

YAŞAMIMIZI ÇEVRELEYEN İLGİNÇ GEOMETRİK ŞEKİLLER: FRAKTALLAR

Rüya DOĞAN¹, Müge GENÇ¹

ÖZET

Bu çalışmada, Mandelbrot Fraktalı kullanılarak yeni bir fraktal oluşturulup, elde edilen şeklin bir fraktal olduğunun ispatlanması amaçlanmıştır. Çalışma, Özel Eyüboğlu Lisesi 11.sınıf öğrencilerinden Ayşegül BAYAR, Valya HUBEŞ, Merve AKIN ve Ece DEMİRCİ tarafından Matematik öğretmenleri rehberliğinde tamamlanmıştır.

Çalışmanın ilk bölümünde, UltraFraktal 4 programı kullanılarak denemeler yapılmış, fraktalın formülü elde edilmiştir. Öteleme işlemleri aritmetik olarak gösterilmiştir. Daha sonra elde edilen şeklin boyutu, çevresi ve alanı hesaplanmıştır. İlk öteleme sonucunda elde edilen şekil 2 boyutludur. Ötelemeler sonucunda elde edilen şeklin boyutunun 2'ye yakın bir rasyonel sayı olduğu bulunmuştur.

Sonuç olarak, sınırlı alanda, sonsuz uzunlukta bir geometrik şekil elde edildiği, şeklin boyutunun rasyonel sayı olduğu gösterilmiştir.

Yapılan literatür araştırmaları sonucunda, elde edilen fraktalın şeklinin daha önce mimaride kullanıldığını bulunmuştur. İtalya'da bulunan "Del Montee" kalesinin yapısı elde ettiğimiz fraktalla uyum içindedir. Ancak, kuşkusuz ki kalenin yapımında sonsuz bir ötelemeden söz edilemez.

ABSTRACT

The aim of this paper is to form a new fractal by using Mandelbrot's Fractal and to prove that the new formed figure is also a fractal itself. This project is done by Grade 11 students of Özel Eyuboglu High School, Ayşegül BAYAR, Valya HUBEŞ, Merve AKIN and Ece DEMİRCİ with the guide of Mathematics teachers.

In the first part of the project, students used Ultrafractal 4 programme, and got the formula of the new fractal. Iterations are showed algebraically by the students. The perimeter and the area of the figure are calculated. The first figure had two dimensions. The last figure's dimension was also calculated and found as a rational number nearly equal to 2.

Finally, it was proved that the figure had a bounded area but an infinite perimeter, and the dimension of the figure was a rational number. The students realised that the new figure gotten by is similar to the figure of the castle in Italy, called "Del Monde". However, it can not be declared an endless iteration for the construction of the castle.

GİRİŞ

Matematikte kırıklı, pütürlü, rasyonel sayı boyutları olan geometrik şekil ve cisimlere "fraktal" denmektedir. "Fraktal" kelimesi ilk olarak 1975'te Polonya asıllı matematikçi Benoit B. Mandelbrot tarafından ortaya Latince "fractus" kelimesinden türetilmiştir.

Fraktalların özelliklerini incelersek:

1) En küçük ayrıntısı bile bütünün tüm özelliklerini taşımaktadır. Ne kadar detaya inerseniz inin, ne kadar yakınlaşırsanız yaklaşın, yine de bütünü her ayrıntıda görebilirsiniz. Her parçası, bütünün kendine benzer daha küçük bölümüdür. Bu özelliğe "kendine benzerlik" adı verilir.

2) Çevre uzunlukları ölçülemez. Örneğin "İngiltere'nin sahillerinin uzunluğu nedir?" sorusuyla başlayan araştırma da göstermiştir ki, sahil şeritlerinin gerçek uzunluğunu ölçmek neredeyse imkansızdır. Ölçüm aracınız küçüldükçe, sahilin uzunluğu, sınırsız bir şekilde artmakta; körfezlerle, yarımadalarla katlanmaktadır. Ölçüm işlemi sonsuz sayıda, giderek küçülen ölçüm araçlarıyla devam ettirilirse, hatta ölçek atom çapındaki uzunluklara dönüşürse, "belki" gerçekten sona erebilmektedir ki; bu neredeyse imkansızdır.

