

**T.C.
İSTANBUL KÜLTÜR ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ**

**İKİ EŞ MERKEZLİ KÜRE ARASINDA RADYASYON
TRANSFERİ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
Amjad Fawaz Mohammad AlAhmad
1900006262**

**Anabilim Dalı: Fizik
Program: Fizik**

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Sevim AKYÜZ

HAZİRAN 2023

**T.C.
İSTANBUL KÜLTÜR ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ**

**İKİ EŞ MERKEZLİ KÜRE ARASINDA RADYASYON
TRANSFERİ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
Amjad Fawaz Mohammad ALAhmad
1900006262**

**Anabilim Dalı: Fizik
Program: Fizik**

**Tez Danışmanı: Prof. Dr. Sevim AKYÜZ
Jüri Üyeleri: Prof. Dr. Ayşen ÖZEL
Doç. Dr. Sefa ÇELİK**

HAZİRAN 2023

ÖNSÖZ

Bu tez çalışmamı yapmama olanak sağlayan, danışman hocam Prof.Dr.Sevim Akyüz' e teşekkür ederim. Çalışmam sürecinde her türlü yol gösterici olan, olumlu tavrıyla beni cesaretlendiren, bilgi birikimiyle çalışmama farklı açılardan bakmamı sağlayan beraber çalışmaktan ve her zaman öğrencisi olmaktan gurur duyduğum değerli hocam Dr.NASİM ALSHWAKFA teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca bu çalışmayı yapmama ilham olan ve mensubu olmaktan mutluluk ve gurur duyduğum BİLİMSEL ARAŞTIRMALAR İÇİN ÜRDÜN FİZİKSEL TOPLULUĞU, çalışmamda bana destek olan tüm bilgi ve birikimlerini benimle paylaşan De. Mohammad Abulwafave, prof.Dr.Emad alhaik hocalarıma ayrıca teşekkür ederim

Son olarak tüm hayatım boyunca benim yanımda olan, aldığım kararları her zaman destekleyen, sadece bu çalışma sürecinde değil tüm hayatım boyunca beni cesaretlendiren ve moral veren rahmetli annem, babam JAMİLA ABDULKADİR, FAWAZ AL-ALAHMAD ve BÜTÜN kardeşerime, Bu araştırmadaki başarı ve ilerlememin sebebi olan sevgili eşimi SERVİNOZ MİRZAKH OLİKOVA sonsuz şükranlarımı sunar ve teşekkür ederim

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ -----	I
İÇİNDEKİLER -----	II
ŞEKİLLER LİSTESİ -----	III
TAPLULAR LİSTESİ -----	IV
SEMBOLLER LİSES -----	V
ÖZET -----	VI
ABSTRACT -----	VII
Giriş -----	1
1. Radyasyon Transfer Denklemi -----	1
1. Klasik radyasyon transfer denklemi -----	3
2. Kartezyen koordinat sistemi formülasyonu -----	3
3. Küresel koordinat sistemi formülasyonu -----	5
1.3.1. Silindirik koordinat sistemi formülasyonu -----	7
1.3.2. Küresel koordinat sistemi formülasyonu -----	7
	10
2. RTE Denklemi küresel koordinat sistem basitleştirme -----	
2.1. Küresel koordinat sisteminde RTE'nin sınır koşulu -----	11
2.2. Fark Şeması -----	12
2.3. Moment yönteminde RTE -----	15
	18
3. Radyasyon ısı akışı -----	19
	19
4. RTE'nin sayısal özellikleri -----	30
	30
5. Sayısal hatalar ve doğruluk geliştirme stratejileri -----	
5.1. DOM'daki sayısal hataları -----	30
5.2. Fark şemasından kaynaklanan hata -----	31
5.3. Isı akısı hesaplamasında hata -----	33
	36
6. Sonuç -----	36
	37
7. Kaynaklar -----	37

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil (1)	Ortamda taşıma şeması	4
Şekil (2)	RTE'yi formüle etmek için tanımlanan değişkenli kartezyen system	5
Şekil (3)	RTE Silindirik koordinat sistemi için	7
Şekil (4)	Küresel koordinat sisteminin tanımı	8
Şekil (5)	Küre geometrisi ve gösterimler	10
Şekil (6)	Fark şeması	13
Şekil (7)	τ_2 optik kalınlığının $\varepsilon_1=\varepsilon_2=1$, $\theta_2=0,5$ ve $R_1/R_2=0,5$ ile boyutsuz ışınım akısı üzerindeki etkisi.	26
Şekil (8)	R_1/R_2 oranının $\varepsilon_1=\varepsilon_2=1$, $\theta_2=0,5$ ve $\tau_2=2,0$ ile boyutsuz ışınım akısı üzerindeki etkisi	27
Şekil (9)	Θ_2 sınır sıcaklığının $\varepsilon_1=\varepsilon_2=1$, $\tau_2=2$ ve $R_1/R_2=0,5$ ile boyutsuz ışınım akısı üzerindeki etkisi	28
Şekil (10)	Şekil $\theta_2=0,5$, $\tau_2=1$ ve $R_1/R_2=0,5$ ile yüzey emisyonunun boyutsuz ışınım akısı üzerindeki etkisi	29
Şekil (11)	Sayısal difüzyon ve ışın etkilerini göstermek için alt duvar boyunca gelen ısı akışı $N_\theta = N_\varphi$	32
Şekil (12)	Sayısal difüzyon ve ışın etkilerini göstermek için alt duvar boyunca gelen ısı akışı	33
Şekil (13)	Etkilerini gösteren şemalar, sınır sınırlı yük	34
Şekil (14)	Işın etkilerini gösteren şemalar. iç (hacimsel) sınırlı yük	35

TABLolar LISTESi

Taplo(1)	Çeşitli $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ kombinasyonları için $r_q(r)$ değerleri ($r_1^* = 0.5, \theta_2 = 0.5, \tau_2 = 1$)	20
Taplo(2)	İç yüzeydeki net ışımsal ısı akısı izotropik olay ve $\omega=1$	21
Taplo(3)	τ_2 optik kalınlığının $\varepsilon_1=\varepsilon_2=1, \theta_2=0,5$ ve $R_1/R_2=0,5$ ile boyutsuz ışımsal akısı üzerindeki etkisi.	22
Taplo(4)	R_1/R_2 oranının $\varepsilon_1=\varepsilon_2=1, \theta_2=0,5$ ve $\tau_2=2,0$ ile boyutsuz ışımsal akısı üzerindeki etkisi	23
Taplo(5)	Θ_2 sınır sıcaklığının $\varepsilon_1=\varepsilon_2=1, \tau_2=2$ ve $R_1/R_2=0,5$ ile boyutsuz ışımsal akısı üzerindeki etkisi	24
Taplo(6)	Şekil $\theta_2=0,5, \tau_2=1$ ve $R_1/R_2=0,5$ ile yüzey emisyonunun boyutsuz ışımsal akısı üzerindeki etkisi	25

SEMBOLLER LİSTESİ

λ : Dalga boyu

r : radyal değişkendir

Ω : ışınım yoğunluğu

τ : Kalınlık

I_λ : Radyasyon yoğunluğun

Θ_1 : İç sıcaklık

S_N : Termal emisyon ve saçılmayı açıklayan kaynak terimidir.

Θ_2 : Dış sıcaklık

η, ξ, μ : kirişin yerel yn vektörüdür

σ' : Boltzmanin sabiti

∇ : Gradyan operatörüdür

$r^2 q^*(r)$: Boyutsuz ışınım akısı

$S_{r,z}, \psi$: Birim koordinat vektörleridir

χ, σ ve β : sırasıyla absorpsiyon, saçılma ve sönüm katsayılarıdır

ε : Emisyon

$q(r)$: ışınımsal ısı akısı

$T(r)$: Sıcaklık

K : Moment order

α : açısal yoğunluklar

ω : açısal yoğunluklar

ÖZET

Radyasyon transfer denklemi (RTT), gazlarda, yarı Geçirgenlerde ve katılarda, gözenekli malzemelerde ve parçacıklı ortamlarda radyasyon transferinin analizinde merkezi Birçok bilimde rol oynayan ve mühendislik alanında önemli olan, katılımcı ortamdaki radyasyon yayılımının yönetici denklemidir. Farklı koordinat sistemleri altındaki RTE, sayısal olarak daha kararlı olan dönüştürülmüş RTE, kırılma ortamı için RTE vb. de dahil olmak üzere farklı uygulamalar için uygun farklı RTE biçimleri vardır. Bu çalışmada, küresel ortamdaki radyasyon problemlerini çözerken ayırık koordinatlar yönteminin performansını iyileştirmek için geliştirilmiş bir moment tekniği sunulmaktadır. Bu yaklaşımda, ayırıklaştırılmış 1-D ışınım transfer denkleminin açısal türev terimi, açısal momentler bazında ışınım yoğunluğunun genişlemesinden türetilir. Moment yöntemiyle ilişkili ayırık koordinatlar S_n yönteminin uygulanmasıyla elde edilen sonuçtaki diferansiyel denklemler seti, sonlu farklar algoritması ile sınır değer problemi kullanılarak sayısal olarak çözülür. Farklı bağımsız parametreler için sonuçlar sunulmuştur. Moment yaklaşımı kullanılarak elde edilen sayısal sonuçlar, kıyaslama yaklaşık çözümleri ile iyi bir şekilde karşılaştırılır. Ayrıca, yeni teknik daha yüksek dereceli S_n hesaplamalarına kolayca uygulanabilir.

Abstract

Radiative transfer equation (RTE) is the governing equation of radiation propagation in participating media, which plays a central role in the analysis of radiative transfer in gases, semitransparent liquids and solids, porous materials and particulate media, and is important in many scientific and engineering disciplines. There are different forms of RTES that are suitable for different applications, including the RTE under different coordinates systems, the transformed RTE being numerically more stable, the RTE for refractive media, etc. In this work presented to improve the performance of the discrete ordinates method when solving the radiation problems in spherical media. In this approach the angular derivative term of the discretized 1-D radiative transfer equation is derived from an expansion of the radiative intensity on the basis of angular moments. The set of resulting differential equations, obtained by the application of the discrete ordinates method S_n method associated to moment method, is numerically solved using the boundary value problem with the finite difference algorithm. Results are presented for the different independent parameters. Numerical results obtained using the moment approximation compare well with the benchmark approximate solutions. Moreover, the new technique can easily be applied to higher-order S_n calculations

Giriş

Radyasyon transferi, Pratik mühendislik problemlerinde, katılımcı medyada ışınlam aktarımı gibi birçok uygulamada (yanıcı sistemler, fırınlar ve reaktör nükleer teorisi) karşımıza çıkmaktadır. Bu sistemlerin tümü genellikle küresel sistemler olarak kabul edilebilir. Bu nedenle, aşağıdakileri içeren geometri için gibi olaylarda ışınlamsal transfer denklemini çözebilmek için güvenilir bir modele sahip olmalısınız; Ortalama absorpsiyon, emisyon ve saçılma

Bu tür ortamlarda ışınlamsal transfer denkleminin çözülmesi ile ilgilenen çalışmaların bazıları yapılmıştır. Bu çalışmalar çeşitli sayısal teknikleri (integral transformation techniques) içeriyordu [Pomraning, Siewert, 1982 ; Siewert, Thomas, 1991], spherical harmonics method [Hsin-sen Chu, Weng Ling-Chia, Tsen, 1991], Galerkin method [Jia, Yener, Cipolla, 1991] [Abulwafa, 1993] diğerleri; [viskanta, Grosbie, 1976] [Thynell, 1989].

