

## TERS DÖNMÜŞ BİR SARKACIN DOĞRUSAL OLMAYAN KONUM DENETİMİNDE EN BÜYÜK LYAPUNOV ÜSTELİNİN POINCARÉ KESİTİNDEN ELDE EDİLMESİ

S. GÜRSES<sup>1</sup>, N. AKKAŞ<sup>1</sup>, B. E. PLATİN<sup>2</sup>

### Özet

Bu çalışmada, iki mertebeli bir sistemden alınan Poincaré kesitleri kullanılarak bu sistemin en büyük Lyapunov üstelinin (*LLE*) hesaplanabileceği gösterilmiştir. Model olarak doğrusal olmayan konum denetimi yapılan ters dönmüş bir sarkaç kullanılmıştır. Sistemin doğrusal olmayan davranışı, denetim torkunun üretiminde geri besleme bilgisi olarak kullanılan açısız konumdaki ölü bölgeden kaynaklanmaktadır. Yay sabiti, sönümlenme katsayısı, konumdaki ölü bölge eşik değeri gibi sistem parametreleri değiştirilerek, sistemin dinamik davranışının kaotik olması sağlanmıştır. Söz konusu sarkaç dinamiği MATLAB SIMULINK® ortamında modellenmiştir. Model denklemleri, durum değişkenleri olarak seçilen açısız konum ve açısız hız için sayısal integrasyon tekniği ile çözülmüştür. Bu çözümler sistemin davranışını faz uzayında temsil etmek için kullanılmıştır. Çözümler elde edilirken, sistem yörüngelerine verilen bir rahatsızlığın zaman içindeki değişimi ve gelişimi izlenmiş, bu veriler kullanılarak sistemin *LLE*si bulunmuştur. Kaotik davranan sarkacın *LLE*si Poincaré kesitleri kullanılarak da hesaplanmış ve aynı sistemin hareket denklemleri kullanılarak hesaplanan *LLE*si ile karşılaştırılmıştır.

### Abstract

Computing the largest Lyapunov exponent (*LLE*) of a 2-D planar flow through its Poincaré section is shown to be possible in this study. An inverted pendulum with nonlinear position control is used as a mathematical model. The nonlinearity imposed on the model is caused by a dead-zone assigned to the position sensor. The dynamical system is forced to behave chaotically by tuning the system parameters; such as, the stiffness, damping, or the width of the dead-zone of the sensor. MATLAB SIMULINK® is used as the media to build the mathematical model of the system. The governing equations of the system are solved by using numerical integration techniques for angular position and angular velocity, which are used as the state variables in constructing the dynamical behavior of the system in the phase plane. A parallel processing algorithm working with numerical integration of the system's governing equations is developed in order to follow the fate of a perturbation given to the states at a time. *LLE* of the dynamical system is generated by using this algorithm and compared with the *LLE* estimate computed through the Poincaré section of the dynamical system.

### 1. Giriş

Kararsız olmayan dinamik sistemler kararlı dengeye gelebilirler; periyodik, yarı-periyodik ya da kaotik davranabilirler. Kararlı ya da periyodik davranmayan bu tür dinamik sistemlerin incelenmesinde geometriye dayanan yöntemler gittikçe önem kazanmaktadır. Bunun bir nedeni de, bu tür sistemlerin zaman içindeki davranışlarının kritik bir süreden sonra kestirilememesidir. Ancak, bu çeşit dinamik sistemler hala bazı deterministik (uzaysal anlamda) özellikler göstermektedirler ve “kaotik sistemler” olarak adlandırılmaktadır [Kaplan, Glass 1995, Faure, Korn 2001]. Nitekim, aynı sistemler faz uzayları içinde de ifade edilebilirler ve bu uzaylardan alınan Poincaré kesitlerinde gözlenen desenler bazı değişmez

<sup>1</sup> Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Mühendislik Bilimleri Bölümü, 06531 Ankara, 0-312-210-4461, 0-312-210-1269, senih@metu.edu.tr, nakkas@metu.edu.tr

<sup>2</sup> Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Makina Mühendisliği Bölümü, 06531 Ankara, 0-312-210-2583, 0-312-210-2536, platin@metu.edu.tr

özellikler taşımaktadır. Bu çalışmada, dinamik sistemlerden alınan Poincaré kesitlerinin taşıdığı değişmez özellikler kullanılarak sistemin en büyük Lyapunov üstelinin hesaplanabileceği gösterilmiştir.

Kaotik dinamik sergileyebilen karmaşık bir sistemin değerlendirilmesinde sistemin “en büyük Lyapunov üstelinin ( $LLE$ )” hesaplanabilmesi önemlidir [Haken 1985].  $LLE$ , dinamik bir sistemin en büyük ortalama özdeğeri olarak görülebilir [Wolf, Swift, Swinney, Vastano 1985].  $LLE$ 'nin ortalama olmasının nedeni kaotik davranan sistemin sınırlılık koşulu altında doğrusal davranamayacağı ve dolayısıyla faz uzayı içinde doğrusal olmayan bir davranış sergileyeceğidir.  $LLE$ , sınırlı bir faz uzayı içinde herhangi bir anda birbirine çok yakın olan iki sistem yörüngesinin zaman içinde komşuluk ilişkilerinin ne olacağı hakkında fikir vermektedir [Kinsner 2006]. Örneğin, birbirine çok yakın komşu olan iki yörüngenin zaman içinde bu komşuluklarını yitirmesi ve daha önce birbirlerine çok uzak yörüngeler ile komşuluk ilişkilerine girebiliyorlar olması, sistemin sınırlı faz uzayı içinde kararsız davranan bir öz-doğrultusunun varlığını ( $LLE > 0$ ) göstermektedir. Bu nedenle, hareket denklemleri bilinmeyen fakat karmaşık davranış sergileyen dinamik sistemler hakkında deneysel kayıtlardan fikir sahibi olabilmek için  $LLE$ 'nin sayısal yöntemler ile hesaplanabilmesi önemlidir [Wright 1984; Wolf, Swift, Swinney, Vastano 1985; Hegger, Kantz, Schreiber 1999].

Bu çalışmada, iki mertebeli bir sistemden alınan Poincaré kesitleri kullanılarak bu sistemin  $LLE$ 'sinin hesaplanabileceği gösterilmiştir. Model olarak doğrusal olmayan konum denetimi yapılan ters dönmüş bir sarkaç kullanılmıştır. Sistemin doğrusal olmayan davranışı, denetim torkunun üretiminde geri besleme bilgisi olarak kullanılan konumdaki ölü bölgeden kaynaklanmaktadır. Sistemin yay sabiti, sönümlenme katsayısı, konumdaki ölü bölge eşik değeri gibi parametreleri değiştirilerek, dinamik davranışının periyodik, yarı-periyodik ve kaotik olması sağlanmıştır. Kaotik davranan ters dönmüş sarkacın  $LLE$ 'si hem hareket denklemlerinden hem de Poincaré kesitlerinden hesaplanmıştır.

