlıyorsa, $s(z) \in S_S(\eta)$ dir.

Kanıt. $s(z) \in \mathcal{A}$ için $p(z) = s'(z)$ olarak göz önüne alınsın. $p(z)$, $\mathcal{U}$ da analitik ve $p(0) = 1$ 'dir.

$$\frac{zp'(z)}{p(z)} = \frac{zs''(z)}{s'(z)} \quad (4.58)$$

olduğundan,

$$\begin{aligned}
|\arg p(z)| &= |Im(\log p(z))| \\
&= \left| Im \int_0^z \frac{p'(t)}{p(t)} dt \right| \\
&= \left| Im \int_0^r \frac{p'(\rho e^{i\theta})}{p(\rho e^{i\theta})} e^{i\theta} d\rho \right| \\
&\leq \int_0^r \left| Im \left(\frac{p'(\rho e^{i\theta})}{p(\rho e^{i\theta})} e^{i\theta} \right) \right| d\rho \\
&\leq \int_{-r}^r \left| \frac{p'(\rho e^{i\theta})}{p(\rho e^{i\theta})} \right| d\rho \\
&\leq \frac{r}{2} \int_0^{2\pi} \left| \frac{p'(re^{i\theta})}{p(re^{i\theta})} \right| d\theta \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left| \frac{re^{i\theta} p'(re^{i\theta})}{p(re^{i\theta})} \right| d\theta \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left| \frac{re^{i\theta} s''(re^{i\theta})}{s'(re^{i\theta})} \right| d\theta \\
&< \frac{\eta}{4} \int_0^{2\pi} Re \left(\frac{1 + \delta re^{i\theta}}{1 - re^{i\theta}} \right) d\theta \\
&= \frac{\eta}{4} \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{1 - \delta}{2} + \left(\frac{1 + \delta}{2} \right) \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r \cos \theta} \right\} d\theta \\
&= \frac{\pi}{2} \eta
\end{aligned} \tag{4.59}$$

elde edilir. Buradan,

$$|\arg p(z)| = |\arg s'(z)| < \frac{\pi}{2} \eta \quad (z \in \mathcal{U}) \tag{4.60}$$

dir ki bu $s(z) \in S_S(\eta)$ demektir. □

Örnek 4.17. $0 \leq \eta < 1$ için,

$$s(z) = \frac{2}{1 - 3\eta} \left(1 - \left(\frac{2}{2 - z} \right)^{3\eta - 1} \right) \tag{4.61}$$

ile verilen bir $s(z)$ fonksiyonu göz önüne alınsın. (4.61) den

$$s'(z) = \left(\frac{2}{2 - z} \right)^{3\eta} \tag{4.62}$$

ve

$$|\arg s'(z)| < \frac{\pi}{6} \quad (z \in \mathcal{U}) \quad (4.63)$$

olduğu görülür.

$$\left| \frac{zs''(z)}{s'(z)} \right| = 3\eta \left| \frac{z}{2-z} \right| < 3\eta \quad (z \in \mathcal{U}) \quad (4.64)$$

olduğundan, $(\delta \leq -11)$ olacak şekilde bir δ hesaba katıldığında,

$$\left| \frac{zs''(z)}{s'(z)} \right| < 3\eta \leq \frac{\eta(1-\delta)}{4} < \frac{\eta}{2} \operatorname{Re} \left(\frac{1+\delta z}{1-z} \right) \quad (z \in \mathcal{U}) \quad (4.65)$$

olacaktır.

Buradan, aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 4.18. Bir $s(z) \in \mathcal{A}$ fonksiyonu, η ($0 \leq \eta < 1$) ve δ ($\delta \neq -1$) reel sayıları için,

$$\left| \frac{zs''(z)}{s'(z)} + 1 - \frac{zs'(z)}{s(z)} \right| < \frac{\eta}{2} \operatorname{Re} \left(\frac{1+\delta z}{1-z} \right) \quad (z \in \mathcal{U}) \quad (4.66)$$

ifadesini sağlıyorsa, $s(z) \in S_S^*(\eta)$ dir.

Kanıt. $s(z) \in \mathcal{A}$ için $p(z) = \frac{zs'(z)}{s(z)}$ olarak alınsın. Buradan $p(z)$, $\mathcal{U}$ da analitik, $p(0) = 1$ ve

$$\frac{zp'(z)}{p(z)} = 1 + \frac{zs''(z)}{s'(z)} - \frac{zs'(z)}{s(z)} \quad (4.67)$$

dir. Teorem 4.14'in ispatındaki metod uygulandığında,

$$|\arg p(z)| = \left| \arg \left(\frac{zs'(z)}{s(z)} \right) \right| < \frac{\pi}{2} \eta \quad (z \in \mathcal{U}) \quad (4.68)$$

olduğu görülür. □

Örnek 4.19. $0 \leq \eta < 1$ için,

$$s(z) = e^{\int_0^z \frac{1}{t} \left(\frac{2}{2-t} \right)^{3\eta} dt} \quad (z \in \mathcal{U}) \quad (4.69)$$

ile verilen bir $s(z)$ fonksiyonu göz önüne alınsın. Buradan, $s(z)$

$$\frac{zs'(z)}{s(z)} = \left(\frac{2}{2-z} \right)^{3\eta} \quad (4.70)$$

ifadesini sağlar. Dolayısıyla, $(\delta \leq -11)$ için $s(z)$ fonksiyonu

$$\left| \frac{zs''(z)}{s'(z)} + 1 - \frac{zs'(z)}{s(z)} \right| < \frac{\eta}{2} \operatorname{Re} \left(\frac{1+\delta z}{1-z} \right) \quad (z \in \mathcal{U}) \quad (4.71)$$

olacaktır.