¹Eyüboğlu Eğitim Kurumları, Özel Eyüboğlu Lisesi Matematik Öğretmeni

3) Kırıklı, pürüzlü ve çıkıntılı biçimde oldukları için her yerde sürekli oldukları halde, hiç bir yerde türevleri alınmaz.

4) Boyutları rasyonel sayılardır. Bir iplik yumağını düşünelim: Boyutu, incelendiği yere göre değişmektedir. Uzaydan inceleniyorsa bir nokta şeklinde düşünülüp, sıfır boyutlu; çok yakından bakılıyorsa küre olarak görülüp, üç boyutlu olduğu söylenebilir. Fraktalların boyutları da, ne kadar bir alanda bükülüp, kırıldığıyla bağlantılı olarak değişir. Eğer bir fraktal, düzlemi kaplıyorsa, boyutu 1 ve 2 arasında; bombeli bir biçimdeyse, 2 ile 3 arasındadır.

5) Fraktallar, karmaşık sayı fonksiyonlarında sonsuz ötelemelerle, yani belirlediğimiz kuralı sürekli tekrarlayarak oluşturulur. Ancak doğal fraktallarda sınırlı ötelemeler bulunabilir. Eğreltiotları, ayçiçekleri, brokoli, kozalaklar, salyangoz kabukları, ağaç dal ve yapraklarında olduğu gibi.

Bilinen en ünlü fraktallar, Julia ve Mandelbrot kümeleridir. $z_{n+1} = z_n^2 + c$ gibi basit bir karmaşık sayı fonksiyonuyla açıklanan Mandelbrot Kümesi, Fraktal Geometri denince ilk akla gelen örneklerden biridir. Mandelrot, z_0 'ı (başlangıçtaki karmaşık sayıyı) "0" alarak, bu fonksiyonla yeni bir karmaşık sayı bulmuş; onu da tekrar aynı fonksiyona yerleştirmiştir. Sonsuz ötelemelerle elde ettiği bu sayıların, karmaşık düzlemde orijine olan uzaklığının, 2'den küçük olduğunu göstermiştir. Sonra da tüm sonuçları, karmaşık düzleme yerleştirip, muhteşem bir resimle karşılaşmıştır. Julia Kümeleri'nde ise, Gaston Julia, Mandelbrot'nun fonksiyonundaki başlangıç karmaşık sayısını sürekli değiştirerek, tüm ötelemelerdeki sabit "c" sayısını hiç değiştirmeden elde etmiştir.

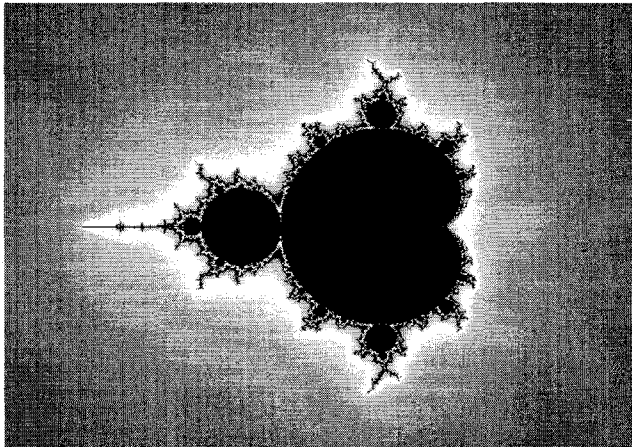
Bu çalışmada, Mandelbrot kümesinin fonksiyonundan yararlanılarak, yeni bir fraktal fonksiyon elde edilmiş ve elde edilen şekil matematiksel olarak incelenmiştir. Bunun için de UltraFractal4 programı kullanılmıştır.