## 2. Yöntem

### 2.1 Dinamik bir sistemin $LLE$ 'sinin tanımlanması

#### 2.1.1 Dinamik bir sistemin hareket denklemlerinin zamanın sürekli fonksiyonu olarak ifade edilmesi

Mertebesi  $n$  olan, zorlanmamış ve zamana göre değişmez özellikleri olan, yani otonom bir dinamik bir sistemin hareket denklemleri durum uzayında

$$\dot{\vec{x}}(t) = \frac{d\vec{x}(t)}{dt} = \vec{f}(\vec{x}(t)) \quad (1)$$

şeklinde yazılabilir. Burada,  $t$  zamanı,  $\vec{x}(t)$  sistemin zamanın sürekli fonksiyonu olan durum değişken vektörünü,  $\vec{f}(\vec{x}(t))$  ise  $f_i$  bileşenlerinin her biri yalnızca durum değişkenlerine bağlı  $n$ -tane doğrusal olmayan fonksiyonu göstermektedir. Denklem (1) ile verilen dinamik sistemin çözümü olan bir yörüngeye bir  $\vec{\eta}(t)$  rahatsızlığı verildiği düşünülürse, o zaman yeni çözüm aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\bar{x}^*(t) = \bar{x}(t) + \bar{\eta}(t) \quad (2)$$

Sistemin sınırlı bir dinamik sergilemesi halinde, sistem yörüngelerine verilen bu  $\bar{\eta}(t)$  rahatsızlığının zaman içindeki evrimi dinamik sistemin davranışı hakkında önemli bilgiler sunmaktadır [Moon 1987]. Rahatsızlığın zaman içindeki davranışının ifadesi

$$\dot{\bar{\eta}}(t) = \nabla \bar{f}(\bar{x}(t)) \cdot \bar{\eta}(t) \quad (3)$$

şeklindedir. Burada,

$$\nabla \bar{f}(\bar{x}(t)) = \frac{\partial \bar{f}(\bar{x})}{\partial \bar{x}} \quad (4)$$

olarak verilen  $n \times n$  boyutlarında bir matristir, sistemin “Jacobian”ı olarak bilinir ve açık ifadesi aşağıdaki gibidir.

$$J_{n \times n} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\bar{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\bar{x})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(\bar{x})}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(\bar{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\bar{x})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2(\bar{x})}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n(\bar{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(\bar{x})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n(\bar{x})}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (5)$$

### 2.1.2 n-mertebeli dinamik bir sistemin hareket denklemlerinin kesikli hale getirilmesi

Denklem (1), bahis konusu olan dinamik sistemin n-mertebeli diferansiyel hareket denkleminin zamanın sürekli fonksiyonu olan n-tane durum değişkeni kullanılarak, n-tane birinci mertebeden bağımsız diferansiyel denklem takımı olarak ifade edilmiş halidir. Zaman içinde sürekliliği olan bu n-tane durum denklemleri bazı koşullar altında, durum değişkenleri zaman içinde “kesikli” hale getirilerek n-tane fark denklemleri olarak yazılabilir.

$$\bar{x}_{m+1} = \bar{F}(\bar{x}_m) \quad (6)$$

Denklem (6)'da, m sayısal integrasyondaki adım sayısını,  $\bar{x}_m$  ise durum değişken vektörünün m'ninci adımdaki değerini göstermektedir.

Bu durumda, Denklem (2) ve (3) de sırasıyla,

$$\vec{x}_m^* = \vec{x}_m + \vec{\eta}_m \quad (7)$$

$$\vec{\eta}_{m+1} = \nabla \vec{F}(\vec{x}_m) \cdot \vec{\eta}_m \quad (8)$$

şeklinde fark denklemleri olarak yazılabilir.

Dinamik sistemin hareket denklemini zamanın sürekli fonksiyonu olarak diferansiyel denklem şeklinde değil de, zaman içinde kesikli davranan fark denklemleri olarak yazmak, sistem yörüngelerinin sayısal çözümlenmesiyle elde edilmesinde kolaylık sağlamaktadır. Sistem yörüngelerinin sayısal integrasyon teknikleri kullanılarak elde edilmesinin başlıca nedeni, doğrusal davranmayan dinamik sistemlerin hareket denklemlerinin genellikle analitik çözümleri bulunmamasıdır.

Dinamik bir sistemin doğrusal olmayan davranışının karakterize edilebilmesi için; sistem yörüngelerine m'ninci adımda verilen rahatsızlığın zaman içindeki evriminin izlenmesi çok önemli olduğundan dolayı, Denklem (8) bir sonraki integrasyon adımı için

$$\vec{\eta}_{m+2} = \nabla \vec{F}(\vec{x}_{m+1}) \cdot \nabla \vec{F}(\vec{x}_m) \cdot \vec{\eta}_m \quad (9)$$

şeklinde yazılabilir. Bu ifade ardışık k adım için genellenirse,  $\vec{\eta}_m$ 'nin zaman içindeki kesikli evrimi elde edilir.

$$\vec{\eta}_{m+k} = \prod_{i=0}^{k-1} \nabla \vec{F}(\vec{x}_{m+i}) \cdot \vec{\eta}_m \quad (10)$$

### 2.1.3 Dinamik bir sistemin En Büyük Lyapunov Üstelinin (LLE) tanımlanması

Dinamik bir sisteme verilen  $\vec{\eta}$  rahatsızlığının büyüklük ölçüsü "Euclidian" olarak

$$\|\vec{\eta}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \eta_i^2} \quad (11)$$

şeklinde tanımlanırsa, Denklem (10) yardımıyla aşağıdaki oran yazılabilir:

$$\frac{\|\vec{\eta}_{m+k}\|}{\|\vec{\eta}_m\|} = \prod_{i=0}^{k-1} \|\nabla \vec{F}(\vec{x}_{m+i})\| \quad (12)$$

Denklem (12), m'ninci basamakta sisteme verilmiş olan rahatsızlığın büyüklüğünün, k'nıncı basamağa gelindiğinde almış olduğu değerle ilgili, dolayısıyla dinamik bir sisteme verilen rahatsızlığın büyüklüğünün zaman içindeki evrimi ile ilgili bir *metrik* sunmaktadır.

Denklem (12)'de her iki tarafın logaritması alındığında

$$\ln\left(\frac{\|\vec{\eta}_{m+k}\|}{\|\vec{\eta}_m\|}\right) = \sum_{i=0}^{k-1} \ln|\nabla\vec{F}(\vec{x}_{m+i})| \quad (13)$$

elde edilir. Denklem (12)'nin sağ tarafı kullanılarak dinamik bir sistemin en büyük Lyapunov üsteli

$$\ln\left(\frac{\|\vec{\eta}_{m+k}\|}{\|\vec{\eta}_m\|}\right)^{\Delta} = \lambda k \Delta t \quad (14)$$

ifadesi yardımıyla bulunabilir. Burada,  $\Delta t$  iki integrasyon adımı arasındaki zaman farkıdır ve  $\lambda$  bir sabittir. Eğer m'ninci adımda zaman sıfır olarak ( $t=0$ ) kabul edilirse, Denklem (14) sisteme verilen rahatsızlığın sürekli fonksiyonunu kullanarak

$$\ln\left(\frac{\|\vec{\eta}(t)\|}{\|\vec{\eta}(0)\|}\right) = \lambda k \Delta t \quad (15)$$

şeklinde de yazılabilir. Bu durumda k'nıncı adımdaki zaman ise aşağıdaki gibidir.

$$t = k \Delta t \quad (16)$$

İlk kez A. M. Lyapunov tarafından tanımlanan dinamik bir sistemin en büyük Lyapunov üsteli,  $\lambda_L$  (LLE) özgün haliyle aşağıda verilmiştir.

$$\lambda_L = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{t}\right) \ln\left(\frac{\|\vec{\eta}(t)\|}{\|\vec{\eta}(0)\|}\right) \quad (17)$$

Dolayısı ile,  $\lambda_L$  (LLE), Denklem (13) yardımıyla aşağıdaki gibi de ifade edilebilir.

