

GÖZLEMLERDEN HAREKETLE DİFERANSİYEL DENKLEMİN ELDE EDİLMESİ

Erdem BERBER¹, Kasım KOÇAK¹

ÖZET

Gözlemlerden hareketle bunları üreten dinamik sistemin elde edilmesi problemi günümüzde önemli bir çalışma alanıdır. Dinamik sistem bir kez elde edildikten sonra bu dinamik sistem kullanılarak süreç hakkında önemli bilgiler ortaya konabilir. Örneğin, model kullanılarak değişkenler arasındaki etkileşimler ve nonlineerlik derecesi hakkında önemli bilgiler elde edilebilir, sistemin kararlılık özellikleri incelenebilir, parametrelerde meydana gelen değişmelere ve dış zorlamalara karşı modelin tepkisi incelenebilir ve elde edilen model öngörü amacına yönelik olarak kullanılabilir.

Bu çalışmada günlük toplam buharlaşma miktarı, günlük ortalama rüzgar hızı ve günlük ortalama sıcaklık zaman serileri kullanılarak, buharlaşmayı idare eden dinamik sistem yörünge metodu ile tahmin edilmiştir. Bu şekilde elde edilen buharlaşma miktarı ile gerçek buharlaşma miktarları arasındaki fark ihmal edilebilecek düzeydedir.

1. GİRİŞ

Dünyada suya olan talep yüzyılın başından beri yaklaşık sekiz kat artmıştır. Dünya nüfusunun 2025 yılında 8.3 milyar olması beklenmektedir. Bütün bu gelişmeler meteoroloji, hidrometeoroloji ve hidrolojinin önemini arttırmaktadır. Bu çalışmada su bütçesinin belirlenmesi açısından önemli bir değişken olan buharlaşmanın dinamiğinin elde edilmesi üzerinde durulmuştur.

Hidrolojik çevrimin çeşitli aşamalarından en önemlisi olan buharlaşmanın doğrudan ölçümü ve hesaplanması birtakım zorluklar içerir. Meteorolojik ölçümler içerisinde buharlaşma ölçümleri hidroloji, hidrometeoroloji ve tarımsal meteoroloji açısından son derece önemlidir. Ancak bu verinin doğrudan ölçülmesi çoğu zaman mümkün olmamaktadır. Ayrıca geçmişe yönelik çalışmalarda doğrudan buharlaşma ölçümlerinin bulunmaması, hesaplamalarla bu değer belirlenmesini gerektirmektedir. Ancak hesaplamalarda kullanılan her bir eşitliğin farklı meteorolojik parametrelere dayanması araştırmacının daha dikkatli davranmasını gerektirmektedir (Ok, 2003). Göl ve çeşitli su yapılarından buharlaşmayı tahmin edebilmek, su kaynakları yönetimi için son derece önemlidir. Su yüzeyinden buharlaşma miktarının hesabı, olayı etkileyen faktörlerin çokluğu nedeniyle güçtür.

Günümüzde mevcut zaman serilerinden hareketle, olayı idare eden dinamik sistem diferansiyel denklem formunda elde edilebilmektedir.

Zaman serilerinden diferansiyel denklem elde etme yöntemleri, günümüzde önemli bir bilimsel çalışma alanı oluşturmaktadır. Nonlineer zaman serisi analizindeki gelişmeler, gelecekteki gelişmelere temel oluşturma açısından önemli ilerlemeler kaydetmiştir. Crutchfield ve McNamara (1986) tarafından dinamik sistemlere analitik model uydurmanın iki farklı yaklaşımı önerilmiştir:

- Sistemin kısa-vade davranışını kullanarak lokal dinamikleri tanımlamak,
- Uzun-vade davranıştan çekicinin dinamiklerini yaklaşık olarak elde etmek.