YÖNTEM

Çalışmada, öncelikle Mandelbrot fonksiyonu incelenmiştir. Bu fonksiyon,

$z_{n+1} = z_n^2 + c$ şeklindedir. Fonksiyonda "z" karmaşık sayıları simgeliştirmektedir. "c" ise herhangi bir sabit sayıdır. Bu fonksiyonda, " $z_0 = 0$ " başlangıçtaki karmaşık sayı olmak üzere, fonksiyona yerleştirilmiş, sonsuz ötelemeler yapılmış ve merkezden uzaklık 2'den küçük alınarak, tüm öteleme sonuçlarından elde edilen z sayıları, karmaşık düzlemde gösterilmiştir. Böylece aşağıdaki şekil elde edilmiştir (Mandelbrot, 1975).

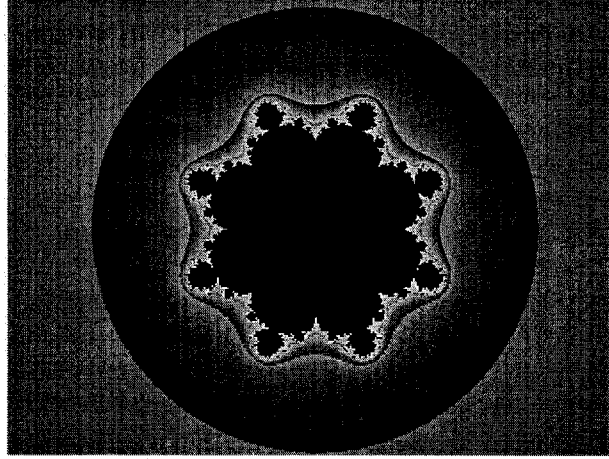
Şekil 1
UltraFractal4 Mandelbrot resmi



Projede “UltraFractal4” programından yararlanılmıştır. Bu program Microsoft Windows uyumlu, fraktal üretmeye yarayan en son programlardan biridir. Programın esasında bulunan kayıtlı formüller değiştirilebildiği gibi, farklı formüller de geliştirilebilmektedir. Bu seviyede yeni bir formül üretmek yerine, Mandelbrot Kümesinin formülündeki değerler, çeşitli denemeler yapılarak değiştirilmiştir. Denemeler, oluşan şeklin gerçek hayatta başka bir nesne ile bağlantısı kurulabilecek şekilde yapılmıştır.

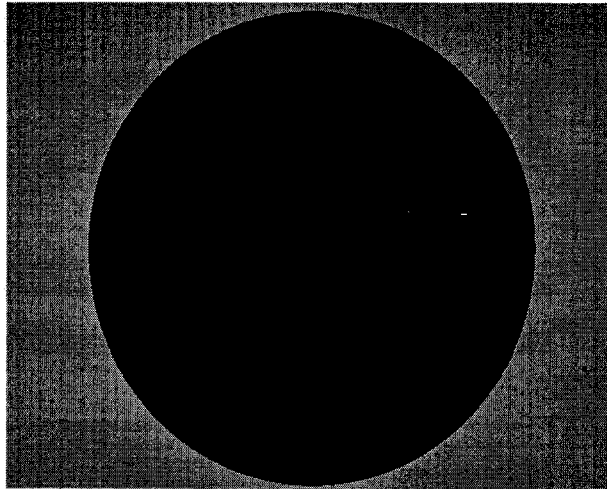
Bu formül üzerinde yapılan değişiklikler sonucu çok değişik şekiller oluşmuş ve sonuç olarak $f(z) = z^9 + c$ formülünün oluşturduğu şekil seçilmiş ve merkezden uzaklık $|z| < 3$ olarak alınmıştır.

Şekil 2
Denemeler Sonucunda Elde edilen fraktalın resmi



Şekil 2’de resmi görülen fraktalı matematiksel olarak açıklamaya geçmeden önce, fonksiyonun ilk ötelemesinden elde edilen şekil incelenmiştir.