Ayrık ordinatlar yöntemi, küresel ortamda ışınlamsal transfer denkleminin çözümünde de kullanılmıştır [Tsai, Ozisik, 1989] Bu yöntem, doğruluğu ve diğer tekniklerle uyumluluğu nedeniyle büyük popülerliğe sahiptir; [Sghaier, Sifaoui, 2000 ; Trabelsi, Sghaier, 2005] son zamanlarda [Aouled-Dlala, T, 2007] ayrık tek boyutlu ışınlımlı transfer Kullandı, denkleminin açısız türev tabirini işlemek için sonlu chebyshev dönüşümünü kullandı. [Kim, Cho, Baek, 2008] İki eşmerkezli küre arasındaki ışınlımlı ısı transferini araştırmak için birleşik sonlu hacim ve ayrık ordinatlar yöntemini kullandı

[Li, v.d, 2009] eşmerkezli küresel bir ortamda birleştirilmiş radyasyon ve iletim için bir Chebyshev kollokasyon spektral yöntemi geliştirdi

son zamanlarda, [Mishra, v.d., 2010] iletim olsun veya olmasın küresel bir ortamda ışınlam taşınımını incelemek için bir kafes Boltzmann ve modifiye edilmiş ayrık ordinatlar yöntemi kullandı.

Ayrık ordinatlar yöntemini uygulamak için, küresel koordinatlarda ışınlımlı transfer denkleminde görünen açısız türev terimine yaklaşmak gerekir. Bu terime genellikle klasik bir sonlu fark şemasıyla yaklaşılır [Modest, 2003] Bu çalışmada, bir açısız

moment tekniği kullanarak açısal türev terimini değerlendirmek için yeni bir yaklaşım sunuyoruz. Bu, ayrıık açısal türev teriminin yarı analitik bir ifadesini verir.

Radyasyon yoğunluğunun elde edilen daha yüksek momentleri, rastlanan radyasyon, net ışınımsal ısı akışı ve genelleştirilmiş "Eddington" yaklaşımı kullanılarak radyasyon basıncı cinsinden ifade edilir. Ondan dolayı, bu tür ortamlardaki radyasyon transferini incelemek için ayrıık koordinatlar yöntemini benimsiyoruz. Bu tez kapsamında yapılan çalışmada, ele alınan ortam içi boş bir küredir. Sınırlar, farklı ancak tekdüze sıcaklıklarda tutulan ve opak, gri dağınık olarak yayılan ve dağınık olarak yansıtılan olarak kabul edilen bir küredir. Elde edilen sonuçlar, standart ayrıık koordinatlar yöntemiyle verilenlerle ve literatürde bulunanlarla karşılaştırılmıştır. Matematiksel formülasyon gri ortam için verilmiştir, ancak herhangi bir absorpsiyon katsayısına dayalı gri olmayan modele genişletilmesi basitce mümkündür.

1. Radyasyon Transfer Denklemi

Bu bölümde, klasik de dahil olmak üzere ışımsal transferin denklemleri ışımsal transfer denklemi, kırılma ortamlarında ışımsal transfer denklemi ve ışımsal transfer denklemlerinin farklı varyant biçimleri tanıtılmaktadır.

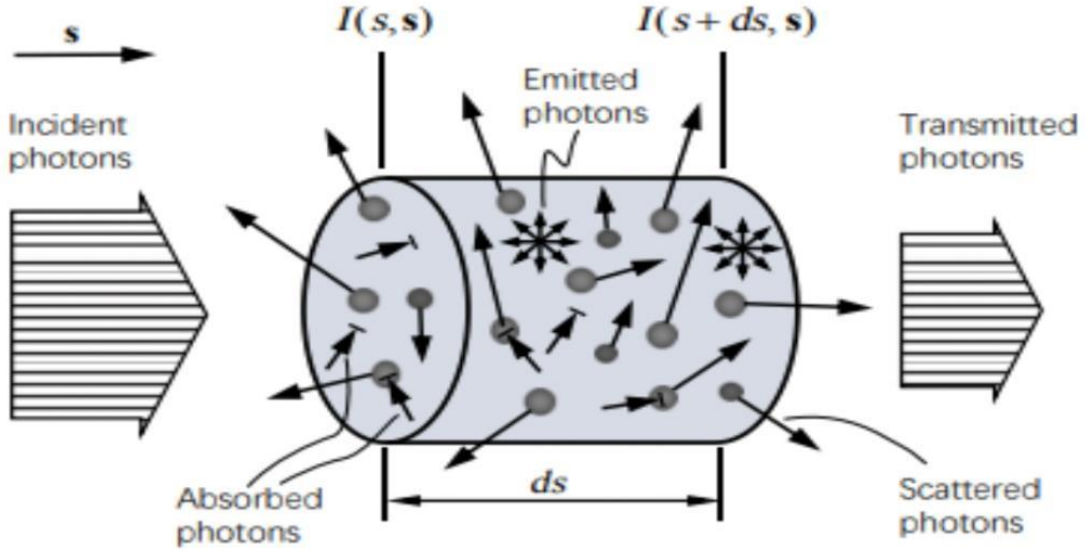
1.1. Klasik radyasyon transfer denklemi

Radyatif transferin klasik denklemi, tekdüze kırılma indisi dağılımına sahip soğurma, yayma ve saçılma ortamlarında radyasyon enerjisi taşınmasının dengesini tanımlar.

Genel olarak, ortamdaki bir ışık huzmesinin ışımsal gücü, dalga boyunun λ , aktarım yönünün ve ışımsal yoğunluğunun Ω fiziksel miktarı kullanılarak tanımlanan uzamsal konumun \mathbf{r} bir fonksiyonudur.

Dalga boyu başına ve katı açı başına birim kesit alanı başına aktarılan ışımsal gücü ifade eder. RTE, radyasyon yoğunluğunun I_λ yönetici bir denklemdir. Aşağıda, farklı koordinat sistemindeki RTE, enerji ilişkileri ve RTE'nin sayısal özellikleri sunulmaktadır. Işığın foton tanımı, RTE'nin fenomenolojik türetilmesi için yaygın olarak uygulandığı için bölüm boyunca kullanılmıştır.

Işığın gerçekten de elektromanyetik dalga olduğu ve ışımsal aktarımın titiz tanımının Maxwell denklemlerine dayanması gerektiği belirtilmelidir.



Şekil (1): Ortamda taşıma şeması

Işınım transfer denkleminin (RET) kısaca denklemi, tüm koordinatlar (küresel, silindirik ve kartezyen) için şu şekilde yazılır:

$$\Omega \cdot \nabla + \beta I = S_n \quad \dots (1)$$

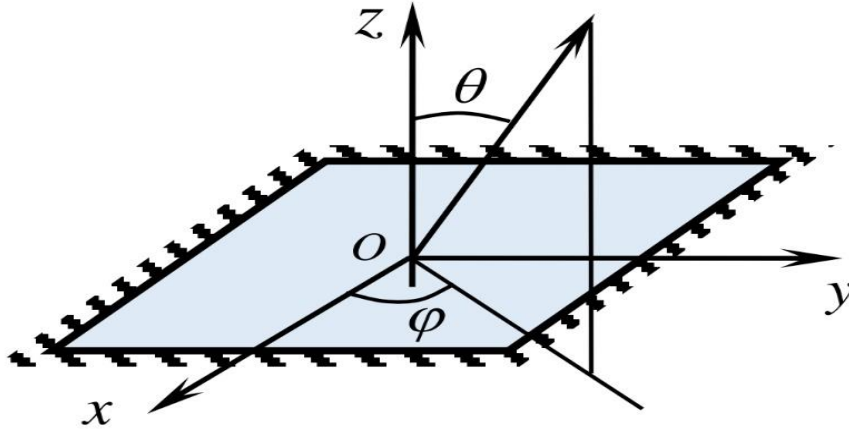
Sağ taraf (Attenuation; Zayıflama) ve soldaki (Augmentation; Büyüme); ve S_n termal emisyon ve saçılmayı açıklayan kaynak terimidir.

$$S_n = \chi I_b + \frac{\sigma}{2} \int_{-1}^1 P_{mm^*} I(R, \mu) d\mu ; \quad \Omega \cdot \nabla \text{ +s-ekseni anlatir}$$

1.2. Kartezyen koordinat sistemi formülasyonu

Kartezyen koordinat sisteminde Şekil (2) ışınım yoğunluğu $I_m(s(x, y, z), \Omega)$ şu şekilde ifade edilir:

$$\frac{dI}{ds} = \frac{dx}{ds} \frac{\partial I}{\partial x} + \frac{dy}{ds} \frac{\partial I}{\partial y} + \frac{dz}{ds} \frac{\partial I}{\partial z} \quad \dots (2)$$



Şekil (2) RTE'yi formüle etmek için tanımlanan değişkenli kartezyen sistem.

Düşünen ds bir eğri boyunca yay uzunluğu olarak, koordinat dönüşüm katsayıları

$\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$ taşıma yönünün yön kosinüsleridir $\mu i + \eta j + \xi k$, Denklem 2 aşağıdaki biçimde yazılabiliriz

$$\frac{dI}{ds} = \mu \frac{\partial I}{\partial x} + \eta \frac{\partial I}{\partial y} + \xi \frac{\partial I}{\partial z} = \Omega \cdot \nabla I \quad \dots (3)$$

Kartezyen koordinat sistemindeki RTE şu şekilde yazılabilir:

$$\begin{aligned} & \boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla I_{\lambda}(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) + \beta I_{\lambda}(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) \\ & = \chi I_{\lambda} [T(\mathbf{r})] + \frac{\sigma}{4\pi} \int I_{\lambda}(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) d\boldsymbol{\Omega} \end{aligned} \quad \dots (4)$$

\mathbf{r} radyal değişkendir, μ radyasyon yoğunluğunun $I(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega})$ yönü s ile pozitif \mathbf{r} eksenini arasındaki açının kosinüsüdür. $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, uzaysal konum vektörüdür.