Diğer taraftan Cremers ve Hübler (1986), uygun çekicinin bütün noktalarında sistemin kısa zamanlı davranışının analizine dayanan “akış metodunu” ileri sürmüşlerdir. Akış meto-

¹Istanbul Teknik Üniversitesi, Uçak ve Uzay Bilimleri Fakültesi, Meteoroloji Mühendisliği Bölümü 34469 Maslak, İstanbul

du daha sonra, Breden ve Hübler (1990) tarafından her sistem değişkeninin gözlenemediği durumlara da uygulanabilecek şekilde geliştirilmiştir. Eisenhammer (1991), yörünge metodunu önererek, tipik akış metodu olan kısa-vade yaklaşımın karakteristikleri ile Crutchfield ve McNamara tarafından önerilen uzun-vade yaklaşımı birleştirmiştir. Bu yaklaşım, doğal süreçlere de uygulanabilen önemli bir metot olma özelliği taşımaktadır. Özellikle düşük boyutlu sistemlerin potansiyellerinin incelenmesi için yörünge metodu kullanılabilir. Yörünge metodu herhangi bir fonksiyon formu kullanılabilir. Bu çalışmada yeterli bir esnekliğe izin verdiği için polinomlar kullanılmıştır.

Çalışmada buharlaşma, sıcaklık ve rüzgar hızı zaman serilerinden buharlaşmayı idare eden dinamik sistemin elde edilmesi için yörünge metodu kullanılmıştır. Bu metot çeşitli meteorolojik süreçlere uygulanabilecek bir esnekliğe sahip olması nedeniyle özellikle tercih edilmiştir.

Bir meteoroloji istasyondaki buharlaşmanın tipik yıllık davranışını modellemek için nonlineer bir diferansiyel denklem sistemi buharlaşma, sıcaklık ve rüzgar hızının ölçülmüş zaman serilerinden yararlanarak yeniden kurulmuştur. Sıcaklık ve rüzgar hızı ele alınan sürecin bağımsız değişkenleri, buharlaşma ise bağımlı değişkeni şeklinde düşünülmüştür.

2. ZAMAN SERİLERİNDEN DİNAMİK SİSTEMİN ELDE EDİLMESİ

Meteorolojik süreçler doğası gereği nonlineerdir. Bu nedenle meteorolojik süreçlerin nonlineer bir diferansiyel denklem sistemi ile ifade edilmesi tercih edilmelidir (Koçak, 1996). Diferansiyel denklemlerin elde edilmesinde kullanılacak olan metot çeşitli meteorolojik süreçlere uygulanabilecek esnekliğe sahip olmalıdır.

Diferansiyel denklem formunda elde edilen model kullanılarak değişkenler arasındaki etkileşimler ve nonlineerlik derecesi hakkında önemli bilgiler elde edilebilir. Ayrıca model aracılığıyla sistemin kararlılık özellikleri incelenebilir. Diğer taraftan olarak parametrelerde meydana gelen değişimlere ve dış zorlamalara karşı modelin tepkisi incelenebilir. Tüm bunlara ek olarak elde edilen model öngörü amacına yönelik olarak kullanılabilir.

Bu çalışmada kullanılacak olan metot düşük boyutlu dinamik sistemlerin modellenmesinde oldukça etkili olan yörünge metodudur.

Yörünge Metodu

Yörünge metodu, verilerin orijinal yörüngesine en yakın yörüngeyi veren nonlineer diferansiyel denklemlerin yeniden kurulması esasına dayanır. Elde edilen model aslında tam olarak bilmediğimiz gerçek modele en yakın modeldir (Perona ve diğ., 2000).

Birinci mertebeden adi diferansiyel denklem sistemi ile tanımlı bir dinamik sistem şu şekilde verilebilir:

$$\dot{x} = f(x, t) \quad (1)$$

Bu eşitlikte x durum değişkeni vektörünü, t ise zamanı temsil etmektedir.

Hareket denkleminin yeniden kurulması için orijinal yörüngeye en yakın model yörüngenin diferansiyel denklemi elde edilmelidir. Modelin matematiksel formu önceden belirlenir.