Şekil 3
1.öteleme sonucunda elde edilen şekil



İlk ötelemede bir çember elde edilmiştir. Bu çemberin merkezi, orijine $(0, 0)$ 'a yerleştirilmiş (Şekil 3) ve $z_0 = 0$ alınmıştır. Ele alınan “c” sabit sayısı $c = a + bi$ şeklinde bir karmaşık sayıdır. Bu durumda ilk öteleme sonucunda elde edilen hesaplamalar aşağıdaki gibidir: Bu hesaplama sadece örnek bir “c” sayısı içindir. Mandelbrot da çalışmalarında c sabit sayısını belli bir değerin üzerinde alınca, fonksiyondan elde edilen yeni karmaşık sayının ya birden büyüüp, sonsuza kaçtığını ya da belli bir değerin altında alınca, elde ettiği yeni karmaşık sayıların merkeze uzaklığının hep 2’den küçük olanlarını karmaşık düzleme yerleştirerek, Mandelbrot fraktalını elde etmiştir.

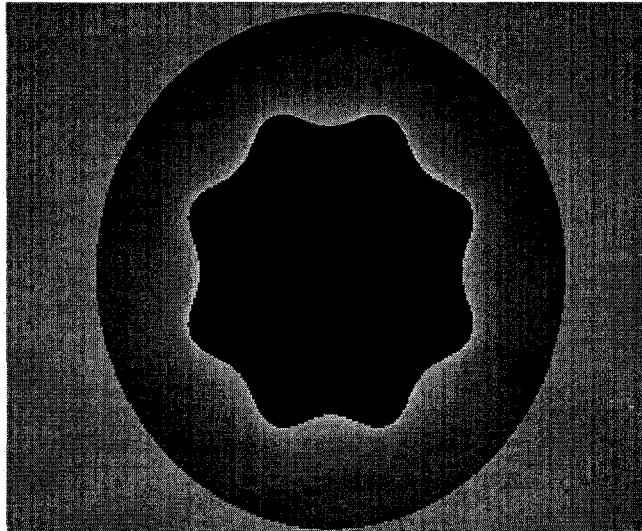
Bu çalışmada da bu sonuca ulaşılabilmek için farklı “c” sayıları ile hesaplamalar yapılmıştır. Örneğin:

$$c = -0.06 + 0.08i$$

$$z_1 = z_0^9 + c = -0.06 + 0.08i$$

“c” sayısı seçilirken, yapılacak olan tüm ötelemelerde $|z| < 3$ şartı göz önünde bulundurulmuştur. UltraFractal4 programında, oluşturulan fraktalın formülünü yazarken, bu koşuldan yola çıkılmıştır. Farklı “c” sayıları için yapılan tüm hesaplamalarda, fonksiyona konulan ve ötelemelerden elde edilen sayıların $|z|$ değerleri sadece 0.1 civarında olduğu takdirde, böyle bir fraktala ulaşılmıştır. “c” sayısında $|z|$ değeri büyüdükçe, elde edilen karmaşık sayılar maalesef bu fraktalın dışında kalmıştır. Dolayısı ile, $|z| < 3$ koşulunu sağlayabilecek, farklı “c” sayıları ile yola çıkılarak elde edilen tüm “z” karmaşık sayıları, analitik düzleme yerleştirilerek bu fraktal oluşturulmuştur. Kağıt ve kalemle yapıldığı takdirde yıllarca sürebilecek hesaplamalar, Ultrafraktal 4 programıyla 1 dakikadan kısa bir sürede tamamlanmıştır.