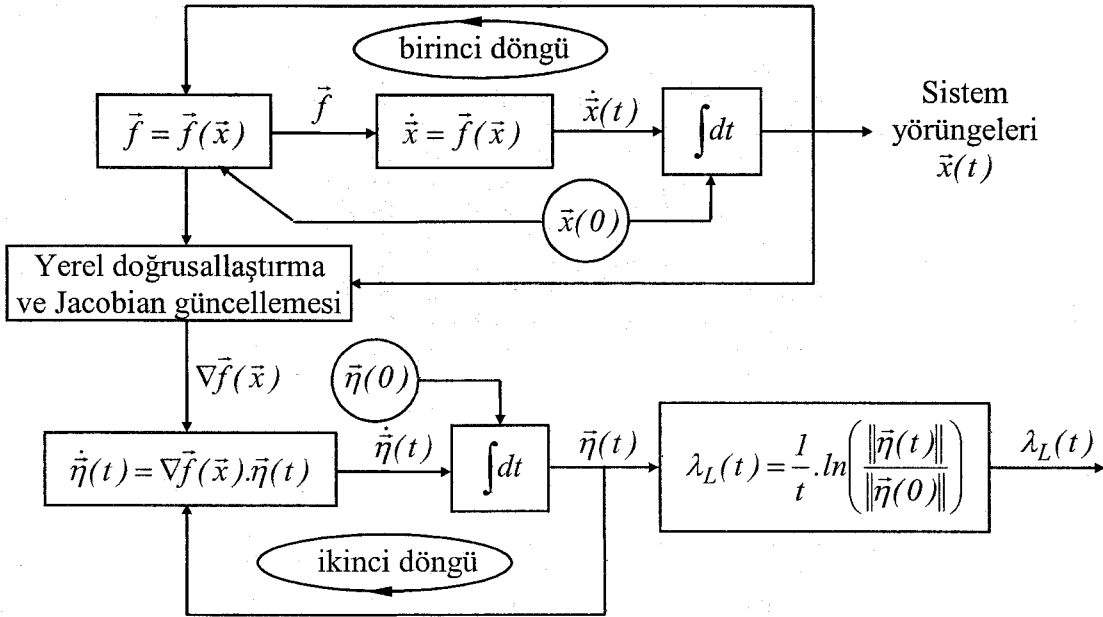
$$\lambda_L = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{t}\right) \sum_{i=1}^k \ln|\nabla\vec{F}(\vec{x}_i)| \quad (18)$$

### 2.1.4 Dinamik bir sistemin LLE'sini hesaplamak için geliştirilmiş bir yöntem

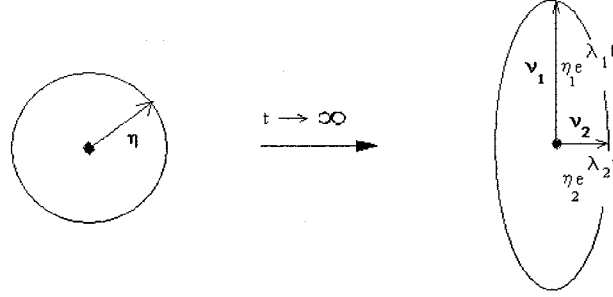
Hareket denklemi bilinen dinamik bir sistemin yörüngeleri sayısal integrasyon tekniği ile çözümlenirken, eşzamanlı olarak sistem yörüngelerine verilecek bir rahatsızlığın evriminin ve LLE'sinin hesaplanması için geliştirilen bir yöntemin blok diyagramı Şekil 1'de verilmiştir [Gürses 2002].

Şekil 1'de, dinamik sistemin doğrusal olmayan hareket denklemleri çözümüyle (birinci döngü) eş zamanlı olarak sistemin Jacobian'ı de hesaplanmaktadır (yerel doğrusallaştırma ve güncelleme). Jacobian, ikinci döngüde sistem yörüngelerine verilecek bir rahatsızlığın bir sonraki integrasyon adımındaki evrimini hesaplamak için kullanılmaktadır. Bir başka deyişle, her integrasyon adımında sisteme verilen rahatsızlığın kaderi o adım için hesaplanan Jacobian tarafından belirlenmektedir. Her yeni integrasyon adımı için birinci döngüden itibaren bu üç işlem tekrarlanmaktadır.

Şekil 2 LLE'nin fiziksel yorumunu göstermektedir. Eğer dinamik bir sistemin durum uzayında temsil edilen sistem yörüngelerine, durum uzayının belirli bir noktasında her öz-doğrultu yönünde birim rahatsızlık verilirse; bu durum, merkezi rahatsızlığın verildiği durum noktası olan bir hiper küre ile temsil edilebilir (Şekil 2 – sol taraf, bu senaryonun 2-boyutta temsilini göstermektedir).



Şekil 1. Hareket denklemleri bilinen dinamik bir sistemin LLE'sini hesaplamak için geliştirilen yöntem



**Şekil 2.** LLE'nin fiziksel yorumu [Baker, Gollub 1990].

$\eta$  sisteme bir "t" anında her doğrultuda verilen birim rahatsızlığı,  $v_i$  özvektörü,  $\lambda_i$  ise özdeğeri göstermektedir. "Koyu" karakterler vektörel büyüklükler için kullanılmıştır.

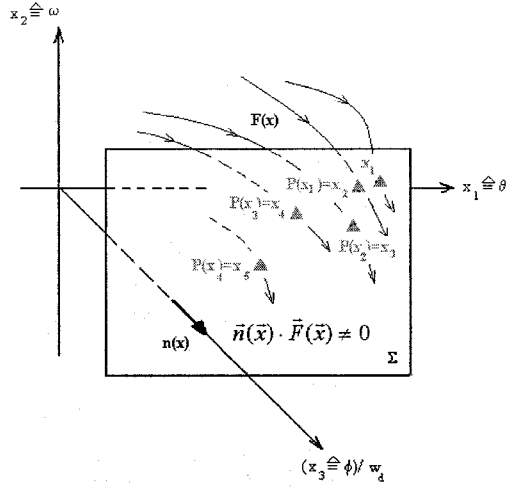
Bu hiper küre, dinamik sistemin yörüngeleri üzerinde hareket ettiği süre içinde topolojik bir değişim geçirecektir. Bu değişim kürenin bazı öz-doğrultularda uzamasıyla diğer bazı öz-doğrultularda da kısalmasıyla gerçekleşecektir (Şekil 2 – sağ taraf). Bu uzama ve kısaltmaların yönlerini ve büyüklüklerini dinamik sistemin hareket denklemlerinin yerel doğrusallaştırılması sonucunda elde edilen Jacobian'ın özdeğerleri ve özvektörleri belirleyecektir [Baker, Gollub 1990; Nayfeh ve Balachandran 1995].

## 2.2 Dinamik bir sistemin faz uzayındaki temsilinden Poincaré kesitinin alınması

Dinamik bir sistemin faz uzayından sistem yörüngelerine enlemesine alınan bir kesit Poincaré kesiti ( $\Sigma$ ) olarak bilinir ve kesiti alma koşulu

$$\vec{n}(\vec{x}) \cdot \vec{F}(\vec{x}) \neq 0 \quad (19)$$

ile verilir [Nayfeh ve Balachandran 1995; Robinson 1999]. Denklem (19)'da  $\vec{n}$ ,  $\vec{x}$  durum noktasında yer alan ve vektör alanı  $\vec{F}$ 'e teğet olmayan (alanı enlemesine kesen)  $\Sigma$  hiper-yüzeyinin normal vektörüdür. Vektör alanı  $\vec{F}$ , dinamik sistemin hareket denklemlerinin çözümünden elde edilen n-boyutlu durum uzayındaki akışı temsil etmektedir.  $\Sigma$  hiper-yüzeyi n-boyutlu dinamik sistemin durum uzayında n-1 boyutlu bir yüzeydir (Şekil 3).