Simetrisi nedeniyle, $I(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) = I(\mathbf{r}, -\boldsymbol{\Omega})$, $\boldsymbol{\Omega} = [\mu, \eta, -\xi]$ Kartezyen koordinat sistemindeki RTE şu şekilde yazılabilir:

$$\mu \frac{\partial I_{\lambda}}{\partial x} + \eta \frac{\partial I_{\lambda}}{\partial y} + \beta I_{\lambda}(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) = \chi I_{\lambda} [T(\mathbf{r})] + \frac{\sigma}{4\pi} \int I_{\lambda}(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}) d\boldsymbol{\Omega} \quad \dots (5)$$

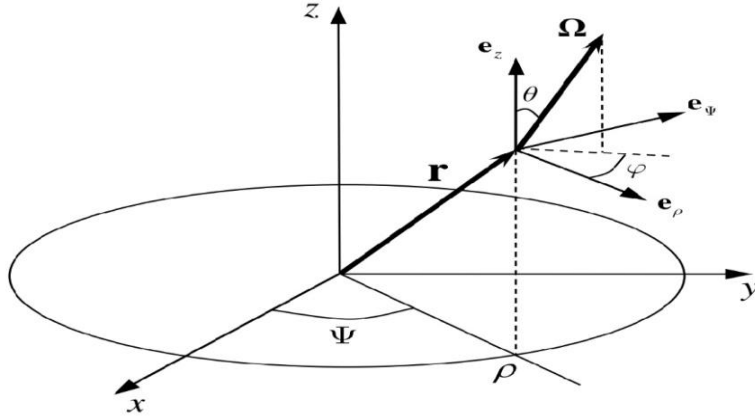
katı açısal uzayın yalnızca yarısından fazla olan açısal kareleme $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$

1.3. Diğer koordinat sistemlerinde RTE

Kartezyen koordinat sisteminin yanı sıra, silindirik ve küresel koordinat sistemi de yaygın olarak kullanılan diğer iki koordinat sistemidir. Burada bu koordinat sistemlerindeki RTE sunulmaktadır.

1.3.1. Silindirik koordinat sistemi formülasyonu

Silindirik koordinat sistemi [Şekil (3)] için akış operatörü şu şekilde yazılabilir:



Şekil (3) RTE Silindirik koordinat sistemi

$$\frac{d}{ds} = \frac{dr}{ds} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{d\Psi}{ds} \frac{\partial}{\partial \Psi} + \frac{dz}{ds} \frac{\partial}{\partial z} + \frac{d\theta}{ds} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{d\varphi}{ds} \frac{\partial}{\partial \varphi} = \boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla - \frac{\eta}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \quad \dots (6)$$

Nerde, $\boldsymbol{\Omega} = \mu \mathbf{s}_r + \eta \mathbf{s}_\psi + \xi \mathbf{s}_z$ kirişin yerel yön vektörüdür, $\mu = \sin \theta \cos \varphi$, $\eta = \sin \theta \sin \varphi$,
 $\xi = \cos \theta$,

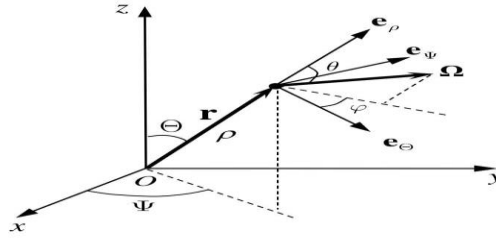
$\mathbf{s}_r, \mathbf{s}_\psi, \mathbf{s}_z$ birim koordinat vektörleridir, $\nabla = s_r \frac{\partial}{\partial r} + s_\psi \frac{\partial}{\partial \psi} + s_z \frac{\partial}{\partial z}$ Gradyan operatörüdür

Dolayısıyla silindirik koordinat sistemindeki RTE yazılabilir;

$$\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla I - \frac{\eta}{r} \frac{\partial I}{\partial \varphi} + \beta I = \kappa I_\lambda + \frac{\kappa}{4\pi} \int I_\lambda(r, \mu) \mu d\mu \quad \dots (6.1)$$

1.3.2 Küresel koordinat sistemi formülasyonu

Küresel koordinat sisteminde $(\theta, \Psi, r, \varphi, \vartheta)$ Şekil 4'te tanımlanmıştır



Şekil (4) Küresel koordinat sisteminin tanımı

$$\begin{aligned} \frac{dI}{ds} &= \frac{d\vartheta}{ds} \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \frac{d\Psi}{ds} \frac{\partial}{\partial \Psi} + \frac{dr}{ds} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{d\theta}{ds} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{d\varphi}{ds} \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ &= \boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\eta \cot \vartheta}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \quad \dots (7) \end{aligned}$$

Nerde, $\boldsymbol{\Omega} = \mu \mathbf{s}_\vartheta + \eta \mathbf{s}_\psi + \xi \mathbf{s}_r$ kirişin yerel yön vektörüdür

$\mathbf{s}_r, \mathbf{s}_\psi, \mathbf{s}_z$ birim koordinat vektörleridir, $\nabla = \mathbf{s}_\vartheta r^{-1} \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \mathbf{s}_\psi r \sin \vartheta^{-1} \frac{\partial}{\partial \psi} + \mathbf{s}_r \frac{\partial}{\partial r}$ Gradyan operatörüdür

Küresel koordinat sistemindeki RTE, konservatif olmayan formda şu şekilde elde edilebilir:

$$\begin{aligned} \Omega \cdot \nabla I &= \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial I}{\partial \theta} - \frac{\eta \cot \vartheta}{r} \frac{\partial I}{\partial \varphi} + \beta I \\ &= \kappa I_\lambda + \frac{\kappa}{4\pi} \int I_\lambda(r, \mu) \mu d\mu \end{aligned} \quad \dots (8)$$

Ve konservatif formda

$$\begin{aligned} \Omega \cdot \ddot{\nabla} I_\lambda &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(1-\mu^2)I_\lambda}{\partial \theta} - \frac{\cot \vartheta}{r} \frac{\partial \eta I_\lambda}{\partial \varphi} + \beta I_\lambda \\ &= \chi I_\lambda + \frac{\sigma}{4\pi} \int I_\lambda(r, \mu) \mu d\mu \end{aligned} \quad \dots (9)$$

Burada;

$$\ddot{\nabla} = s_\vartheta (r \sin \vartheta)^{-1} \frac{\partial \sin \vartheta}{\partial \vartheta} + s_\psi (r \sin \vartheta)^{-1} \frac{\partial}{\partial \psi} + s_r r^{-2} \frac{\partial(r^2)}{\partial r}$$

Değiştirilmiş bir gradyan operatörüdür

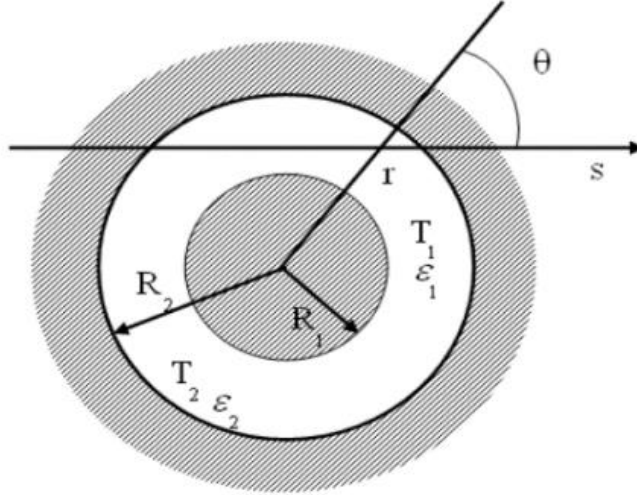
Küresel koordinat sistemindeki RTE denklem son olarak şu şekilde yazılabilir

$$\begin{aligned} \frac{\mu}{r^2} \frac{d}{dr} [r^2 I(r, \mu)] + \frac{1}{r} \frac{d}{d\mu} [(1 - \mu^2)] + \mathbf{B}I(r, \mu) \\ = \chi I_b [T(r)] + \frac{\sigma}{2} \int I(r, \mu) d\mu \end{aligned} \quad \dots (10)$$

2. RTE Denklemini küresel koordinat sistemde basitleştirme

Absorpsiyon, emisyon ve saçılma yeteneğine sahip küresel bir zarf boyunca ışınımsal aktarım denklemini şu şekildedir (Bkn Şekil (5)):

$$\begin{aligned} \frac{\mu}{r^2} \frac{d}{dr} [r^2 I(r, \mu)] + \frac{1}{r} \frac{d}{d\mu} [(1 - \mu^2)] + BI(r, \mu) \\ = \chi I_b [T(r)] + \frac{\sigma}{2} \int_{-1}^1 I(r, \mu) d\mu \end{aligned} \quad \dots (11)$$



Şekil (5):küre geometrisi ve gösterimler

2.1. Küresel koordinat sisteminde RTE'nin sınır koşulu

Sınır duvarlarındaki içeri akış ışıma yoğunluğu, RTE'nin çözümünden önce ayarlanmalıdır. Genel olarak konuşursak, sınır duvarlarında yayılan ışıma yoğunluğuna üç süreç, yani emisyon, yansıma ve iletim katkıda bulunur. Yayılan yayan ve yansıtan opak bir duvar için sınır koşulu şu şekilde yazılabilir:

$$I(R_1, \mu) = \varepsilon_1 I_{b,1} + 2 (1 - \varepsilon_1) \int_0^1 I(R_1, -\mu^*) |\mu^*| d\mu^* ; \quad \mu > 0 \quad \dots (12a)$$

$$I(R_2, \mu) = \varepsilon_2 I_{b,1} + 2 (1 - \varepsilon_2) \int_0^1 I(R_2, -\mu^*) |\mu^*| d\mu^* ; \quad \mu < 0 \quad \dots (12b)$$

Denklemler (11), (12a) ve (12b)de r radyal değişkendir, μ radyasyon yoğunluğunun $I(r, \mu)$ yönü s ile pozitif r eksenine arasındaki açının kosinüsüdür. χ , σ ve β sırasıyla absorpsiyon, saçılma ve sönüm katsayılarıdır ve bunlar şu şekilde ilişkilidir:

$$B = \chi + \sigma \quad \dots (13)$$

Kara cisim radyasyonu sıcaklıkla ilişkilidir $T(r)$

$$I_b = \frac{n^2 \sigma T^4(r)}{\pi} \quad \dots (14)$$

Burada n kırılma indisini ve σ Stefan Boltzmann sabitini gösterir. Eşitlik 12a ve 12b de ε , opak sınırların izotropik yayıcılığıdır. **1** ve **2** alt simgeleri **1'deki** sınırları ifade eder.