Şekil 4
2.öteleme sonucunda elde edilen şekil



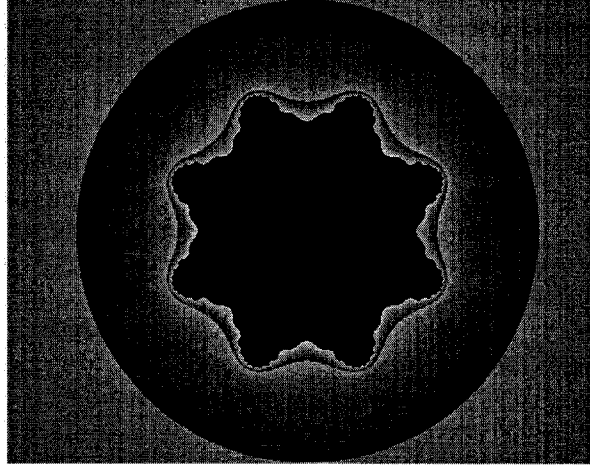
2. öteleme sonucunda 8 tane küçük çember daha elde edilmiştir. Yani yapılacak olan tüm ötelemelerde kendine benzer 8 çember daha oluşmaktadır. Her bir öteleme sonucunda çember kendini tekrarlayarak sekizer sekizer çoğalmaya başlamıştır.

2. öteleme için, 1. ötelemekten elde edilen z_1 sayısı fonksiyona yerleştirilmiştir ve binom açılımı yardımı ile sonuca ulaşılmıştır:

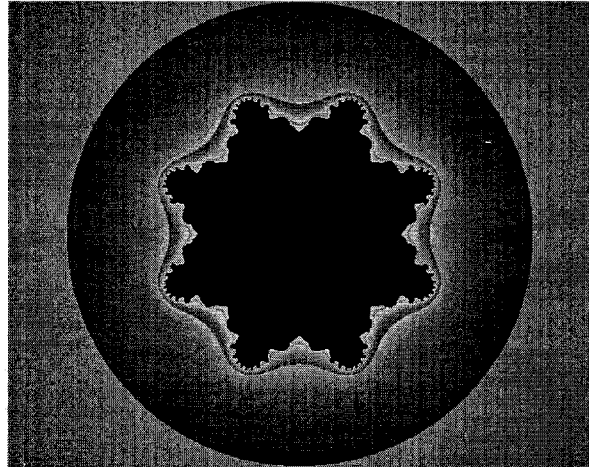
$$\begin{aligned}
z_2 = z_1^9 + c &= (a+bi)^9 + (-0.06 + 0.08 i) = {}_9C_0 \cdot a^9 + {}_9C_1 \cdot a^8 \cdot (bi)^1 + {}_9C_2 \cdot a^7 \cdot (bi)^2 + \\
&{}_9C_3 \cdot a^6 \cdot (bi)^3 + {}_9C_4 \cdot a^5 \cdot (bi)^4 + {}_9C_5 \cdot a^4 \cdot (bi)^5 + {}_9C_6 \cdot a^3 \cdot (bi)^6 + {}_9C_7 \cdot a^2 \cdot (bi)^7 + {}_9C_8 \cdot a^1 \cdot (bi)^8 + \\
&(-0.06 + 0.08 i) \\
z_2 &= -0.0599999995 + 0.08000000009 i
\end{aligned}$$

Yukarıdaki işlemde TI83 grafik çizen hesap makinesi kullanılmıştır. Bu sayının 3., 4. ve 5. öteleme sonuçlarında da hep aynı z_2 sayısı elde edilmiştir. Bunun sebebi, sayılar giderek çok hızlı bir biçimde küçülmekte ve hesap makinesinde virgülden sonra 9.basamaktan sonraki sayıları okumamaktadır.

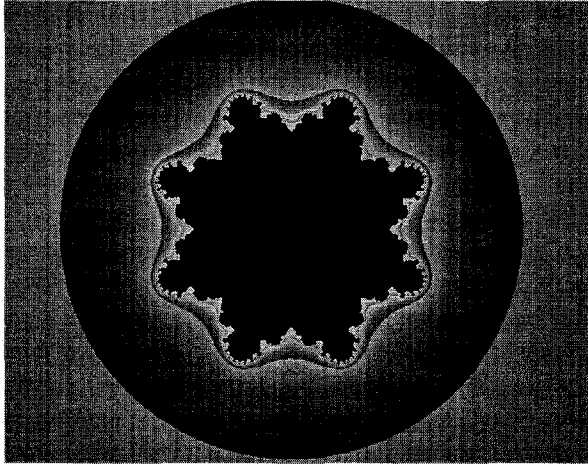
Şekil 5
3.öteleme sonucunda elde edilen şekil