**Şekil 3.**  $\omega_d$  frekansı ile sürülen ters dönmüş bir sarkaçtan alınan Poincaré kesiti ( $\Sigma$ ).  
 $\Sigma$  kesitindeki faz noktaları ( $\blacktriangle$ ) “Poincaré mapping” olarak adlandırılır.

Dinamik bir sistemden Poincaré kesiti elde etmek ilk kez Henri Poincaré tarafından karmaşık dinamik bir sistemin faz uzayında temsiliyi basitleştirmek için geliştirilmiş stroboskopik bir yöntemdir [Baker ve Gollub 1990] ve Poincaré mapping ( $\vec{P}$ ) olarak bilinir. Poincaré mapping n-mertebeli otonom dinamik bir sistemin faz uzayında n-1 boyutlu bir mapping'dir ve sembolik olarak

$$\vec{x}_{m+1} = \vec{P}(\vec{x}_m) ; \vec{x}_m \text{ ve } \vec{x}_{m+1} \in \Sigma \quad (20)$$

şeklinde ifade edilir. Burada

$$\vec{P}(\vec{x}) : \Sigma \rightarrow \Sigma \quad (21)$$

olarak tanımlanan  $\vec{P}(\vec{x})$  vektör alanı  $\vec{F}(\vec{x})$  ile aşağıdaki şekilde ilintilidir.

$$\vec{P}(\vec{x}) = \vec{F}^{\tau(\vec{x})}(\vec{x}) \in \Sigma ; \vec{x} \in \Sigma \quad (22)$$

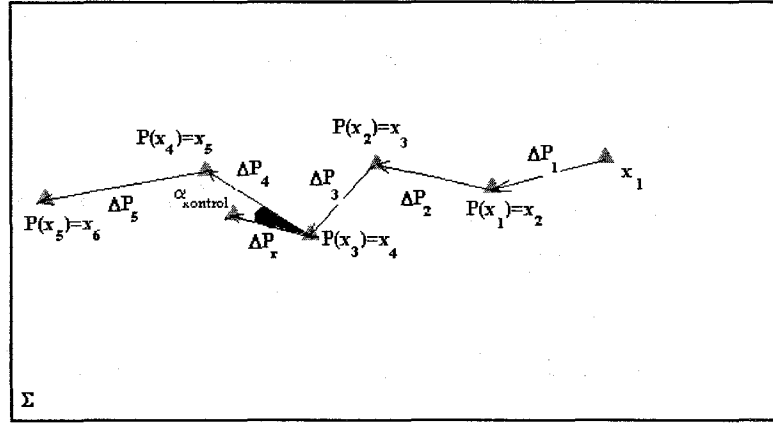
Denklem (22)'de  $\tau$ , “ilk dönüş zamanı” olarak bilinir ve aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\tau(\vec{x}) = \inf \{ t > 0 : \vec{F}^t(\vec{x}) \in \Sigma \} \quad (23)$$

Bir örnek vermek gerekirse, sabit  $\omega_d$  frekansı ile sürülen bir sarkaç için ilk dönüş zamanı da sabit bir değerdir ve  $2\pi/\omega_d$ 'ye eşittir.

### 2.3 Dinamik bir sistemin LLE'sinin Poincaré kesitinden elde edilmesi

Şekil 4'te Poincaré düzlemi ( $\Sigma$ ) üzerinde LLE hesaplamak için geliştirilen yöntem tanıtılmaktadır;  $x$ , Poincaré kesitindeki faz noktalarını;  $P(x)$ , Poincaré mapping'i,  $\Delta P$ , sistem dinamiğinin bir sürüm periyodu içinde değiştiği ortalama yön ve büyüklüğünü;  $\alpha_{kontrol}$ , sistem dinamiğinin bir sürüm periyodu içinde değiştiği ortalama öz-doğrultu kestiriminin kontrol parametresi;  $\Delta P_r$ ; zaman ileri doğru akarken  $\alpha_{kontrol}$  açısı ile denetlenen öz-doğrultuda mümkün olan en yakın komşuluk ilişkisidir. Bu yöntemin ayrıntısı aşağıda verilmiştir [Gürses 2002].



Şekil 4. Poincaré düzlemi ( $\Sigma$ ) üzerinde LLE hesaplamak için geliştirilen yöntem

**Adım I:** Poincaré kesitinde ( $\Sigma$ ) birinci Poincaré noktası  $\bar{x}_1$  için  $\Delta\bar{P}_1 = \bar{P}(\bar{x}_1) - \bar{x}_1$  hesaplanır.

**Adım II:**  $\bar{x}_1$  için  $\Delta\bar{P}_r = \bar{P}(\bar{x}_r) - \bar{x}_1$  bulunur; burada  $r=2,3,\dots,k-1$  ve  $k = \text{round}(T_p(2\pi / \omega_d))$ ,  $T_p$  benzetim süresi,  $\omega_d$  ise sürüm frekansdır.

**Adım III:**  $\Delta\bar{P}_1$ ,  $\Delta\bar{P}_r$  ile karşılaştırılır; eğer herhangi bir  $r$  için  $|\Delta\bar{P}_r| < |\Delta\bar{P}_1|$  ve  $|\tan^{-1}(\Delta\bar{P}_r) - \tan^{-1}(\Delta\bar{P}_1)| \leq \alpha_{kontrol}$  ise bu koşulları sağlayan  $\Delta\bar{P}_r$  ler içinden  $\min(|\Delta\bar{P}_r|)$  karşılık gelen  $\bar{x}_r$  Poincaré noktası  $\bar{P}(\bar{x}_1)$  ile yer değiştirir. Bu durumda  $\Delta\bar{P}_1$ ,  $\Delta\bar{P}_r$  ile yer değiştirmiş olacaktır.  $\alpha_{kontrol}$  açısı sistem dinamiğinin her bir sürüm periyodunda ortalama uzama ya da kısalma öz-doğrultu kestirimindeki hatayı denetlemektedir ve genellikle  $5^\circ$  altında tutulmaktadır.

**Adım IV:** Yukarıdaki ilk üç adımdaki işlemler diğer Poincaré noktaları ( $\bar{x}_j$ ) için tekrarlanır;  $j=2,3,\dots,k-1$  ve  $r=3,4,\dots,k-1$ . Böylece tüm Poincaré noktaları için, zaman ileriye doğru akarken, Adım III'deki koşul kontrol edilmiş ve gerekli noktasal değişiklikler yapılmıştır.

**Adım V:** *LLE*'nin kestirimi dinamik bir sistemin Poincaré kesitine ( $\Sigma$ ) “map” edilmiş Poincaré faz noktaları ( $\vec{x}_j \in \Sigma$ ) arasında zaman ileriye doğru akarken mümkün olan en yakın komşuluk ilişkisinin evrimi

$$\lambda_L = \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\log_2(|\Delta \vec{P}(\vec{x}_{j+1})| / |\Delta \vec{P}(\vec{x}_j)|)}{t_j} \quad (24)$$

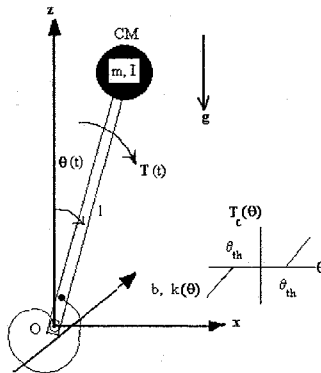
şeklinde hesaplanır. Burada,  $t_j$  faz akışının ( $\vec{F}(\vec{x})$ ) Poincaré düzlemini ( $\Sigma$ )  $\vec{x}_j$  noktasında geçme anıdır ( $\tau(\vec{x}_j) = \vec{F}^{t_j}(\vec{x}_j) \in \Sigma$ ) ve Denklem (23) hatırlanacak olursa  $t_j = j\tau$ ’dir.