2.2. Fark Şeması

Radyasyon transfer denkleminin ayrık formu, Denklem(2)'i ayrık yönlerin her birinde değerlendirilerek ve integrali sayısal kareleme ile değiştirilerek elde edilir.

$$\frac{\mu}{r^2} \frac{d}{dr} [r^2 I(r, \mu)] + \frac{1}{r} \frac{d}{d\mu} [(1 - \mu^2) I(r, \mu)] + \beta I(r, \mu) = \kappa I_b [T(r)] \frac{\sigma}{2} \sum_1^M w_m I_m$$

... (15)

Sınır koşullarının ayrık ordinat gösterimi;

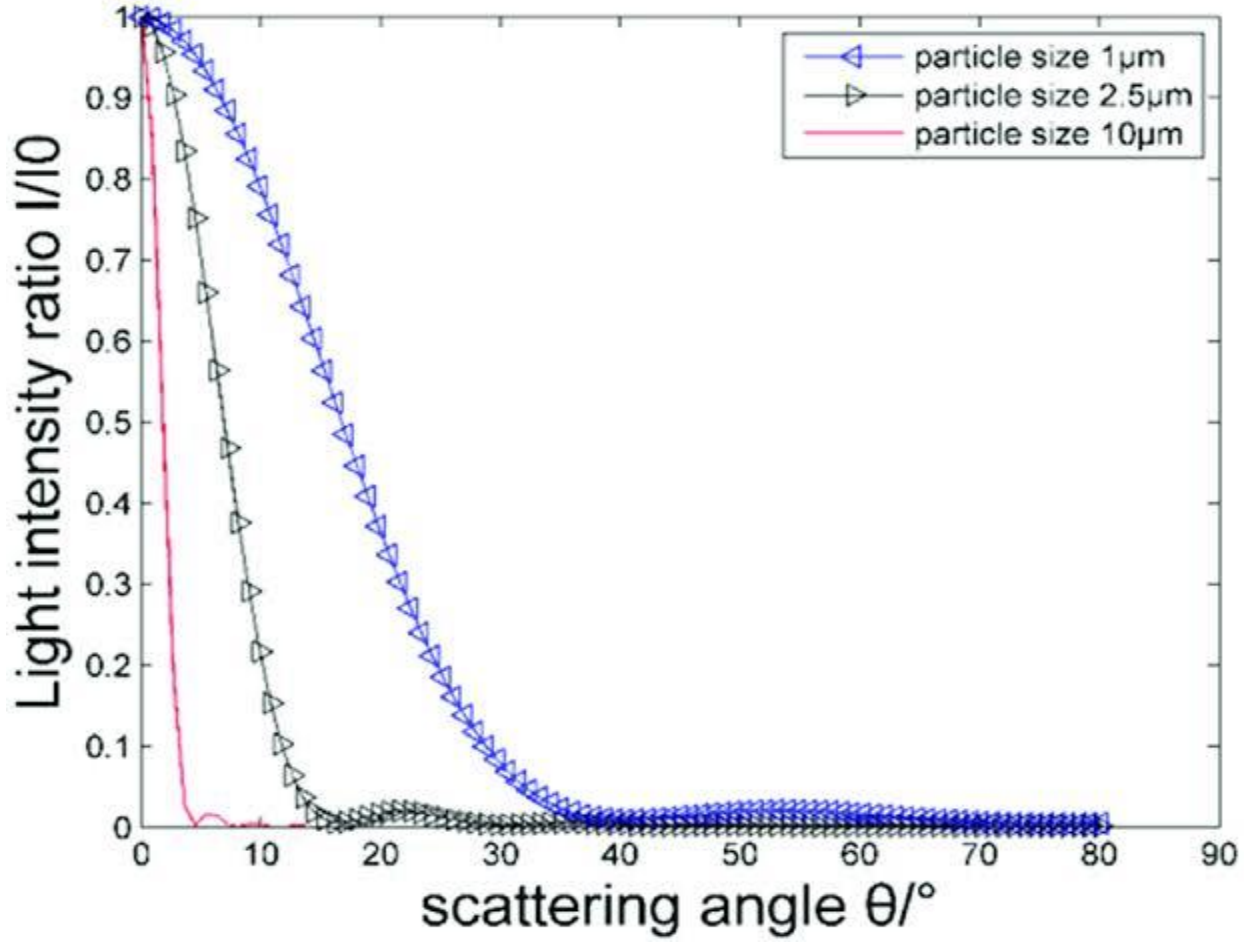
$$I_m(R_1) = \varepsilon_1 I_{b1} + 2(1 - \varepsilon_1) \sum_1^M w_m' I_m' |\mu|_{m'} \quad ; \quad \mu > 0 \quad (16a)$$

$$I_m(R_2) = \varepsilon_2 I_{b2} + 2(1 - \varepsilon_2) \sum_1^M w_m' I_m' \mu_{m'} \quad ; \quad \mu < 0 \quad (16b)$$

burada m ve m' alt simgeleri ayrı yönlere atıfta bulunur,

$$\frac{d}{d\mu} [(1 - \mu^3) I] \approx \frac{\alpha_{m+1/2} I_{m+1/2} - \alpha_{m-1/2} I_{m-1/2}}{w_m} ; \quad \mu = \mu_m \quad \dots (17)$$

$I_{m+1/2}$, $I_{m-1/2}$ yönlerdeki açısal yoğunluklar $\alpha_{m-1/2}$, $\alpha_{m+1/2}$ sabitleri yalnızca fark alma şemasına bağlıdır ve bu nedenle bunlar, Modest tarafından açıklandığı gibi bir izotropik yoğunluk alanı durumu incelenerek belirlenebilir [Modest, 2003].



Şekil (6) Fark şeması

Kavisli geometriler söz konusu olduğunda, fark alma şeması iki açısal değişken sunar; $I_{m+1/2}$, $I_{m-1/2}$. Her boşluk pozisyonunda belirlenmelidirler r . Bu amaçla, $I_{m+1/2}$, $I_{m-1/2}$ ilişkilendirmek için “Standart elmas fark yaklaşımı” kullanılır, yani

$$I_m = \frac{1}{2} \left[I_{m+1/2} + I_{m-1/2} \right] \quad \dots (18)$$

Ortalama açısal yoğunluğun I_m hesaplanmasında başlangıç yoğunluğuna $I_{1/2}$ ihtiyacımız var. Küresel geometri için, başlangıç yönü kosinüsü ile transfer denkleminin çözümünden elde edilir ; $\mu =1$, aşağıda açısal moment eşitliğine dayanan alternatif bir teknik geliştiriyoruz. Her iki yaklaşımın sonuçları karşılaştırılacaktır.

2.2. Moment yönteminde RTE

Açısal türev terimine yaklaşmak için yeni bir yaklaşım geliştiriyoruz

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, \mu) = \frac{d}{d\mu} [(1 - \mu^2) \mathbf{I}(\mathbf{r}, \mu)] \quad \dots (19)$$

$\mathbf{D}(\mathbf{r}, \mu)$ 'nin k dereceli momentini tanımlayarak başlıyoruz.

$$\mathbf{D}^k(\mathbf{r}) = \int_{-1}^1 \mathbf{D}(\mathbf{r}, \mu) \mu^k d\mu \quad \dots (20)$$

Açısal moment tekniğinin, $\mathbf{D}(\mathbf{r}, \mu)$ ile gösterilen açısal türev terimine uygulanması

$$\int_{-1}^1 \mathbf{D}(\mathbf{r}, \mu) \mu^k d\mu = k \int_{-1}^1 \mathbf{I}(\mathbf{r}, \mu) \mu^{k+1} d\mu - k \int_{-1}^1 \mathbf{I}(\mathbf{r}, \mu) \mu^{k-1} d\mu \quad \dots (21)$$

Işınım yoğunluğunun momentleri, $n=0$, $n=1$ ve $n=2$ durumu için gelen ışınımın, ışınım akısının ve ışınım basıncının olağan tanımını azaltan geliştirilmiş bir gelen ışınımı temsil eder. Işınım yoğunluğunun elde edilen daha yüksek momentleri daha genel **Eddington yaklaşımı** kullanılarak gelen ışınım, net ışınım akısı ve ışınım basıncı cinsinden ifade edilir.

Açısal türev terimini elde etmek için, yön üzerindeki integraller, ayrık formla değiştirilir,

$$\int_{-1}^1 \mathbf{D}(\mathbf{r}, \boldsymbol{\mu}) d\boldsymbol{\mu} \cong \sum_{m=1}^M \omega_m \mathbf{D}(\mathbf{r}, \boldsymbol{\mu}) \quad \dots (22)$$

Burada dörtde bir ağırlıklar ω_m (quadrature weights) yönlerle ilişkilidir. Böylece denklemi şu şekilde yazabiliriz;

$$\sum_{m=1}^M \omega_m \mathbf{D}_m \boldsymbol{\mu}_m^k = k \sum_{m=1}^M \omega_m \mathbf{I}_m \boldsymbol{\mu}_m^{k+1} - k \sum_{m=1}^M \omega_m \mathbf{I}_m \boldsymbol{\mu}_m^{k-1} \quad \dots (23)$$

Şimdi, açısal türev terimleri $\mathbf{D}(\mathbf{R})$ $k=1, M-1$ için yazılan Denklem (2)'den elde edilir.

$$\sum_{m=1}^M \omega_m \mathbf{D}_m = \mathbf{0} \quad \dots (24)$$

Böylece bilinmeyenler D_m doğrusal bir cebirsel sistemin çözümüdür $A d = b$;

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \dots & \mathbf{1} \\ \mu_1^1 & \mu_2^1 & \dots & \mu_M^1 \\ \mu_1^{M-1} & \mu_2^{M-1} & \dots & \mu_M^{M-1} \end{bmatrix} \quad \dots (25a)$$

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} w_1 D_1 \\ w_2 D_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ w_M D_M \end{bmatrix} \quad \dots (25b)$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ (M-1) \sum_{m=1}^M w_m I_m \mu_m^M - (M-1) \sum_{m=1}^M w_m I_m \mu_m^{M-2} \end{bmatrix} \quad (25c)$$

açısal türev terimi \mathbf{D}_m bu şekilde yazabiliriz;

$$\mathbf{D}_m = \frac{1}{w_m} \sum_{k=1}^M \mu_m^{-k} \mathbf{B}_k \quad \dots (26)$$

$$\mathbf{B}_k = k \sum_{m=1}^M w_m \mathbf{D}_m \mu_m^{k+1} - k \sum_{m=1}^M w_m \mathbf{D}_m \mu_m^{k-1} \quad \dots (27)$$

Her seçenekte, radyasyonun içeriye doğru yayılımlı kalması için her birinin değeri k, m olmalıdır; $1 \leq m \leq M, 1 \leq k \leq M-1$

Sonlu sayıda ayrık koordinat için Denklem 1'in yeni ayrık koordinat gösterimi yazılabilir

$$\frac{\mu_m}{r^2} \frac{d}{dr} [r^2 \mathbf{I}_m] + \frac{1}{r} \frac{1}{w_m} \sum_{k=1}^M (\mu_m^{-k})_m \mathbf{B}_k + \beta \mathbf{I}_m \chi \mathbf{I}_b [\mathbf{T}(\mathbf{r})] + \frac{\sigma}{2} \sum_{m=1}^M w_m \mathbf{I}_m \quad ;$$

$$\mathbf{m}=1, M \quad \dots (28)$$

Denklemin sınır koşulu (17) ;

$$\mathbf{I}_m(\mathbf{R}_1) = \varepsilon_1 \mathbf{I}_{b,1} + 2(1-\varepsilon_1) \sum_1^M w_m I_m |\mu|_m \quad ; \mu > 0 \quad \dots (29a)$$

$$\mathbf{I}_m(\mathbf{R}_2) = \varepsilon_2 \mathbf{I}_{b,2} + 2(1-\varepsilon_2) \sum_1^M w_m I_m \mu_m \quad ; \mu < 0 \quad \dots (29b)$$

3. Radyasyon ısı akışı

Yönlü yoğunluklar bilindikten sonra I_m , ortamdaki ışınımsal $q(r)$ ısı akısı ve gelen ışınım enerjisi $G(r)$ aşağıdaki tanımlarından belirlenir;

$$q_r(\mathbf{r}) = 2\pi \int_{-1}^1 I(\mathbf{r}, \mu) \mu \, d\mu = 2\pi \sum_{m=1}^M \mu_m w_m I_m \quad \dots (30)$$

Boyutlu küresel bir ortamda radyasyon problemi için eksiksiz matematiksel formülasyon sağlar. Sayısal teknik, yani sonlu farklarla sınır değer problem çözmek kullanılmıştır, yeni Teknik (DOM) teknoloji $n=8$ boyutlu olarak isimlendirilmiştir. Ağırlıklar ve kareleme noktaları, karşılık gelen Gauss karelemeleridir.