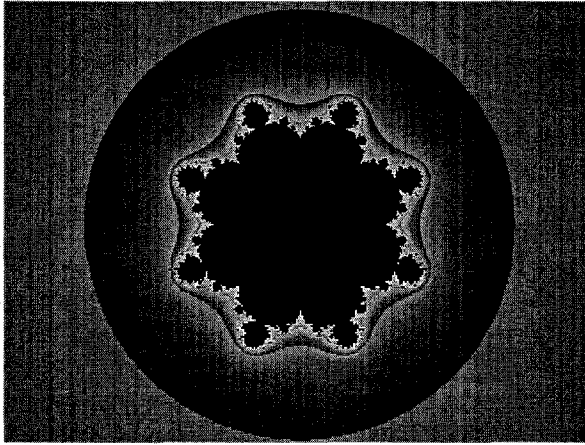
Şekil 6
4.öteleme sonucunda elde edilen şekil



Şekil 7
5.öteleme sonucunda elde edilen şekil



Şekil 8
250.öteleme sonucunda elde edilen şekil



Elde edilen şeklin fraktal olduğunu gösterebilmek için, ilk olarak boyutunun hesaplanması gerekmektedir. Fraktalların boyutlarını hesaplayabilmek için, Hausdorff Boyut formülü veya Kutucuk Sayma Metodu kullanılmaktadır. Ayrıca fraktalların boyutlarını hesaplayabilmek için pek çok bilgisayar programı da geliştirilmiştir. Bu projede elde edilen fraktalın boyutunu hesaplayabilmek için kullanılan formül aşağıdaki gibidir:

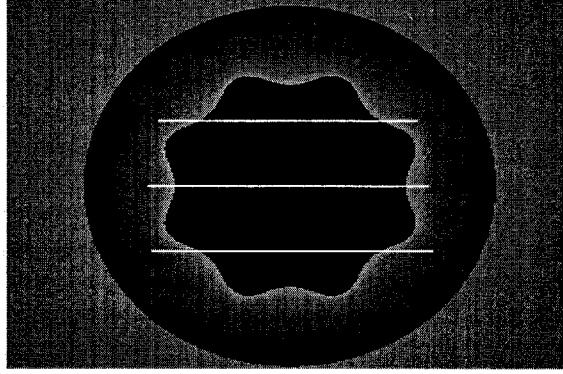
$$D (\text{Fraktal boyut}) = \frac{\ln (\text{birbirine benzeyen parçalar})}{\ln (\text{bölünen parçalar : büyütülme oranı})}$$

Bu formülü uygulayabilmek için öncelikle elimizde birbirine benzeyen kaç parça olduğu incelenmiştir. 2.öteleme sonucunda çember şekli kendisini 8 kez tekrarlamıştır. Bu şekildeki tekrarlanan parçaları eşit olarak bölersek, aşağıdaki şekilde de görüldüğü gibi, şekil 4

parçaya ayrılmış olur. Bu ayırma işlemi yapılırken, şeklin büyütülme oranı, yani çemberlerin birbirlerini tekrar ederken ne ölçüde büyüdüğü de göz önünde bulundurulmaya çalışılmıştır. Bu yüzden, bulunan şeklin fraktal boyutu aşağıdaki gibi hesaplanmıştır:

$$D = \frac{\ln 8}{\ln 4} = 1.5$$

Şekil 9
2.öteleme sonucunda elde edilen şeklin parçalara ayrılmış hali



Elde edilen sonuçtan da görüldüğü gibi şeklin boyutu rasyonel sayı olarak bulunmuştur. Bu sonuç, elde edilen şeklin bir fraktal olduğunu göstermektedir. Ayrıca, ilk ötelemenin sonucu bir çemberdi. Çember iki boyutlu bir şekil olduğundan daha sonraki ötelemelerden elde edilen şeklin boyutunun 1 ve 2 arasında çıkması beklenmektedir. Elde edilen fraktalın boyutu da 1 ve 2 arasındadır.