### 3. Sonuçlar

#### 3.1 Matematiksel modelleme

##### 3.1.1 Doğrusal olmayan konum denetiminde ters dönmüş sarkaç modelinin tanıtılması

Şekil 5’de O dönme noktasında bir dönel yay ve bir dönel sönümleyici bulunan ters dönmüş bir sarkaç görülmektedir; CM kütle merkezini,  $m$  ve  $I$  sırasıyla ters dönmüş sarkacın kütle ve CM’ye göre eylemsizlik dönme momentini,  $k$  yay sabitini,  $b$  sönümlenme katsayısını,  $g$  ise yerçekimi ivmesini göstermektedir. Sarkaca verilecek  $T(t)$  rahatsızlığı bu yay ve sönümleyici tarafından üretilen tork ile karşılanacak ve sarkaç tam dik konumda ( $\theta=0$ ) sıfır hız ile ( $\omega=0$ ) dengeye getirilmeye çalışılacaktır. Sarkacın küçük genlikli hareketler yapacağı bir kısıt olarak getirilirse, küçük açılar için  $\sin\theta \approx \theta$  yaklaşığından dolayı sarkaç geometrik olarak doğrusal davranacaktır. Ancak, ( $\theta=0, \omega=0$ ) noktasına konulacak  $\theta_{th}$  eşik değerli bir konum ölü bölgesi sarkacın bu nokta civarında doğrusal davranmasına engel olacaktır.



Şekil 5. Ters dönmüş sarkaç modeli ve doğrusal olmayan konum denetim ( $T_c$ ) fonksiyonu.

### 3.1.2 Tek eşikli örnek durumun hareket denklemleri

Örnek durum için konum denetiminde açısal yer değişikliği duyucusunun tek eşikli bir ölü-bölge içermesinden dolayı doğrusal davranmayan ters dönmüş bir sarkaç incelenecektir. Bu sarkacın (Şekil 5) hareket denklemi

$$I\ddot{\theta} + b\dot{\theta} - mgl\theta = T(t) - T_c(\theta) \quad (25)$$

şeklinindedir. Burada, denklemin sağ tarafındaki girdiler  $T(t)$  ve  $T_c(\theta)$  aşağıda verilmiştir.

$$T(t) = A \sin(\omega_d t) \quad (26)$$

$$T_c(\theta) = \begin{cases} 0 & |\theta| \leq \theta_{th} \\ k(\theta - \text{sgn}(\theta) \cdot \theta_{th}) & |\theta| > \theta_{th} \end{cases} \quad (27)$$

Denklem (26)'da  $A$  girdi torkunun genliği ve  $\omega_d$  ise sistemi sürüm frekansdır.

Sarkacın açısal konumunu birinci durum değişkeni ( $x_1 = \theta$ ), açısal hızını ikinci durum değişkeni ( $x_2 = \dot{\theta}$ ) olarak tanımladıktan sonra; otonom olmayan bu sistemi otonom hale getirmek amacıyla girdi torkunun faz açısı da üçüncü durum değişkeni ( $x_3 = \phi = \omega_d t$ ) olarak tanımlanırsa, durum denklemlerini aşağıdaki gibi yazmak mümkündür.

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= A \sin(x_3) / I - (b / I)x_2 - T_c(x_1) / I + (mgl / I)x_1 \\ \dot{x}_3 &= \omega_d \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

Burada

$$T_c(x_1) = \begin{cases} 0 & |x_1| \leq \theta_{th} \\ k(x_1 - \text{sgn}(x_1) \cdot \theta_{th}) & |x_1| > \theta_{th} \end{cases} \quad (29)$$

Bu durumda sabit bir frekans ile sürülen ters dönmüş sarkacın faz uzayı 3-boyutlu olacaktır. Ancak üçüncü eksen ( $x_3$ ) boyunca faz akışı sabit olduğu için ( $\dot{x}_3 = \omega_d$ ) ters dönmüş sarkacın dinamiğinin karmaşık hale getirilmelisine  $x_3$  yönünden katkı gelmeyecektir. Dolayısıyla sarkacın karmaşık dinamiği 2-boyuttaki ( $\theta$  ve  $\omega$ ) izdüşümüne bakarak

incelenebilir. Bir başka deyişle karmaşık dinamik,  $x_3 \equiv \text{sabit}$  alınarak  $(\theta - \omega)$  düzleminde 2-boyutlu bir akış olarak görülebilir.  $x_3 \equiv \text{sabit}$  alınması, (26) numaralı denklem gereği sistem dinamiğinin belirli bir anda dondurulması ( $\dot{x}_3 \equiv 0$ ) veya sistem dinamiğine girdi torkunun yalnızca bir faz açısı için ( $x_3 = \phi_{\text{sabit}} = \omega_d t^*$ ;  $t^*$ : dinamiğin  $x_3$ -ekseninde dondurulduğu an) bakılması anlamına gelecektir (Şekil 3). Dinamik sisteme bu şekilde bakmak Poincaré tarafından ortaya atılan stroboskopik yöntem kullanılarak Poincaré mapping yapmak ile özdeştir. Bu durumda, 28 numaralı denklem, Denklem (29)'da verilen koşullar göz önüne alındığında aşağıdaki gibi iki ayrı durum denklemi seti olarak yazılabilir.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ mgl/I & -b/I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ T^*/I \end{bmatrix} \text{ eğer } |x_1| \leq \theta_{th} \quad (30a)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ (mgl-k)/I & -b/I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ k \operatorname{sgn}(x_1) \theta_{th} / I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ T^*/I \end{bmatrix} \text{ eğer } |x_1| > \theta_{th} \quad (30b)$$

$$T^* = T(t^*) = A \sin(\omega_d t^*) = A \phi_{\text{sabit}} \quad (31)$$

Yukardaki denklem takımlarından, tek eşikli konum denetiminde ters dönmüş sarkacın iki farklı sistem matrisi olduğu görülür ve daha da ileri giderek sistemin doğrusal olmayan bir şekilde davranmasının nedeninin, sarkacın hareketinin iki farklı sistem matrisi tarafından belirlenmesi olduğu söylenebilir.