Son olarak aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 4.20. Bir $s(z) \in \mathcal{A}$ fonksiyonu, $\eta (0 \leq \eta < 1)$ ve $\delta (\delta \neq -1)$ reel sayıları için,

$$\left| z \left(\log \left(1 + \frac{zs''(z)}{s'(z)} \right) \right)' \right| < \frac{\eta}{2} \operatorname{Re} \left(\frac{1+\delta z}{1-z} \right) \quad (z \in \mathcal{U}) \quad (4.72)$$

ifadesini sağlıyorsa, $s(z) \in K_S(\eta)$ dir.

Kanıt. $p(z) = \frac{zs''(z)}{s'(z)} + 1$ ile verilen bir $p(z)$ fonksiyonu göz önüne alınsın. Buradan $p(z)$, $\mathcal{U}$ 'da analitik ve $p(0) = 1$ dir.

$$\log p(z) = \log \left(1 + \frac{zs''(z)}{s'(z)} \right) \quad (4.73)$$

ifadesi kullanıldığında,

$$\frac{zp'(z)}{p(z)} = z \left(\log \left(1 + \frac{zs''(z)}{s'(z)} \right) \right)' \quad (4.74)$$

olduğu görülür. Buradan, Teorem 4.14 ün ispatındaki metod uygulanırsa,

$$|\arg p(z)| = \left| \arg \left(1 + \frac{zs''(z)}{s'(z)} \right) \right| < \frac{\pi}{2} \eta \quad (z \in \mathcal{U}) \quad (4.75)$$

ifadesi elde edilir ki bu da $s(z) \in K_S(\eta)$ demektir. $\square$

Bölüm 5

Sonuçlar

Üçüncü bölümü oluşturan çalışma ve elde edilen sonuçlar ‘Communication in Mathematical Modeling and Applications’ isimli dergide yayınlanmıştır [11]. Dördüncü bölümdeki çalışmada ise $\mathcal{A}$ ’nın alt sınıfları olan $S_S(\eta)$, $S_S^*(\eta)$ ve $K_S(\eta)$ sınıfları tanımlanmış ve bu sınıflara ait olma koşulları verilmiştir. Ayrıca bu çalışma ‘International Europa Scientific Research Congress’ de sunulmuş ve tam metin olarak basılmıştır [12].

Kaynakça

- [1] Bieberbach, L. “Über die Koeffizienten derjenigen Potenzreihen, welche eine schlichte Abbildung des Einheitskreises vermitteln.” Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Phys-Math. (1916): 940-955.
- [2] Cartwright, M. “Some inequalities in the theory of functions.” Math. Ann. 111 (1935): 98-118.
- [3] Duren, P.L. Univalent Functions. New York, U.S.A: Springer Verlag, 1983.
- [4] Fejér, L., Riesz, F. “Aber einige funktionentheoretische Ungleichungen.” Math. Z. 11 (1921): 305-314.
- [5] Goodman, A.W. Univalent Functions. Vols I and II. Washington, New Jersey: Polygonal Publishing House, 1983.
- [6] Graham, I., Varolin, D. “Bloch Constants in One and Several Variables.” Pacif. J. Math. 174 (1996): 347-357.
- [7] Gronwall, T.H. “Some remarks on conformal representation.” Ann. of Math. Ser. 2 , 16 (1914 - 1915): 72–76.
- [8] Hallenbeck, D.J., Ruschewyh, St. “Subordination by convex function.” Proc. Amer. Math. Soc. 52 (1975): 191-195.
- [9] Hayman, W.K. “Symmetrization in the theory of functions.” Tech. Rep. No. 11, Navy Contract N 6-ori-106, Task Order 5, Stanford Univ. 1950.
- [10] Hayman, W.K. “Some applications of the transfinite diameter to the theory of functions” J. d’Analyse Math. 1 (1951): 155—179.
- [11] Karahüseyin, Z., Aydoğan, M., Owa, S. “Notes on some p-valent functions.” Communication in Mathematical Modeling and Applications. 2 (2019): 65-70.

- [12] Karahüseyin, Z., Aydoğan, M., Owa, S. "Some conditions for subclasses of certain univalent functions." International Europa Scientific Research Congress: Ankara, Turkey, 2023.
- [13] Koebe, P. "Über die uniformisierung beliebiger analytischer kurven." Nach. Ges. Wiss. 1907 (1907): 191-210.
- [14] Noshiro, K. "On the theory of schlicht functions." J. Fac. Sci. Hokkaido Univ. 2 (1934-1935): 129-155.
- [15] Nunokawa, M. "On the theory of multivalent functions." PanAmerican Math. J. 6 (1996): 87-96.
- [16] Nunokawa, M. "A note on multivalent functions." Tsukuba J. Math. 13 (1989): 453-455.
- [17] Nunokawa, M., Obradović, M., Owa, S. "One criterion for univalence." Proc. Amer. Math. Soc. 106 (1989): 1035-1037.
- [18] Nunokawa, M., Cho, N.E., Kwon, O.S., Sokol, J. "On the starlikeness of p-valent functions." Turkish J. Math. 43 (2019): 143-150.
- [19] Ozaki, S., Nunokawa, M. "The Schwarzian derivative and univalent functions." Proc. Amer. Math. Soc. 33 (1972): 392-394.
- [20] Riemann, B. "Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse." PhD Thesis, University of Göttingen, Germany, 1851.
- [21] Suffridge, T.J. "Some remarks on convex maps of the unit disc." Duke Math. J. 37 (1970): 775-777.
- [22] Spencer, D.C. "On finitely mean valent functions. II." Trans. Amer. Math. Soc. (1940): 418-435.