Elbette ki, şekli kesin ve net olarak eşit parçaya bölebilmek mümkün olmamıştır. Bu yüzden, şekil, farklı eşit parçalara da ayrılmıştır. Bu ayrılmalar sonucunda 4, 5 ve 6 parça elde edilmiştir. Tüm bu sayılar formüle yerleştirildiği zaman, farklı kesir sayılarına ulaşılmıştır:

$$D = \frac{\ln 8}{\ln 5} \approx 1.29$$

$$D = \frac{\ln 8}{\ln 6} \approx 1.16$$

Ancak büyütülme oranı göz önüne alınarak, en uygun olarak 4 parçaya ayrılması gerektiğine karar verilmiştir. Çünkü, kesrin 2'ye daha yakın olması gerektiği düşünülmektedir.

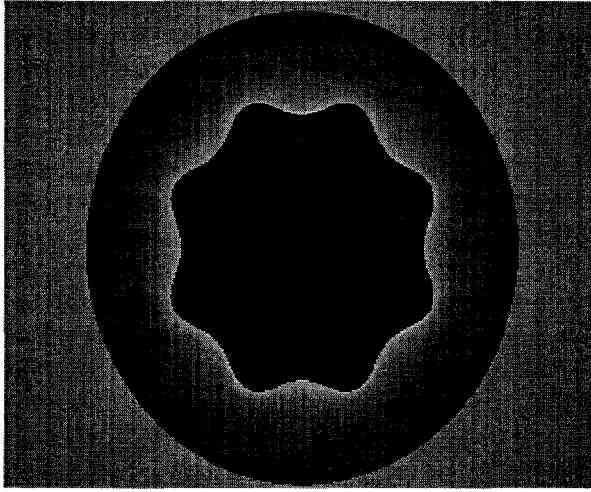
Elde ettiğimiz fraktalın çevresini hesaplayabilmek için şu şekilde bir yol izlenmiştir: İkinci öteleme sonucunda, ilk elde edilen şeklin (çember), 8 kez tekrarlandığı görülmektedir. İlk öteleme sonucunda elde ettiğimiz çember şeklinin yarıçapı "r" olsun. Bu

durumda, ikinci öteleme sonucunda 8 kez tekrarlanan çemberlerin her birinin yarıçapının $\frac{r}{8}$ olduğu düşünülebilir. Birinci öteleme sonucunda elde edilen şeklin çevresi;
 $C = 2\pi$ 'dir.

İkinci öteleme sonucunda tekrar edilen şekillerden birinin yay uzunluğu;

$S = 2\pi \frac{r}{8}$ olacaktır. Ancak, elimizde tekrarlanan 8 şekil bulunmaktadır. Bu durumda, tekrar eden şekillerin toplam uzunluğu 2π bulunacaktır. (Bkz. Şekil 10)

Şekil 10



Tekrarlanan şekillerin toplam uzunluğunu, 1. ötelemeden elde edilen şeklin çevresi ile toplarsak, çevre uzunluğunun her seferinde başlangıçtaki, 2 katı kadar arttığı görülür. Böylece, çevre uzunluğunun giderek arttığı ve sonsuz olduğu sonucu elde edilir.

Alan ölçüsü için, her bir dairenin yarıçapının bir öncekinin $1/8$ 'i kadar olduğu göz önünde bulundurulmuştur. Buna göre, şeklin alanı seri toplamı ile aşağıdaki şekilde hesaplanabilir:

Bu, geometrik bir seridir. Ortak kat $1/64$ 'dür. Seri şeklinde yazılacak olursa:

$$A = \pi r^2 + \pi \left(\frac{r}{8}\right)^2 + \pi \left(\frac{r}{64}\right)^2 + \dots \text{'dir.}$$

Seri toplamı ile yapılan hesaplamada:

$$A = \frac{\pi r^2}{1 - \frac{1}{64}} = \frac{64\pi r^2}{63} \text{ olarak bulunur.}$$

Görüldüğü gibi sınırlı alanda, sonsuz uzunlukta bir geometrik şekil elde edilmiştir. Bu da fraktalların bir özelliğidir.