Dinamik sistemler teorisine göre, bir sistemin zamansal evrimi faz uzayındaki yörüngeleri ile temsil edilebilir. Faz uzayının koordinatları, sistemin evrimini tam olarak gösterebilmek için gerekli olan durum değişkenlerinden meydana gelir. Bu uzaydaki her bir yörünge, sistemin farklı başlangıç koşullarına karşı gelen evrimini temsil eder. Faz portreleri, geçici bir durumdan sonra bütün yörüngeleri kendi üzerine çeken ve çekici (atraktör) olarak

adlandırılan özgün paternlere sahiptir. Yörüngeleri çekici tarafından yakalanan bütün başlangıç değerleri bir çekici sahası tanımlar. Deterministik gelişim gösteren sistemler nokta, limit çevrim ve tor gibi düşük boyutlu çekicilere sahiptirler. Bu tip çekiciler tam sayı bir boyutla karakterize edilebilirler. Bu çekicilerin önemli bir özelliği, üzerlerine yakınsayan yörüngelerin birbirlerinden sabit bir mesafede kalmasıdır. Bu özellik, sistemin uzun bir süre için öngörülebilir olmasını garanti eder (Koçak, 1996).

Düzenli Δt zaman aralıklarında örneklenmiş tek bir durum değişkenine ait zaman serisinden hareketle faz uzayının yeniden kurulması (reconstruction) mümkündür. Bunun için önce çekici ile ilgili bilgilerin ve topolojik özelliklerin (örneğin boyutun) zaman serisinden tahmin edilmesi gerekir. Bir dinamik sistemin boyutu sistemin dinamiğini tanımlamak için gereken durum değişkeni sayısıdır. Packard vd., (1980), gözlenmiş türbülanslı ya da kaotik akıştan bir takım ölçüleri elde etmek için çekicinin, faz uzayındaki yapısının yeniden kurulmasını önermişlerdir. Bu ise dinamik sürecin, artık daha fazla bilgi taşımaya kadar bağımsız bir koordinatın eklenmesiyle, ardışık olarak daha yüksek boyutlu yeni bir faz uzayına transformasyonu (embedding) ile mümkündür. Bu koordinatlardan birini zaman serisinin kendisi, diğer bağımsız koordinatları ise serinin $(m-1)$ 'inci mertebeye kadar olan türevleri meydana getirir. Sonuç olarak dinamik sistemin zamansal evriminin faz portresi, tek bir durum değişkeni ve onun ardışık türevleri ile oluşturulan m boyutlu yeni bir faz uzayında temsil edilebilir (Koçak, 1996). Bu çalışmada kullanılan meteorolojik değişkenler, doğrudan faz uzayının bağımsız değişkenleri olarak dikkate alınmıştır. Diğer bir deyişle faz uzayının birinci boyutu buharlaşma miktarı, ikinci boyutu rüzgar hızı, üçüncü boyutu ise sıcaklık değişkeninden oluşmaktadır.

Yörünge metodunda kullanılacak olan diferansiyel denklemin şu formda olduğu kabul edilecektir:

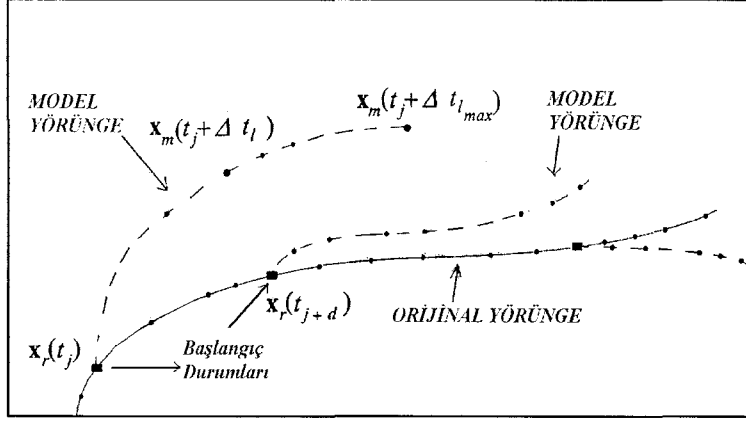
$$\dot{x}_i = \sum_{k=1}^K c_{i,k} F_{i,k}(x_1, x_2, \dots, x_D) \quad i = 1, 2, \dots, D \quad (2)$$