### 3.1.3 Örnek durum için sistemin denge noktalarının tanımlanması ve kararlılık analizi

Ters dönmüş sarkacın örnek durumda verilen koşullarda denge noktalarını bulmak için Denklem (30)  $\dot{\vec{x}} = \vec{0}$  için çözüldüğü takdirde, Denklem (30a) için  $(x_1, x_2) = (0, 0)$  noktasının, Denklem (30b) için  $(x_1, x_2) = (\pm k \theta_{th} / (mgl - k), 0)$  noktalarının sistemin denge noktaları olduğu görülür. Sistemin her biri kendi içinde doğrusal davranan ve  $(x_1 < -\theta_{th}, -\theta_{th} < x_1 < \theta_{th}, \theta_{th} < x_1)$  ile tanımlanan üç parçalı dinamiğinde, sistemin denge noktaları her parça için farklıdır. Kontrol torku üretilmeyen durumda (birinci parça) denge noktası yerçekimi düşeyi iken, kontrol torku üretilen durumda, eğer  $x_1 > 0$  ise (ikinci parça) denge noktası  $(-k \theta_{th} / (mgl - k), 0)$  olmakta,  $x_1 < 0$  iken (üçüncü parça) ise denge noktası  $(k \theta_{th} / (mgl - k), 0)$  olmaktadır. Bir başka deyişle,  $x_1$  yerçekimi düşeyinin ölü bölgeye kadar olan civarında ( $|x_1| < \theta_{th}$ ) yerçekimi düşeyi etrafında hareket etmektedir. Bu takdirde, yerçekimi düşeyi gerçek bir denge noktası olmaktadır. Eğer ölü bölge yer çekimi düşeyinin sağ tarafından terk edilmişse ( $x_1 > 0$  ve  $x_1 > \theta_{th}$ ), yerçekimi düşeyinin solunda kalan denge noktası etrafında, ölü bölge yer çekimi düşeyinin sol tarafından terk edilmişse ( $x_1 < 0$  ve  $x_1 < -\theta_{th}$ ) yerçekimi düşeyinin sağında kalan denge noktası etrafında hareket edecektir (Şekil 5). Son iki durumdaki denge noktaları ait oldukları bölgeler dışında yer aldıkları için sistemin sanal denge noktalarını oluşturmaktadır. Bu üç parçanın sistem dinamiği içinde birbirleriyle olan ilişkisini anlamak için üç denge noktasının

da kararlılık analizinin yapılması gerekmektedir.

Bir denge noktasının kararlılığını saptamak için sisteme bu denge noktasında küçük bir rahatsızlık ( $\bar{\eta}$ ) vermek gerekir. Bu rahatsızlığın zaman içindeki evrimi, sistemin bu denge noktasının kararlılığı hakkında bir fikir verecektir. Eğer Denklem (3) ve (4) hatırlanacak olursa, sistemin bu denge noktasında hesaplanacak Jacobian'ın özdeğerleri verilen rahatsızlığın büyüklüğünün zaman içindeki evrimini tayin edecektir.

Doğrusal davranmayan örnek sistem üç parçalı doğrusal alt sistemlerden oluştuğu için her alt sistemin Jacobian'ı kendi sistem matrisine eşittir. Bu üç parça için Denklem (28) kullanılarak Jacobian hesaplandığında, yukarıda birinci parça olarak tanımlanan bölge için

$$J_1 = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ mgl/I & -b/I \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ A \cos(x_3)/I & 0 \end{bmatrix} \quad (33a)$$

ikinci ve üçüncü parça olarak tanımlanan sağ ve soldaki iki bölge için ise

$$J_{2,3} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ (mgl-k)/I & -b/I \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ A \cos(x_3)/I & 0 \end{bmatrix} \quad (33b)$$

bulunur.

Her üç parça için de Jacobian, üçüncü faz değişkeninin fonksiyonu gibi görünse de; o öz-doğrultuda faz akışı sabit olduğundan sistemin kararlılık analizi için bu doğrultu unutulabilir ve her üç parça için de Jacobian sabit katsayılı bir matrise dönüşür. Bir başka deyişle sistemin 3-boyutlu faz uzayı içindeki davranışı,  $(\theta-\omega)$  düzlemine “map” edilerek 2-boyutlu bir faz akışı halinde incelenebilir ve bu akış için sistemin kararlılığı Denklem (33a) ve (33b)'de verilen matrislerinin iki boyutlu alt sistemleri tarafından belirlenir [Moon 1987]. Bu alt sistemler, Denklem (30a) ve (30b)'de verilen sistem matrislerinin kendisinden başka bir şey değildir. Bu durumda, sistemin denge noktalarının kararlılık tayini için Denklem (30)'da verilen sistem matrislerinin özdeğerlerine bakmak gerekir ve yeterlidir.

## 3.2 Benzetim sonuçları

### 3.2.1 Durum I için sistem parametrelerinin tayini

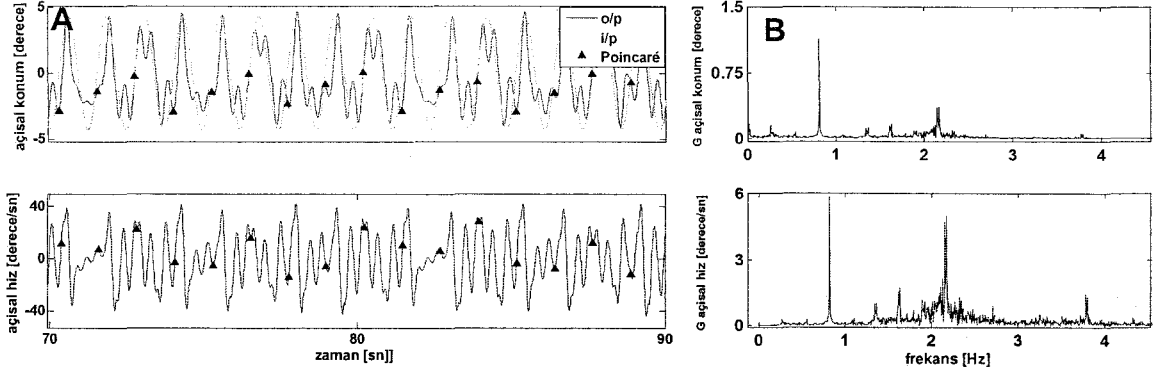
Denklem (25), (26) ve (27) ile tanımlanan doğrusal olmayan konum denetimli ters dönmüş bir sarkacın sistem parametreleri için, gövdesinin üzerinde ters dönmüş bir sarkacı andıran insan başı örneğine karşın gelen şu değerler kullanılacaktır [Gürses, Dhaher, Hain, Keshner 2005]:  $m=4.5\text{kg}$ ,  $l=0.07\text{m}$ ,  $I=0.0233\text{kg.m}^2$ ,  $g=9.81\text{ms}^{-2}$ ,  $k=10\text{N.m/rad}$ ,  $b=0.01\text{N.m.s/rad}$ . Bu parametre değerleri ile, Denklem (30a)'daki sistem matrisinin özdeğerleri +11.30 ve -11.73, Denklem (30b)'deki sistem matrisinin özdeğerleri ise -