SONUÇ

Çalışmada, $f(z) = z^9 + c$ formülü kullanılarak, öteleme yapılmış, 1.öteleme sonucunda aşağıdaki bilgiler elde edilmiştir:

1. Yapılan ilk öteleme sonucunda karmaşık düzlemde elde edilen şekil bir çemberdir.
2. İlk öteleme sonucunda elde edilen şekil 2 boyutludur. Dolayısıyla, ilerleyen ötelemeler sonucunda elde edilecek olan fraktalın boyutunun 1 ve 2 arasında bir rasyonel sayı çıkması beklenmektedir.

İkinci öteleme sonucunda elde edilen bilgiler şunlardır:

1. İkinci öteleme sonucunda karmaşık düzlemde elde edilen şekilde çemberlerin kendilerini tekrarladığı görülmektedir.
2. İkinci öteleme sonucunda elde edilen şekilde çember 8 kez kendini tekrarlamıştır.

Ultrafraktal4 programında, fraktal en çok 250 sefer öteleme sonunda görüntülenmiştir. Elde edilen fraktalın boyutu hesaplandığında 1.5 bulunmuştur ki bu değer 2'ye yakındır. Dolayısıyla ilk ötelemelerde elde edilen şekil olan çemberin boyutuna yakın bir değer elde edilmiştir.

Alanı hesaplanabilirken $(\frac{64\pi r^2}{63})$, çevre uzunluğu sonsuz olarak bulunmuştur.

Bu veriler doğrultusunda, elde ettiğimiz şeklin fraktal olduğunu ispat edebilmekteyiz.

Doğada bulunan bazı canlıların fraktal yapıda olduklarını belirtmiştik. Ancak, bu yapılarda sonsuz öteleme olmadığı da bir gerçektir.

Yapılan literatür araştırmaları sonucunda elde edilen fraktalın şeklinin daha önce mimaride de kullanıldığını bulunmuştur. İtalya'da bulunan "Del Montee" kalesinin yapısı, elde ettiğimiz fraktalla uyum içindedir. Ancak, kuşkusuz ki kalenin yapımında sonsuz bir ötelemekten söz edilemez.

Del Monte Kalesi 29 Ocak 1240 yılında İtalya'nın Bari eyaletinde imparator Federico tarafından, avcılık yapmak için Riccardo di Montefusco'ya yaptırılmıştır. Kale, Santa Maria kilisesinin yanına inşa edilmiştir. Kalenin etrafında 8 adet aynı ölçülerde sekizgen oda bulunmaktadır. Bu odalar ise, bizim oluşturduğumuz fraktala benzeyen kısımdır.

KAYNAKÇA

1. "Fractals and the Fractal Dimension." 2005.
< <http://www.vanderbilt.edu/AnS/psychology/cogsci/chaos/workshop/Fractals.html> >
2. Tucek, Jim. "What are fractals?." 3 Ağustos 2004.
< <http://www.jracademy.com/~jtucek/math/dimen.html> >
3. Devaney, Robert L. "Fractal Dimension." 2 Nisan 1995.
< <http://math.bu.edu/DYSYS/chaos-game/node6.html> >
4. Weisstein, Eric W. "Fractal." From *MathWorld*--A Wolfram Web Resource. 1999
< <http://mathworld.wolfram.com/Fractal.html> >
5. Brown, Richard G. *Advanced Mathematics*. Boston: Mc. Dougall Littel Houghton Mifflin, 1997

6. Murdock, J., Ellen Kamischke ve Eric Kamischke. Advanced Algebra Through Data Exploration. Berkley: Key Curriculum Press, 1998
7. Larson, Ronald E., Timothy D. Kanold ve Lee Stiff . Algebra 2 An Integrated Approach. Lexington: D.C. Heath and Company, 1995
8. Joyce, David E. "Complex Numbers." 1999
<http://www.clarku.edu/~djoyce/complex/> >