4. RTE'nin sayısal özellikleri

Tablo 1'de, saf ışıma geçişine tabi dağınık yayan ve yansıtan sınırları olan iki eşmerkezli küre arasındaki bir radyasyon problemi için $r^2q(r)$ nin sayısal değerlerini veriyoruz. Yeni teknikten elde ettiğimiz sonuçları başka yöntemlerle Karşılaştırdık. $r_1^* = 0.5$, $\tau_2 = 1$, ve sınır emisyon değerlerinin çeşitli kombinasyonları için sonuçlar sunduk ϵ_1, ϵ_2 . Ortamdaki net ışımsal ısı akısı daha az olur. Dış küre sıcaklığının farklı değerleri için θ_2 .

Tablo 2'de, bir radyasyon problemi için 1. dereceden moment, iç küre sıcaklığı $\theta_1 = 1$ ve dış küre sıcaklığı $\theta_2 = 0$ ve sırasıyla iç ve dış küre $\tau_1 = \beta R_1, \tau_2 = \beta R_2$ farklı optik kalınlıkları için sayısal değerleri sunuyoruz. Sonuçlar diğerleri ile karşılaştırılmıştır

Optik kalınlıkta bir artış $\tau_2 = \beta R_2$, ortam daha yoğun hale gelir, ayrıca Şekil 7'de gösterildiği gibi ortamdaki net ışımsal ısı akışı azalır.

Optik kalınlık $\tau_2 = 2, \theta_2 = 0.5$ ve siyah sınırlar için, R_1/R_2 oranının ışımsal ısı akısı üzerindeki etkileri Şekil 8'te gösterilmektedir. R_1/R_2 oranının artmasıyla ortam düzlemsel olma eğilimi gösterir ve ışımsal ısı akısı sabit hale gelir.

Şekil 9, dış küre sıcaklığının ışımsal ısı akışı dağılımı üzerindeki etkisini göstermektedir. Dış küre ısındığında, net ışımsal ısı akısı işaret değiştirir ve negatif olur.

Şekil 10'te, iç ve dış kürenin yayma gücünün ışımsal ısı akışı dağılımı üzerindeki etkisini inceliyoruz. Bu çalışma için $\tau_2 = 1, \theta_2 = 0.5$ ve $R_1/R_2 = 0.5$. İç küre daha fazla yansıttığında, net ışımsal ısı akısının daha az olduğu gözlenir

Tablo (1) Çeşitli $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ kombinasyonları için $rq(r)$ değerleri ($r_1^* = 0.5, \theta_2 = 0.5, \tau_2 = 1$)

ε_1	ε_2	θ_2	Boyutsuz Radyasyon [Kim v.d, 2008]	Boyutsuz Radyasyon [Zhao, v.d, 2007]	Boyutsuz Radyasyon [Zhang, v.d, 2012]	Bu tez
1	1	0.5	0.21733	0.21733	0.21038	0.2122
0.5	1	0.5	0.11312	0.11312	0.1108	0.1124
1	0.5	0.5	0.17281	0.172881	0.1718	0.1712
0.5	0.5	0.5	0.09977	0.09977	0.0991	0.09986
1	1	2	-3.47938	-3.47938	-3.36557	-3.3656
0.5	1	2	-1.7998	-1.7998	-1.77357	-1.7661
1	0.5	2	-2.816	-2.816	-2.7488	-2.7828
0.5	0.5	2	-1.6158	-1.6158	-1.58604	-1.5835

Tablo (2) İç yüzeydeki net ışımsal ısı akısı izotropik olay ve $\omega=1$

τ_1	τ_2	REF [Kim v.d, 2008]	REF [Zhao, v.d, 2007]	REF [Zhang, v.d, 2012]	Bu tez
0.5	1	0.11221	0.1122	0.1122	0.11214
0.9	1	0.38305	0.3831	0.38308	0.39111
0.95	1	0.4365	0.4366	0.4366	0.4568
1	10	----- --	----- --	0.00343	0.00338
5	10	----- --	----- --	0.04793	0.4797
9	10	----- --	----- --	0.24606	0.2635

Tablo(3) τ_2 optik kalınlığının $\varepsilon_1=\varepsilon_2=1$, $\theta_2=0,5$ ve $R_1/R_2=0,5$ ile boyutsuz ışınlım akısı üzerindeki etkisi.

$\frac{r - R_1}{R_2 - R_1}$	$\tau = 10$	$\tau = 5$	$\tau = 2$
	Boyutsuz ısı akışı (q^*)	Boyutsuz ısı akışı (q^*)	Boyutsuz ısı akışı (q^*)
0	0.36	0.55	0.75
0.1	0.30	0.46	0.66
0.2	0.27	0.40	0.54
0.3	0.24	0.36	0.48
0.4	0.20	0.31	0.40
0.5	0.18	0.28	0.37
0.6	0.16	0.24	0.33
0.7	0.14	0.21	0.30
0.8	0.12	0.19	0.26
0.9	0.11	0.17	0.23
1	0.10	0.15	0.20

Tablo (4) R_1/R_2 oranının $\varepsilon_1=\varepsilon_2=1$, $\theta_2=0,5$ ve $\tau_2=2,0$ ile boyutsuz ışınlım akışı üzerindeki etkisi.

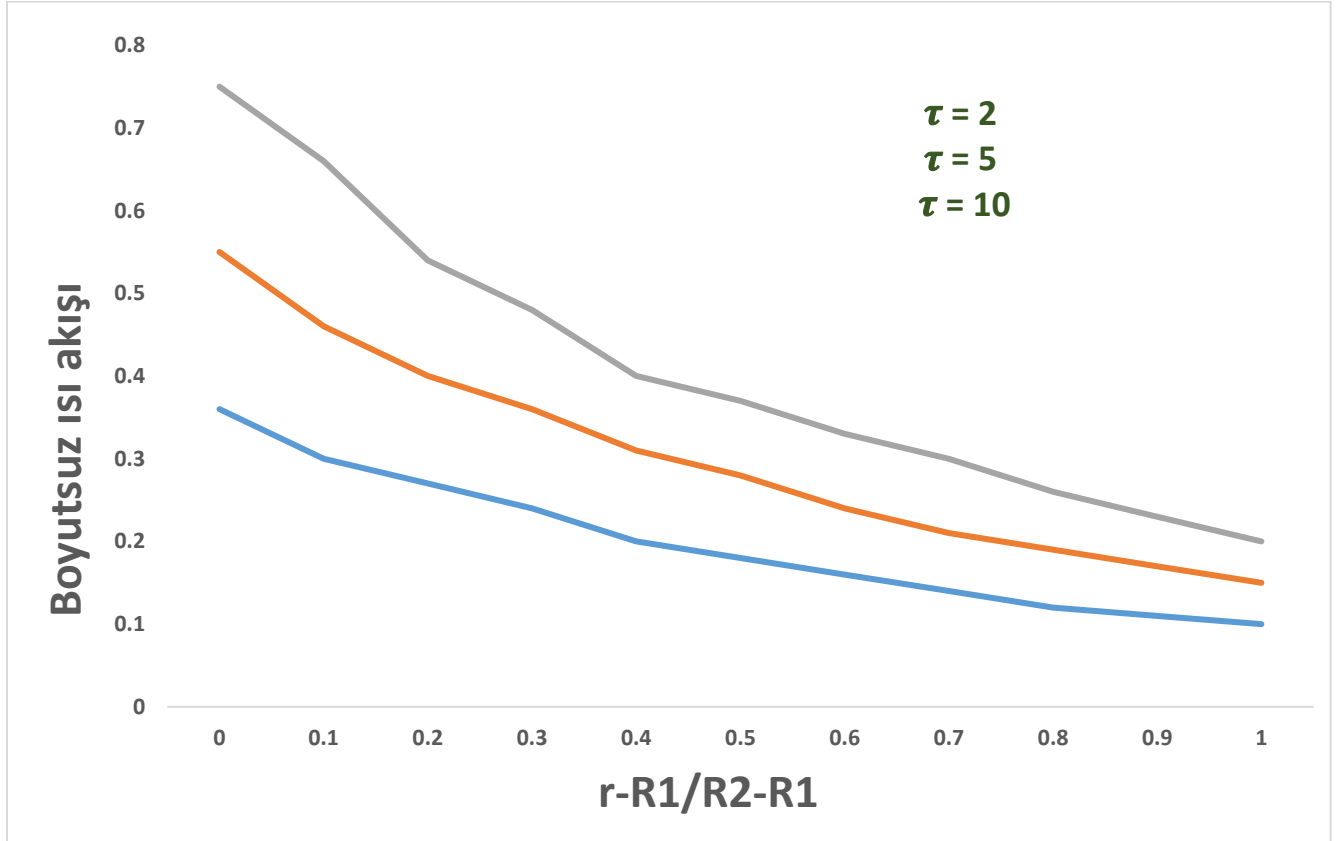
$\frac{r - R_1}{R_2 - R_1}$	$\tau = 10$	$\tau = 5$	$\tau = 2$
	Boyutsuz ısı akışı	Boyutsuz ısı akışı	Boyutsuz ısı akışı
	(q^*)	(q^*)	(q^*)
0	0.8800	0.800	0.75
0.1	0.2600	0.450	0.63
0.2	0.1200	0.340	0.54
0.3	0.1000	0.270	0.48
0.4	0.0700	0.200	0.40
0.5	0.0300	0.150	0.35
0.6	0.0180	0.120	0.31
0.7	0.0110	0.100	0.26
0.8	0.0090	0.099	0.22
0.9	0.0088	0.095	0.18
1	0.0080	0.091	0.16

Tablo (5) Θ_2 sınır sıcaklığının $\varepsilon_1=\varepsilon_2=1$, $\tau_2=2$ ve $R_1/R_2=0,5$ ile boyutsuz ışıma akısı üzerindeki etkisi