0.215±17.22i olarak bulunur. Denklem (30a)'nın ifade ettiği hal için konum denetiminde ters dönmüş sarkacın denge noktası pozitif özdeğer ile ilintili kararsız bir öz-doğrultu taşımaktadır. Böyle artı ve eksi özdeğer çifti içeren bir denge noktası “eğer noktası” olarak adlandırılmaktadır. Sistem davranışının fiziksel açıklaması olarak; konum denetimi olarak üretilmesi gereken denetim torku, duyucu eşliğinden dolayı,  $|x_i| < \theta_{th}$  olduğunda üretilmeyecek ve sarkaç yerçekimi etkisiyle üst konum civarından ayrılarak düşmeye başlayacaktır. İşte bu ayrılma, kararsız davranan öz-doğrultu ile temsil edilmektedir. Denklem (30b) ile temsil edilen ( $|x_i| > \theta_{th}$ ) iki durumda ise, duyucu eşik değeri aşıldığından ötürü konum denetimi için gerekli tork üretilip sisteme verilmektedir. Bu bölgeler için sistem matrisinin özdeğerlerine bakıldığında gerçek kısmı negatif olan karmaşık sayı çiftini görmekteyiz. Bu durum, topolojik olarak kararlı spiral diye bilinir [Strogatz 1994] ve denge noktasının kararlı davrandığı anlamına gelir. Bu bölgede, sistem kendisinin simetriği olan diğer bölge içinde bulunan sanal denge noktasına doğru kararlı bir şekilde sürülür. Örneğin, sistem yörüngeleri eğer ölü bölgeyi yer çekimi düşeyinin sağ tarafından ( $x_1 > 0$  ve  $x_1 > \theta_{th}$ ) terk etmiş ise, yerçekimi düşeyinin solunda kalan noktaya doğru denge noktasının kararlı spiral karakterinden dolayı çekilecektir. Ancak, yörüngeler sol taraftaki noktaya yaklaştıklarında, bu kez sağ taraftaki kararlı spiral onları kendisine doğru çekmeye başlayacaktır. Doğrusal olmayan bu sistemin sergilediği dinamik, yer çekimi düşeyinin sağ ve sol tarafları arasında gidip gelmelerle kalmamakta; yer çekimi düşeyi civarındaki ölü bölgeden geçerken de, her iki taraftaki çekicinin yok olmasıyla ortaya çıkan yer çekiminin kararsızlık etkisine bağlı bir öz-doğrultuda hızla bir tarafa doğru düşmeye başlamaktadır. Sistemin maruz kaldığı bu tür çekme ve düşme tarzındaki farklı dinamikler sistemin davranışının bir süre sonra kestirilemez olmasına neden olmaktadır. Bu durum doğrusal olmayan sistemler dinamiğinde ikili çatallanma diye adlandırılır [Moon 1987; Baker, Gollub 1990] ve bazı sistem parametreleri için peş peşe gelen dallanmalar karmaşa (kaos) ile sonuçlanabilir.

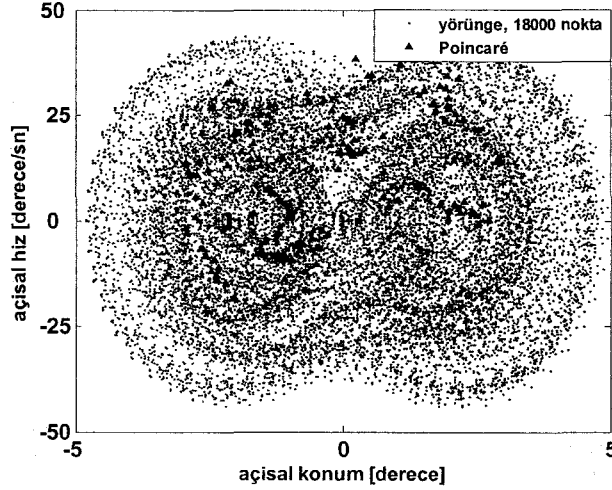
### 3.2.2 Durum I için sistem denklemlerinin zaman çözümleri (Kaotik davranış)

İnsan gövdesinin üzerinde duran başın sagittal düzlemdeki denge hareketini temsil eden ters dönmüş sarkaç dinamiği MATLAB SIMULINK® ortamında modellenmiştir. Model denklemleri, durum değişkenleri olarak seçilen açısız konum ve açısız hız için sayısal integrasyon tekniği ile çözülmüştür. Benzetimlerde, sistem, genliği 0.1 N.m ve frekansı 0.81 Hz olan bir sinüs girdisi ile sürülmüş, yukarıda verilen parametre değerleri ve 0.01 saniyelik integrasyon adımları kullanılmıştır. Benzetimin 70-90 saniyeler arasındaki bölümü açısız konum ve açısız hız için Şekil 6a'da verilmiştir. Şekil 6b ise 180 saniye süren açısız konum ve açısız hız zaman serilerinin frekans uzayındaki hızlı Fourier dönüşümlerini (FFT) göstermektedir.

Şekil 6b'de 2 Hz civarında görülen tepe, baş-boyun sisteminin doğal frekansıdır [Peng 1996]. Şekil 7 ise, aynı zaman çözümleri kullanılarak, ters dönmüş sarkacın faz uzayı içindeki desenini göstermektedir. Bu 2-boyutlu düzlemsel karmaşık bir akıştır ve bu akışın enlemesine düzlemi kestiği noktalar Poincaré noktaları olarak (▲) gösterilmiştir. Bir başka deyişle, eğer ters dönmüş sarkacın dinamiğinin 3-boyutlu olduğu hatırlanacak olursa, Poincaré noktaları  $x_3$ -eksenine enlemesine ilk dönüş zamanı ( $1/f_d$ ) aralıklarıyla alınmış faz noktalarıdır. Şekil 7 sarkaç dinamiğinin ve Poincaré noktalarının ( $\theta-\omega$ ) düzlemindeki izdüşümüdür.



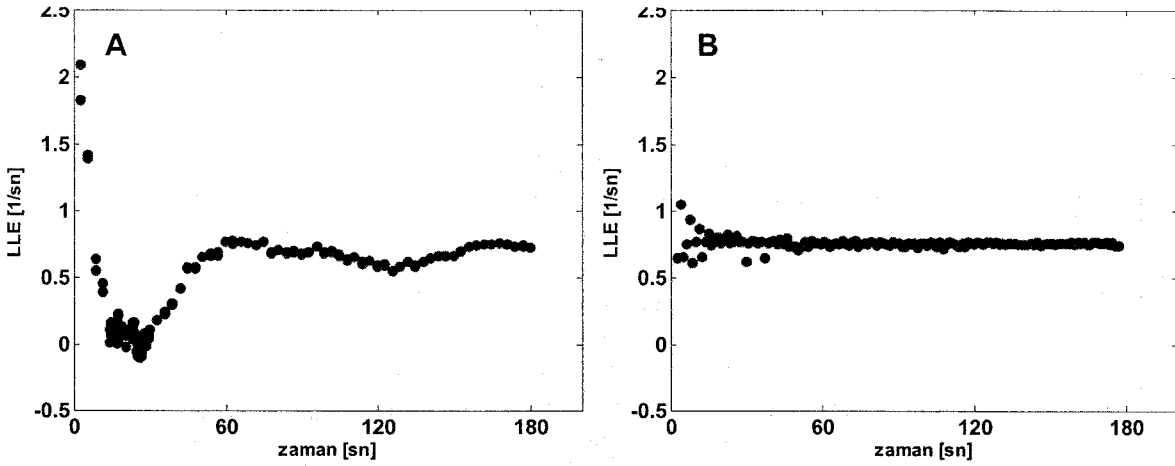
Şekil 6. Başın 70-90 saniyeler arasında benzetimi yapılan salınımlarının zaman serileri (A) ve 180 saniye süren aynı benzetim sonuçlarının zaman serilerinin FFT'leri (B)



Şekil 7. Başın 180 saniye süre ile benzetimi yapılan salınımlarının faz uzayında temsili.

Şekil 7'deki Poincaré kesitine yakından bakılacak olursa, bu kesitteki faz noktalarının ters dönmüş sarkaç dinamiğinin eğer noktasının kararsız öz-doğrultusundan ve kararlı spiral şeklindeki sistem yörüngelerinden geçtiği fark edilebilir. Bir başka deyişle, sistem dinamiğinin uzadığı yön eğer noktasının kararsız öz-doğrultusudur. Bu doğrultuda birbirlerine çok yakın iki komşu faz noktası, zaman içinde birbirinden çok ayrı düşebilir. Bu raksamanın bir ölçüsü Denklem (10), (12) ve (18)'de ifade edildiği gibi sistemin en büyük Lyapunov üstelidir ( $LLE$ ). Şekil 8a, yukarıda verilen sistem parametreleri kullanılarak (Şekil 7'de verilen düzlemsel akış için) bulunan  $LLE$  grafiğini göstermektedir. Bu  $LLE$  Şekil 1'de verilen yöntem aracılığıyla hesaplanmıştır.