Bu eşitlikte $c_{i,k}$ diferansiyel denklemin katsayıları ve $F_{i,k}(x_1, x_2, \dots, x_D)$ yaklaşım fonksiyonudur. K yaklaşım fonksiyonu sayısı, D ise model için seçilen durum değişkeni sayısıdır. Eğer $F_{i,k}$ 3. dereceden bir polinom olarak seçilirse (2) denklemi aşağıda verildiği gibi yazılabilir:

$$\dot{x}_i = \left\{ \begin{array}{l} c_{i,1} + c_{i,2}x_1 + c_{i,3}x_2 + c_{i,4}x_3 + c_{i,5}x_1x_2 + c_{i,6}x_1x_3 \\ + c_{i,7}x_2x_3 + c_{i,8}x_1^2 + c_{i,9}x_2^2 + c_{i,10}x_3^2 + c_{i,11}x_1x_2x_3 \\ + c_{i,12}x_1^2x_2 + c_{i,13}x_1^2x_3 + c_{i,14}x_1x_2^2 + c_{i,15}x_2^2x_3 \\ + c_{i,16}x_1x_3^2 + c_{i,17}x_2x_3^2 + c_{i,18}x_1^3 + c_{i,19}x_2^3 + c_{i,20}x_3^3 \end{array} \right\} \quad (3)$$

Yörünge metodu k tane fonksiyon uzayında dinamik sistemin kısa ve uzun-vade davranışını ortaya koymakta oldukça etkin bir metottur.

Şekil 1 yörünge metodunu ana hatları ile göstermektedir. Model, gerçek veri $(x_r(t_n), n = 1, 2, \dots, N)$ üzerinde seçilen çeşitli başlangıç koşullarından ($j = 1, 2, \dots, j_{max}$) itibaren (2) denklemini kullanır.



Şekil 1 Yörünge metodunun temsili bir faz uzayında grafiksel olarak gösterimi.

Durum değişkenini tahmin etmek için $(t_j + \Delta t_l)$ anlarında model denklemleri kullanılır. Farklı başlangıç koşulları için işlem tekrar edilerek bir Q (kalite fonksiyonu) fonksiyonu elde edilir.

$$Q = \sum_{j=1}^{j_{max}} \sum_{l=1}^{l_{max}} \|x_m(t_j + \Delta t_l) - x_r(t_j + \Delta t_l)\| \quad (4)$$

(3.4) eşitliğinde $\|\cdot\|$ öklid normunu göstermektedir. $x_r(t_j)$ orijinal yörünge üzerindeki başlangıç koşullarını ve $x_m(t_j)$ modelin verdiği yörüngeyi göstermektedir. Başlangıçta $x_r(t_j)$ ve $x_m(t_j)$ aynıdır.

L , sistemin orta ve uzun-vade davranışını yakalamak için modelin kaç adım çalışacağını belirler. Δt_l ise bu adımlar arasındaki zaman aralığını gösterir. Δt_l aşağıda verildiği gibi hesaplanır:

$$\Delta t_l = h(2^{l-1}) \quad (5)$$

Bu eşitlikte geçen h verilerin örnekleme aralığını göstermektedir. $c_{i,k}$ 'nin optimum değerleri Q 'nin minimizasyonu ile elde edilir.

$$Q_{\min} = \min_{c_{i,k}} Q \quad (i = 1, 2, \dots, D; k = 1, 2, \dots, K) \quad (6)$$

(4) eşitliği aşağıda verildiği gibi ifade edilebilir:

$$Q = \sum_{j=1}^{j_{max}} \sum_{l=1}^{l_{max}} \sqrt{\sum_{i=1}^D \left[\left(\int_{t_j}^{t_j + \Delta t_l} \dot{x}_{m_i}(\tau) d\tau \right) + x_{m_i}(t_j) - x_{r_i}(t_j + \Delta t_l) \right]^2} \quad (7)$$

(7) denklemindeki integral $[t_j, t_j + \Delta t_l]$ zaman aralıklarında $x_{m_i}(t)$ 'nin değişimini ifade eder ve şu şekilde yazılabilir:

$$\int_{t_j}^{t_j+\Delta t_j} \dot{x}_{m_i}(\tau) d\tau = x_{m_i}(t_j + \Delta t_j) - x_{m_i}(t_j) = c_{i,1} \int_{t_j}^{t_j+\Delta t_j} F_{i,1}(\tau) d\tau + \dots + c_{i,k} \int_{t_j}^{t_j+\Delta t_j} F_{i,k}(\tau) d\tau \quad (8)$$