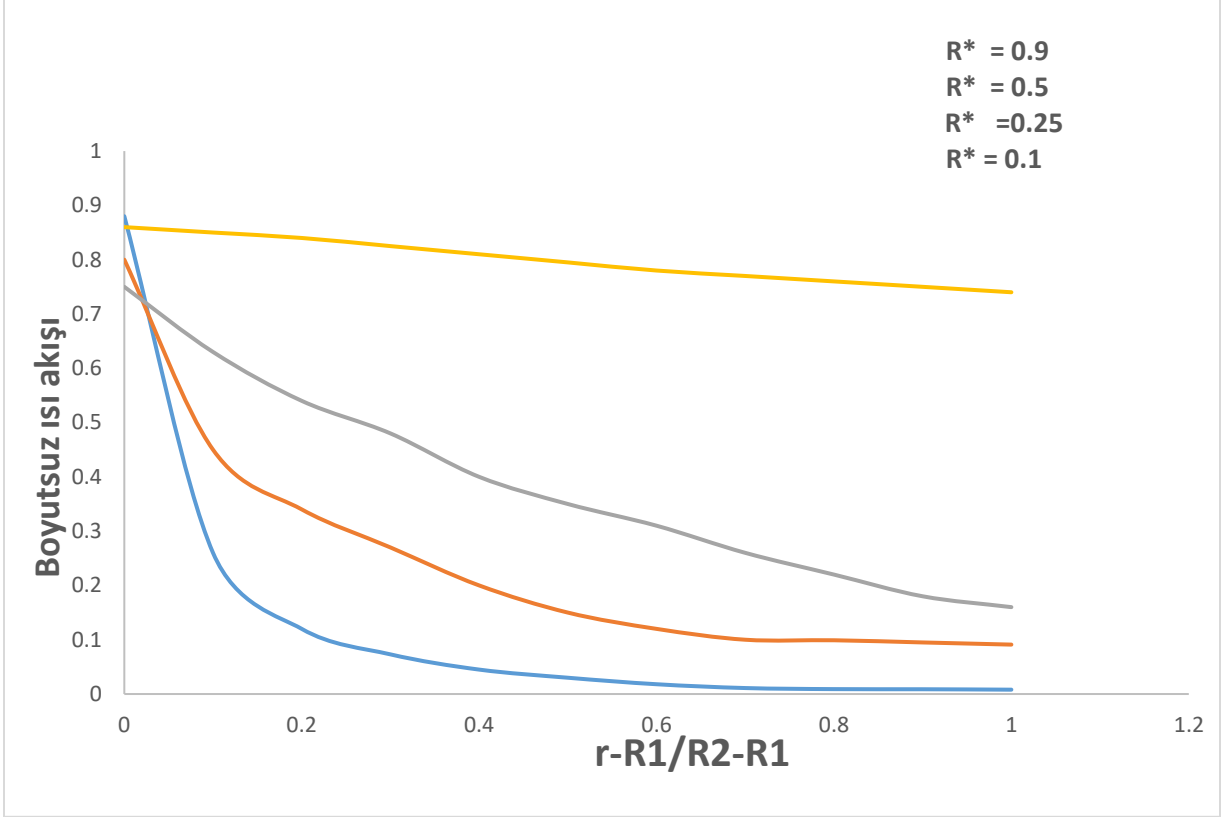
$\frac{r - R_1}{R_2 - R_1}$	$\tau = 10$	$\tau = 5$	$\tau = 2$
	Boyutsuz ısı akışı	Boyutsuz ısı akışı	Boyutsuz ısı akışı
	(q^*)	(q^*)	(q^*)
0	-12.0	-3.300	0.85
0.1	-10.2	-2.800	0.75
0.2	-8.70	-2.220	0.65
0.3	-7.50	-2.121	0.55
0.4	-6.70	-1.981	0.45
0.5	-5.75	-1.752	0.35
0.6	-4.90	-1.520	0.27
0.7	-4.30	-1.456	0.20
0.8	-3.90	-1.315	0.16
0.9	-3.30	-1.180	0.09
1	-3.01	-1.018	0.05

Tablo(6) $\theta_2=0,5$, $\tau_2=1$ ve $R_1/R_2=0,5$ ile yüzey emisyonunun boyutsuz ışınlım akısı üzerindeki etkisi

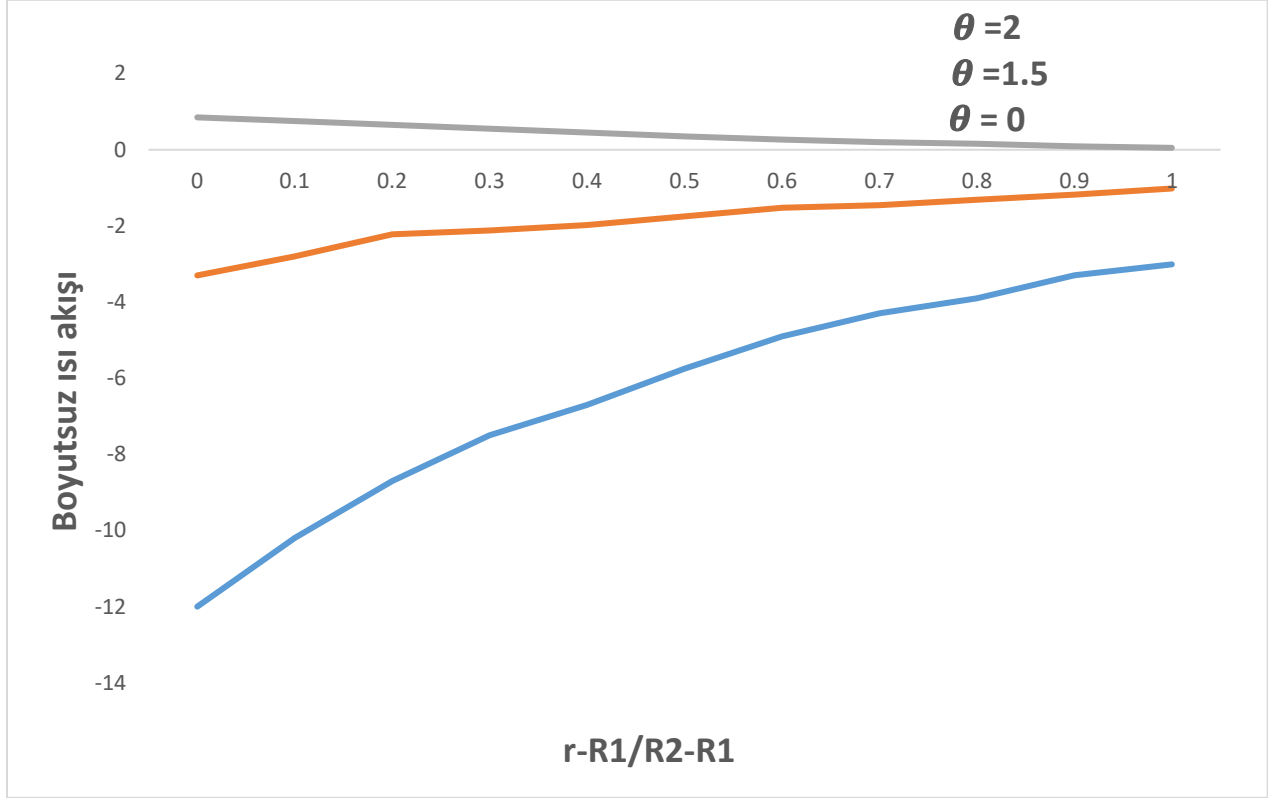
$\frac{r - R_1}{R_2 - R_1}$	$\tau = 10$	$\tau = 5$	$\tau = 2$
	Boyutsuz ısı akışı	Boyutsuz ısı akışı	Boyutsuz ısı akışı
	(q^*)	(q^*)	(q^*)
0	0.780	0.4000	0.452
0.1	0.714	0.3470	0.389
0.2	0.651	0.2900	0.340
0.3	0.588	0.2390	0.301
0.4	0.520	0.2150	0.270
0.5	0.501	0.1800	0.231
0.6	0.470	0.1790	0.199
0.7	0.411	0.1420	0.174
0.8	0.390	0.1260	0.78
0.9	0.354	0.1170	0.146
1	0.34	0.1011	0.132



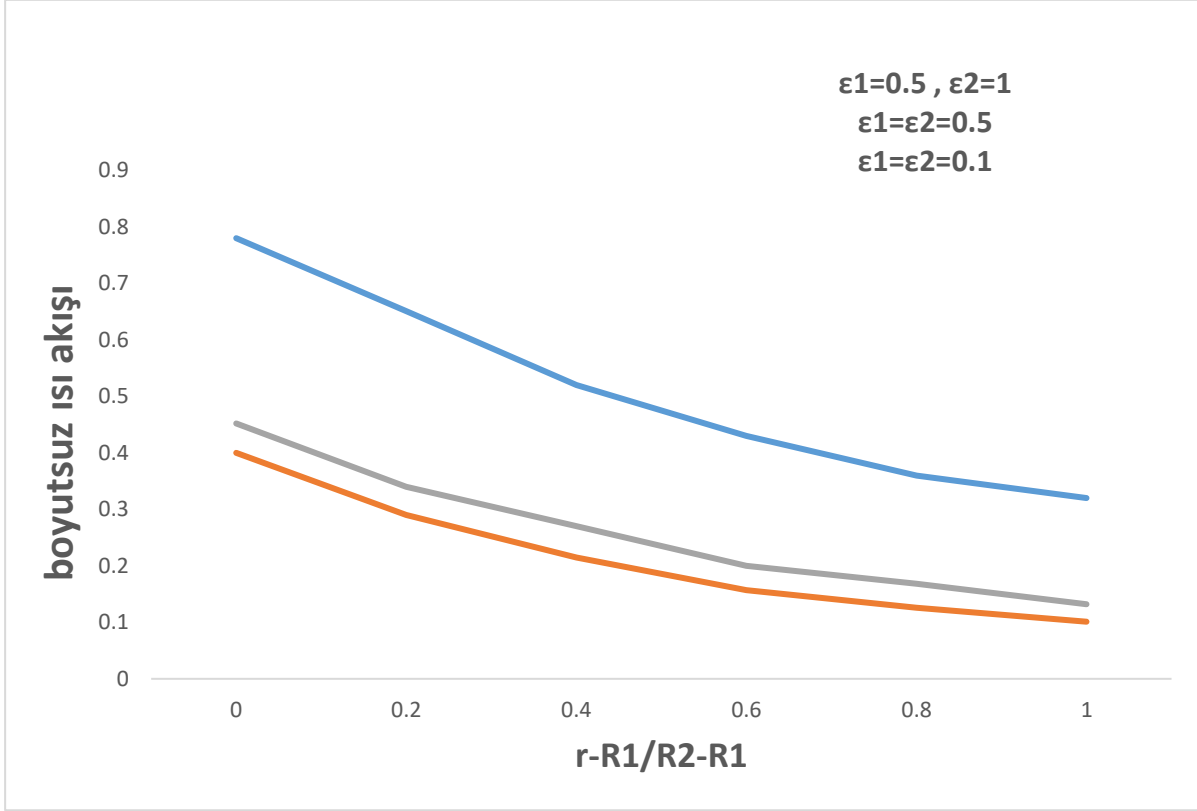
Şekil (7) τ_2 optik kalınlığının $\epsilon_1=\epsilon_2=1$, $\theta_2=0,5$ ve $R_1/R_2=0,5$ ile boyutsuz ışınlım akışı üzerindeki etkisi.