Şekil 8b ise aynı koşullarda  $LLE$ 'nin Poincaré kesitinden elde edilmesini göstermektedir. Göze çarpan ilk husus, Poincaré kesitinden elde edilen  $LLE$ 'nin, Şekil 8a'dakinden çok daha kısa bir süre içinde kalıcı değerine ( $0.75 \text{ sn}^{-1}$ ) yakınsamasıdır. Her iki şekilde de hesaplanan  $LLE$ 'ler ( $>0$ ), bu parametreler ile sürülen ters dönmüş sarkaç sisteminin kaotik davrandığını işaret etmektedir.



**Şekil 8** *LLE*'nin zaman içinde değişimi  
A: Sistem denklemleri kullanarak  
B: Poincaré kesitinden Bölüm 2.3.2'de verilen yöntem aracılığıyla

Kullanılan örnekte sistemin hareket yasaları bilinmektedir. Ancak karmaşık davranış gösteren sistemlerin hareket yasaları genellikle bilinmez. Bu durumdaki sistemlerin dinamikleri hakkında bilgi sahibi olurken, geliştirilen bu yöntemin kullanılması önem kazanacaktır.

#### 4. Tartışma ve sonuç

Biyolojik sistemler gibi yüksek mertebeden karmaşık sistemler ile uğraşırken genellikle bu sistemleri yöneten yasaları matematiksel olarak ifade etmek zor ve hatta olanaksızdır [Boslough 1995]. Buna rağmen, bu tip sistemlerin dinamikleri hakkında bilgi sahibi olmak için, fraktal güç spektrumu, entropi, fraktal boyut hesabı gibi yöntemler her geçen gün daha fazla önem kazanmaktadır [Blacher ve Perdang 1981; Badii ve Politi 1997]. Doğrusal davranmayan bu sistemlerin dinamikleri seçilen sistem parametrelerine ya da gözlemlendikleri ilk durum değerlerine bağlı olarak değişiklik göstermektedir. Böylesi sistemlerin davranışları hakkında kestirimde bulunmak ya da denetim stratejileri geliştirmek için sistem dinamiğinin karakteristiklerinin tanımlanması gerekmektedir [Kang ve Dingwell 2006]. Sistemden elde edilen deneysel kayıtlardan Lyapunov üstellerinin spektrumunu veya *LLE*'sini hesaplayabilmek bu yöntemler içinde en önemlilerindedir [Wolf 1985]. Bu tip dinamik sistemlerin Poincaré kesitlerinin bazı değişmez desen özellikleri taşıdığı Henri Poincaré zamanından beri bilinmektedir [Rabinovich 2000]. Bu çalışmada dinamiği matematiksel olarak ifade edilebilen ancak analitik olarak çözülmemeyen, doğrusal davranmayan, ikinci mertebeden ters dönmüş bir sarkacın, sayısal yöntemler kullanılarak faz uzayı içinde ifade edilen dinamiğinden alınan Poincaré kesitlerinden *LLE*'sinin hesaplanabileceği gösterilmiştir. Bu yöntemin bir uygulaması için, deneysel kayıt olanakları olan karmaşık biyolojik ve tıbbi sistemlerin dinamiklerini sayısal yöntemler kullanarak faz uzayları içinde temsil ederek [Farmer 1983; Nayfeh 1995] Poincaré kesitlerinden *LLE* hesaplanabileceği gösterilmiştir [Gürses, Dhaher, Hain, Keshner 2005]. Böylece, karmaşık sistemlerin tanımlanması, izlenmesi ve denetlenmesi için kullanılacak bir yöntem tanıtılmıştır.

## Kaynakça

- [1] G.L. Baker, J.P. Gollub, 1990, "Chaotic Dynamics", Cambridge University Press, New York, NY, ABD.
- [2] R. Badii, A. Politi, 1997, "Complexity: Hierarchical Structures and Scaling in Physics", Cambridge University Press, Cambridge, UK.
- [3] S. Blacher, J. Perchang, 1981, "Power of Chaos", Physica, Vol. 3D, s512.
- [4] J. Boslough, 1995, "Beyond the Black Hole: Stephen Hawking's Universe", Harper Collins Publishers, London, UK.
- [5] J.D. Farmer, E. Ott, J.A. Yorke, 1983, "The Dimension of Chaotic Attractors", Physica, Vol. 7D, s153-180.
- [6] P. Faure, H. Korn, 2001, "Is There Chaos in the Brain? I. Concepts of Nonlinear Dynamics and Methods of Investigation", Life Sciences, Vol. 324, s773-793.
- [7] S. Gürses, 2002, "Postural Dynamics and Stability", Ph.D. thesis, Engineering Sciences Department, METU, Ankara, Türkiye.
- [8] S. Gürses, Y. Dhaher, T. C. Hain, E. A. Keshner, 2005, "Perturbation Parameters Associated with Nonlinear Responses of the Head at Small Amplitudes", Chaos, Vol. 15, No. 2, Article No. 023905, s1-10.
- [8] H. Haken, 1985, "Order in Chaos", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 52, s635-652.
- [9] R. Hegger, H. Kantz, T. Schreiber, 1999, "Practical Implementation of Nonlinear Time Series Methods: The TISEAN Package", Chaos, Vol. 9, No. 2, s413-435.
- [10] H.G. Kang, J.B. Dingwell, 2006, "A Direct Comparison of Local Dynamic Stability during Unperturbed Standing and Walking", Exp. Brain Res., DOI 10.1007/s00221-005-0224-6.
- [11] D. Kaplan, L. Glass, 1995, "Understanding Nonlinear Dynamics", Springer-Verlag, New York, NY, ABD.
- [12] W. Kinsner, 2006, "Characterizing Chaos through Lyapunov Metrics", IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics - Part C: Applications and Reviews, Vol. 36, No.2, s141-151.
- [13] C.F. Moon, 1987, "Chaotic Vibrations", John Wiley & Sons, Inc., New York, NY, ABD.
- [14] A.H. Nayfeh, B. Balachandran, 1995, "Applied Nonlinear Dynamics", John Wiley & Sons, Inc., New York, NY, ABD.
- [15] G.C.Y. Peng, 1996, "Dynamics and Control of Head, Neck and Eye stabilization: Neuromechanical and Experimental Models", Ph.D. dissertation, Field of Biomedical Engineering, Northwestern University, Evanston, IL, ABD.
- [16] M.I. Rabinovich, A.B. Ezersky, P.D. Weidman, 2000, "The Dynamics of Patterns", World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singapore.
- [17] C. Robinson, 1999, "Dynamical Systems: Stability, Symbolic Dynamics, and Chaos", 2<sup>nd</sup> Ed., CRC, Boca Raton, FL, ABD.
- [18] S.H. Strogatz, 1994, "Nonlinear Dynamics and Chaos", Perseus Books Publishing, L.L.C., New York, NY, ABD.
- [19] A. Wolf, J.B. Swift, H.L. Swinney, J.A. Vastano, 1985, "Determining Lyapunov Exponents from a Time Series", Physica, Vol. 16D, s285-317.
- [20] J. Wright, 1984, "Method of Calculating a Lyapunov Exponent", Phys. Rev. A, Vol. 29, s2923.