$F_{i,k}$ bilinmeyen bir fonksiyon olduğu için integraller sayısal integrasyonla alınır. Q fonksiyonunun bilinmeyen $c_{i,k}$ katsayılarına göre türevleri alınıp sıfıra eşitlenerek her değişken için aşağıda verilen lineer denklem sistemi elde edilir:

$$\frac{\partial Q}{\partial c_{i,k}} = \left(\sum_{z=1}^K c_{i,z} A_{k,z}^{(i)} \right) - B_k^{(i)} = 0 \quad z, k = 1, \dots, K \quad (9)$$

Bu eşitlikteki $A_{k,z}^{(i)}$ matrisi ve $B_k^{(i)}$ vektörü sırasıyla (3.10) ve (3.11) denklemlerinde verilmiştir.

$$A_{k,z}^{(i)} = \sum_{j=1}^{j_{\max}} \sum_{l=1}^{l_{\max}} \left[\left(\int_{t_j}^{t_j+\Delta t_j} F_{i,k}(\tau) d\tau \right) \left(\int_{t_j}^{t_j+\Delta t_j} F_{i,z}(\tau) d\tau \right) \right] \quad (10)$$

$$B_k^{(i)} = \sum_{j=1}^{j_{\max}} \sum_{l=1}^{l_{\max}} \left[\left(x_{m_i}(t_j + \Delta t_j) - x_{m_i}(t_j) \right) \left(\int_{t_j}^{t_j+\Delta t_j} F_{i,k}(\tau) d\tau \right) \right] \quad (11)$$

A matrisi tersinir bir matristir. Böylece yeni $c_{i,k}$ katsayıları bulunarak optimizasyon döngüsü için yeni katsayılar kümesi elde edilir ve sonra bunlar modelde yerine konarak iterasyona devam edilir (Perona ve diğ., 2000).

3. UYGULAMA

Kullanılan Veri

Çalışmada, Gazimagosa'ya ait 1 Ocak 2000 tarihinden 31 Aralık 2004 tarihine kadar ölçülmüş olan 5 yıllık günlük toplam buharlaşma, günlük ortalama sıcaklık ve günlük ortalama rüzgar hızı verileri kullanılmıştır. Gazimagosa'nın seçilmesinin nedeni buharlaşma ölçümlerinin kış mevsiminde de yapılabilmesi olmasıdır. Daha sıcak bir iklime sahip olması nedeniyle verilerde süreksizlikle karşılaşmamak açısından bu bölge tercih edilmiştir. Bilindiği gibi Türkiye'deki meteoroloji istasyonlarında kış mevsiminde buharlaşma ölçümleri yapılmamaktadır.

Tablo 1, çalışmada kullanılan verilere ait bazı önemli istatistiksel bilgileri göstermektedir.

Tablo 1. Çalışmada kullanılan verilere ait istatistiksel bilgiler.

| İstatistik | Buharlaşma (E) (mm) | Rüzgar Hızı (V) (m/s) | Sıcaklık (T) ($^{\circ}\text{C}$) |
|----------------------|-------------------------|---------------------------|---|
| Ortalama | 3.77 | 3.13 | 19.60 |
| Minimum | 0.00 | 1.02 | 4.70 |
| Maksimum | 10.00 | 10.21 | 33.30 |
| Standart Sapma | 2.18 | 1.07 | 6.56 |
| Korelasyon Katsayısı | $r_{E,V} = -0.06$ | $r_{V,T} = -0.09$ | $r_{E,T} = 0.84$ |
| Çarpıklık Katsayısı | 0.52 | 2.15 | -0.05 |

Tabloda verilen $r_{E,V}$, $r_{V,T}$ ve $r_{E,T}$ korelasyon katsayıları sırasıyla buharlaşma-rüzgar hızı, rüzgar hızı-sıcaklık ve buharlaşma-sıcaklık arasındaki korelasyon katsayısını göstermektedir. Buharlaşmanın rüzgar hızı ve sıcaklıkla ilişkisine bakılırsa buharlaşma-sıcaklık ilişkisinin oldukça yüksek olduğu korelasyon katsayılarından görülmektedir. Buharlaşma ile sıcaklık arasındaki korelasyon katsayısı $r_{E,T} = 0.84$ 'dür. Rüzgar hızı ise buharlaşmayı arttırmada sıcaklık kadar etkili değildir.