Şekil (8) R_1/R_2 oranının $\varepsilon_1=\varepsilon_2=1$, $\theta_2=0,5$ ve $\tau_2=2,0$ ile boyutsuz ışıma akışı üzerindeki etkisi.



Şekil (9) Θ_2 sınır sıcaklığının $\varepsilon_1=\varepsilon_2=1$, $\tau_2=2$ ve $R_1/R_2=0,5$ ile boyutsuz ışıma akısı üzerindeki etkisi



Şekil (10) $\theta_2=0,5$, $\tau_2=1$ ve $R_1/R_2=0,5$ ile yüzey emisyonunun boyutsuz ışıınım akısı üzerindeki etkisi

5. Sayısal hatalar ve doğruluk geliştirme stratejileri

Tüm sayısal yöntemler sayısal hatalardan mustarıptır. Monta Carlo (MC) yöntemi istatistik hatalarından muztaripken, Ayırık ordinat method (DOM), sonlu hacim method (FVM), sonlu eleman method (FEM) uzay ve açısıl ayırıklaştırma hatalarından mustarıptır. Gerçek uygulamalardaki önemli önemi nedeniyle, RTE'yi çözmek için sayısal hatalar birçok araştırmacının ilgisini çekmiştir.

5.1. Ayırık ordinat method (DOM) sayısal hataları

"Yanlış saçılma" ve "ışın etkileri", DOM'un sayısal sonuçlarında gözlemlenen sayısal hataların özelliklerini tanımlayan terimlerdir. Kelimenin tam anlamıyla, 'yanlış saçılma', genellikle sayısal yayılmaya eşdeğer olduğu düşünülen saçılma gibi davranan sayısal hatanın etkisi anlamına gelir. 'Işın etkileri', ışınım yoğunluğunun sürekli açısıl değişimini yaklaşık olarak tahmin etmek için farklı sayıda yönlerin kullanılmasına atfedilen, sayısal sonuçlarda görünen fiziksel olmayan tümseği ifade eder.

Hata fenomeninin kaynağını anlamak için hataların kaynağını analiz etmek gerekir. RTE'nin DOM ayırıklaştırması ve ısı akışı ve olay radyasyonunun hesaplanması dikkatlice kontrol edilerek, üç ana hata kaynağı tanımlanabilir:

- 1- Fark şemasından hata; uzamsal alanda diferansiyel operatörün ayırıklaştırılması ile ilgili olan
- 2- Saçılma teriminin ayırıklaştırılmasından kaynaklanan hata; açısıl alanda bir integral operatörün ayırıklaştırılmasıyla ilgili olan
- 3- Isı akısı veya gelen radyasyonun hesaplanmasından kaynaklanan hata; başka bir integral operatörün ayırıklaştırılmasıyla ilgili olan

Ortam saçılmasa bile görüneceğinden, üçüncü kaynağın ikinci kaynaktan belirgin şekilde farklı olduğuna dikkat edin. Bu üç hata kaynağının etkisi nedir? Bu üç hata kaynağının 'yanlış saçılma' ve 'ışın etkileri' ile ilişkisi nedir? Bunlar aşağıdaki bölümlerde tartışılacaktır.

5.2. Fark şemasından kaynaklanan hata

RTE'nin ayrık ordinat denkleminde diferansiyel operatörü ayrıklaştırmak için bir fark alma şeması gereklidir. X-yönü için şu şekilde ayrıklaştırılabileceğini varsayarsak:

$$\mu_m \frac{\partial I_m}{\partial x} \approx \mu_m \frac{I_m(x) - I_m(x-\Delta x)}{\Delta x} \quad \dots (31)$$

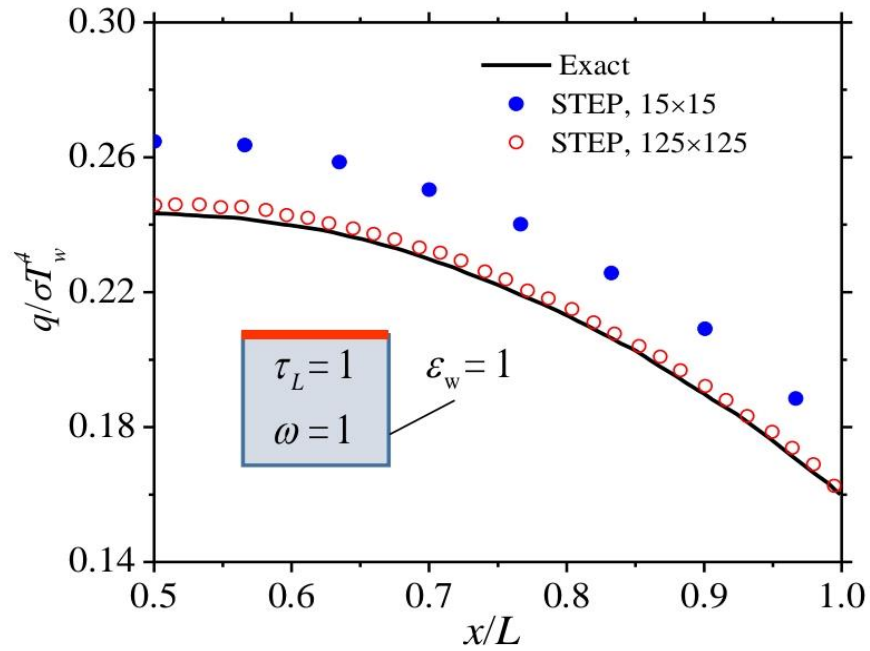
Taylor açılımını kullanarak, yukarıdaki ayrıklaştırmanın sağ tarafı şu şekilde yazılabilir:

$$\begin{aligned} & \mu_m \frac{I_m(x) - I_m(x-\Delta x)}{\Delta x} \\ &= \mu_m \frac{\partial I_m}{\partial x} + \left[\frac{1}{2} \mu_m \Delta x \right] \frac{\partial^2 I_m}{\partial x^2} + \mathcal{O}(\Delta x^2) \quad \dots (32) \end{aligned}$$

Görüldüğü gibi, difüzyon katsayısına sahip ek bir difüzyon terimi (ikinci dereceden terim) belirir. $\mu \Delta x / 2$. Bahsettiğimiz gibi, difüzyon katsayısına sahip ek bir difüzyon terimi (ikinci dereceden terim) belirir.

Bu sayısal difüzyon, ısı iletim işlemine benzer şekilde yüksek yoğunluklu bölgeden düşük yoğunluklu bölgeye ek ışınımlı ısı akısı aktarımı yaparak ışınımsal yoğunluk dağılımını yumuşatır. Saçılma işleminden önemli ölçüde farklıdır, örneğin, yalnızca bir yöndeki ışınımsal akıyı bulaştırırken, saçılma işlemi genellikle enerjiyi bir yönden başka bir yöne aktarır. Bu nedenle, bu hatanın sayısal yayılma olarak adlandırılması tercih edilir.

Şekil (11) verilerin Coelho tarafından yapılan çalışmadan çıkarıldığı kaba ızgara (15x15) ve ince ızgarada (125x125) adım şemasıyla DOM tarafından çözülmüş ısı akışını gösterir. Açısal ayrıklaştırma son derece iyidir, dolayısıyla açısal ayrıklaştırma hatasının etkisi ihmal edilebilir ve yalnızca sayısal difüzyonun etkisi gözlenir. Kaba ızgarada, büyük sayısal yayılma görülür ve ısı akısı değeri her zaman tam değerden daha büyüktür, bu da yukarıda sunulan analizle uyumludur.

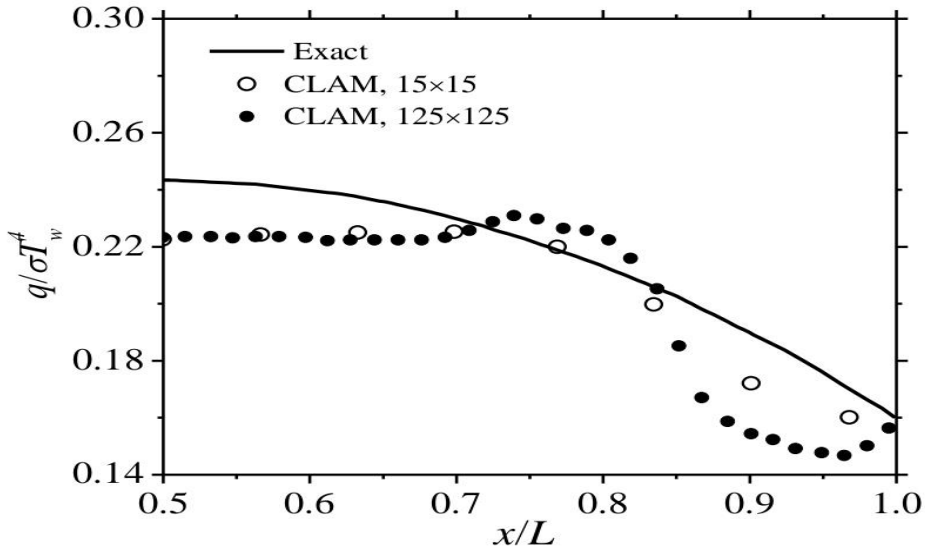


Şekil (11) Sayısal difüzyon ve ışın etkilerini göstermek için alt duvar boyunca gelen ısı akışı $N_\theta = N_\phi$

5.3. Isı akısı hesaplamasında hata

Işın etkileri fenomeni, ısı akısı dağılımının fiziksel olmayan çarpma hata modeli içermesidir; Şekil (12). Esas olarak, ortamın sınır koşullarında, sıcaklık dağılımında veya ışıma özelliklerinde keskin gradyanlar veya süreksizlikler olduğunda DOM'un çözüm doğruluğunu etkiler. Işın etkilerinin esas olarak açısal ayrıklaştırmaya dayandığı gösterilmiştir.

Şekil (12) de CLAM şeması tarafından bir sıra (15x15) ve ince (125x125) uzamsal ızgarada çözülen alt duvar boyunca ısı akışı dağılımını gösterir, açısal dörtlü için yaklaşım kullanılır. CLAM şemasının ikinci dereceden doğru ve sınırlı salınımsız bir şema olduğu bilinmektedir. Bununla birlikte, ince ızgara için bile, bu uzamsal ayrıklaştırmaların yeterince doğru olduğu kabul edilir. ısı akısı dağılımında hala güçlü fiziksel olmayan tümsek modelleri var.

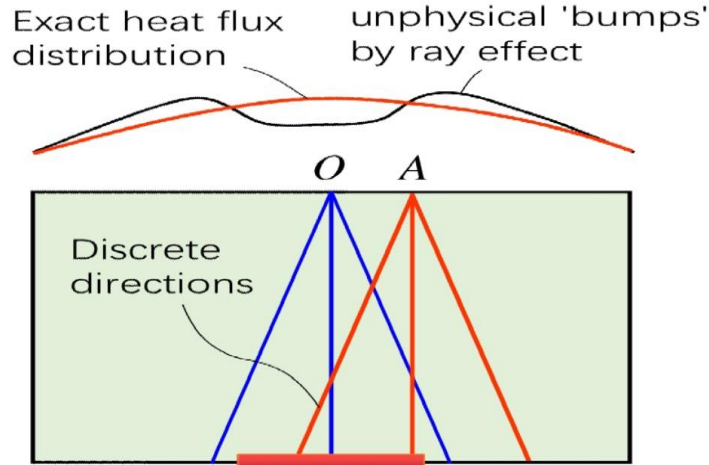


Şekil (12) Sayısal difüzyon ve ışın etkilerini göstermek için alt duvar boyunca gelen ısı akışı

Bu nedenle, tümsek örüntüsündeki sayısal hata, ayırıklaştırma ile ilgisizdir. Ayrıca, ısı akısı dağılımında yer alan bu tür çarpma desenleri, saçılma olmaksızın ortam için hala mevcuttur. Bu nedenle, saçılma terimindeki hataya atfedilemez. Aynı kökeni vardır. Burada, sayısal hatanın çıkıntı paterni, yanlış ısı akışı hesaplamasına atfedilir.

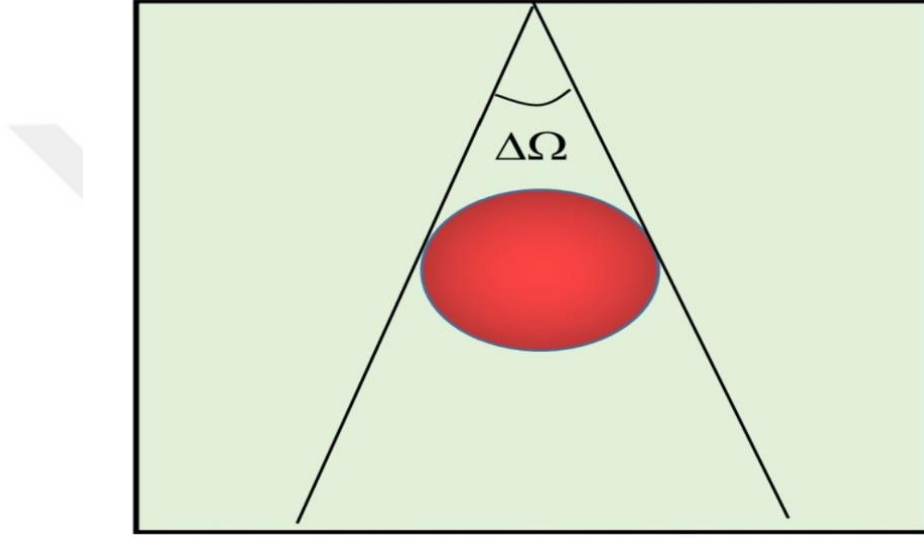
Şekil (13) de güçlü ışın etkilerine sahip tipik bir konfigürasyonu göstermektedir. Bu durumda, altta sadece sınırlı bir yük bulunur ve üst duvar boyunca ısı akısı dağılımı hesaplanacaktır. Ortamın saçılmadığı göz önüne alındığında, üst duvardaki gelen ışınım yoğunluğu yüke kadar izlenebilir.

O noktası üst duvarın merkezini, A ise merkezden uzakta bulunan bir noktayı belirtir. Mavi ve kırmızı çizgiler O ve A'dan başlar, yoğunlukları tam olarak belirlemek için geriye doğru izlenen ayırık koordinat yönlerini gösterir. Görüldüğü gibi A noktası için yükle kesişen iki yön vardır. O merkez noktasına gelince, sadece bir yön yükle kesişir.



Şekil (13) Işın etkilerini gösteren şemalar, sınır sınırlı yük

Isı akısını hesaplamak için açısal kareleme kullanılırsa, A noktasındaki ısı akısının O merkez noktasındakinden daha büyük olacağı açıktır. Sınırlandırılmış sınır yükünün yanı sıra, sınırlı hacimsel yük (Şekil 14 de gösterildiği gibi) ışın etkilerini de indükleyecektir.



Şekil (14) Işın etkilerini gösteren şemalar. İç (hacimsel) sınırlı yük.

Işıma yoğunluğunun küçük bir katı açıyla sınırlandırılmasının tam olarak entegre edilmesi zordur, çünkü entegrasyon yapmak için küçük katı açıda yalnızca birkaç ayrık koordinat yönü konumlandırılacaktır. Işın etkileri, açısal ayrıklaştırmayı iyileştirerek hafifletilebilir. Ancak, bu yaklaşım önemli hesaplama çabası gerektirir. Değiştirilmiş ayrık koordinatlar yaklaşımıyla da etkili bir şekilde hafifletilebilir. Farklı bir transfer denklemini çözerek sınır yükünden ve hacimsel /yükten ısı akısına katkıları ayrı ayrı ele alarak etkili bir şekilde hafifletilebilir.

Son zamanlarda, FVM ve DOM'daki ışın etkilerini azaltmak için birkaç yeni yaklaşım önerildi. DOM'da ışın etkilerini azaltmanın daha etkili yolu hala önemli bir araştırma konusudur.

6. Sonuç

İçi boş küresel ortamdaki tek boyutlu soğurma, yayma ve saçılmadaki bir radyasyon probleminin analizi incelenmiştir. Bu geometride ortaya çıkan açısız türev terimi yeni bir yaklaşım kullanılarak yaklaşık olarak hesaplanmıştır. Bu yol, açısız türev terimi için doğru bir ifadeye yol açmıştır. Diferansiyel denklemler seti, sonlu farklar algoritması ile sınır değer problemi kullanılarak çözülmüştür. Yeni tekniğin doğruluğu, kıyaslamalı yaklaşık çözümlerle karşılaştırılarak doğrulanmıştır. Buna ek olarak, küresel koordinat sistemi ışınımsal geçiş denklemleri ve ışınımsal aktarım denkleminin çeşitli varyantları, ışınımsal aktarım denklemlerinin farklı çözüm teknikleri ve ışınımsal aktarım denkleminin çözümündeki sayısal hatalar ve ilgili iyileştirme stratejileri sunulmuş ve tartışılmıştır.

RTE'nin sayısal çözümü için üç ana hata kaynağı tanımlanabilir, Bunlar: (1) Bir diferansiyel operatörün ayrıklaştırılmasıyla ilgili olan fark alma şemasından kaynaklanan hata; (2) bir açısız integral operatörünün ayrıklaştırılmasıyla ilgili olan saçılma teriminin ayrıklaştırılmasından kaynaklanan hata; (3) başka bir açısız integral operatörün ayrıklaştırılmasıyla ilgili olan ısı akışı veya gelen radyasyonun hesaplanmasından kaynaklanan hata.

İlki, ışınımsal enerjinin aynı yöne yayıldığı sayısal yayılmayı tetikleyecektir. İkincisi, fiziksel olmayan bir şekilde değiştirilmiş faz fonksiyonunu tetikleyecektir, dolayısıyla gerçek 'yanlış saçılma'dır. Üçüncüsü, açısız karelemenin yanlışlığına atfedilen, 'ışın etkileri' olarak da bilinen, akı dağılımında fiziksel olmayan çarpma hata modeline neden olacaktır. Ancak bu, ortam saçılmasa bile görüneceğinden, ikinci kaynaktan belirgin şekilde farklıdır. Gerçek problemlerde Yukarıda belirtilen hataların yanı sıra, ışınımsal transfer problemlerinin gerçek çözüm doğruluğunun, çözümü için dikkat edilmesi gereken absorpsiyon katsayısı, saçılma katsayısı ve saçılma fazı fonksiyonu gibi ölçülen malzeme özelliklerinin doğruluğuna da yakından bağlı olduğu belirtilmelidir.

7. Kaynaklar

- Abulwafa E. M.(1993). Radiative-transfer in a linearly-anisotropic spherical medium, *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, **49**, 165-75.
- Aouled-Dlala N., Tigur S., Seddiki E. (2007) Numerical solution of radiative and conductive heat transfer in concentric spherical and cylindrical medium. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, **107**, 443-457.
- Hsin-sen C. H., Weng L.C. (1991) Combined conduction and radiation in absorbing, emitting and isotropically-scattering concentric spherical media. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, **46**, 251-257.
- Jia G. Yener Y., Jr Cipolla J. W. (1991) Radiation between two concentric spheres separated by participating medium. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, **46(1)**, 11-9.
- Kim, M.Y., Cho, J.H.,Baek, S.W. (2008) Radiative heat transfer between two concentric spheres separated by a two phase mixture of non gray particules using the modified discrete ordinates method. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, **109**, 1607-1621.
- Li B. W., Sun Y. S., Zhang D-W. (2009). Chebyshev Collocation spectral methods for coupled radiation and conduction in concentric spherical partipating medium, *Journal of Heat Transfer*, **131(6)**, 062701. DOI: 10.1115/1.3090617.
- Mishra S.C., Krishna C. H., Kim M. Y. (2010) Lattice Boltzmann method and modified discrete ordinates method applied to radiative transport in a spherical medium with and without conduction. *Numerical Heat Transfer Applications*, **58(11)**,852- 881.
- Pomining G.C., Siewert C. E. (1982) On the integral form of the equation of transfer for a homogeneous spheres. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, **28**, 503-6

- Siewert C. E., Thomas J. R. (1991). On coupled conductive radiative heat-transfer problems in a sphere. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, **46 (2)**, 63-72.
- Sghaier T., Sifaoui M. S., Soufiani A. (2000) Study of radiation in spherical media using discrete ordinates method associated with the finite Legendre transform. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, **64(4)**, 339-351.
- Thynell S. T., Ozsik M. N. (1989) Radiation transfer in an isotropically scattering homogeneous solid sphere, *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, **33**,187-196.
- Trabelsi H. J., Sghaier T., Sifaoui M.S. (2005). A theoretical study of radiation between spheres using a modified discrete ordinates method associated with Legendre transform. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, **93(4)**, 415-428.
- Tsai J. R., Ozisik M. N., Santarelli F. J. (1989), Radiation in spherical symmetry with anisotropic scattering and variable properties, *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*,**42**;187-199.
- Viskunta R., Grosbie A. (1976). Radiative transfer between two concentric spheres separated by absorbing an emitting gray medium. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*;**6**, 871-879.
- Zhao JM, Liu LH (2007a) Second Order Radiative Transfer Equation and Its Properties of Numerical Solution Using Finite Element Method. *Numer Heat Transfer B* 51;391- 409
- Zhang L, Zhao JM, Liu LH, Wang SY (2012) Hybrid finite volume/ finite element method for radiative heat transfer in graded index media. *J Quant Spectrosc Radiat Transfer* 113 (14):1826-1835