Verilerin Model Girişi İçin Hazır Hale Getirilmesi

Çalışmada kullanılan veriler modele hazır hale getirilmek için yumuşatılmıştır. Bunun için her bir veri türünün beş yıllık günlük ortalaması alınmıştır. Yani beş yıllık veri bir yıla indirgenmiştir. Bu bize yıllık veri değişiminin düzgün bir grafiğini verir. Bu yumuşatmayla çalkantılar azaltılır ve değişkenlerin davranışı hakkında daha genel sonuçlara varılabilir.

Ortalama alınarak hem daha düzgün bir salınım elde edilmekte hem de buharlaşmanın salınımı hakkında daha sağlıklı bir yorum yapılabilmektedir. Ayrıca bu şekilde buharlaşmanın klimatolojik davranışı hakkında daha anlamlı bilgi edinilmektedir. Sıcaklık verisinin de ortalaması alınarak hem doğru salınım elde edilmekte hem de çalkantılardan kurtulma olanağı sağlanmaktadır. Sıcaklık değişimi istatistik değerlerden de görüldüğü gibi simetrik bir dağılım ortaya koymaktadır.

Rüzgar hızları için ortalama alarak yumuşatma diğer verilere oranla daha önemlidir. Çünkü rüzgar hızı çalkantıya en çok sahip olan veridir. Her ne kadar verilerde çalkantı azalmış ise de bu şekilde verilerin başlangıç ve bitiş değerleri birbirinden oldukça farklıdır. Rüzgar verisinin daha fazla yumuşatılması gerekmektedir.

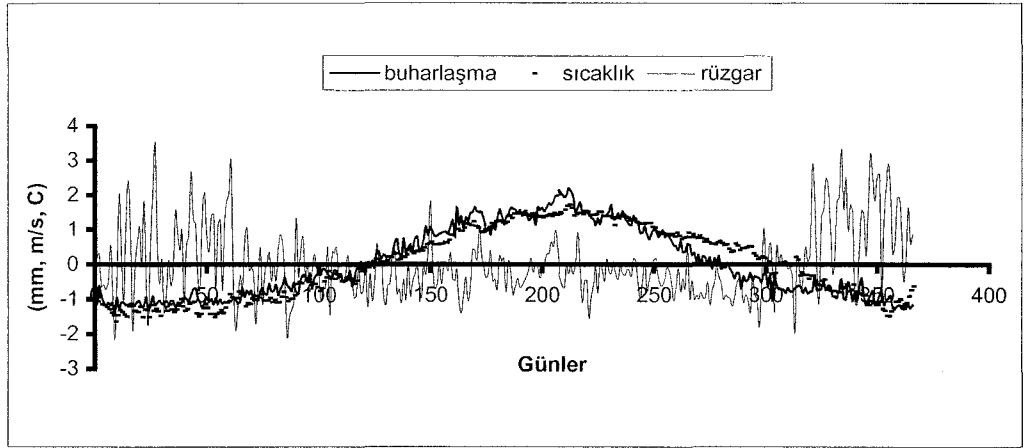
Ortalama alınarak yapılan yumuşatma ile bir yandan normaller yakalanırken diğer taraftan çalkantıya neden olan değerler atılır. Böylece daha düzgün bir salınım elde edilir. Özellikle çalkantının fazla olması nedeniyle rüzgar verisi için yuvarlatma işlemi önem taşımaktadır.

Verilerin model girişi için hazır hale getirilmesinde ikinci aşama verilerin standartlaştırılmasıdır. Bu da verilerin sıfır ortalama etrafında salınmasını sağlayabilmek ve değişkenler arasındaki boyut farkını ortadan kaldırabilmek için gerekli bir işlemdir. Diğer taraftan değişkenler arasındaki ilişkiyi görmek açısından üç durum değişkeninin de değişiminin birlikte gözlenmesi önemlidir.

Şekil 2 buharlaşma, rüzgar hızı ve sıcaklık verisinin birlikte yıllık ortalama değişimini göstermektedir. Üç veri de sıfır ortalama ve birim standart sapmaya sahiptir. Buharlaşma ve sıcaklık arasındaki ilişki şekilde açıkça görülmektedir. Rüzgar hızının diğerleriyle olan ilişkisi net olarak görülememektedir.

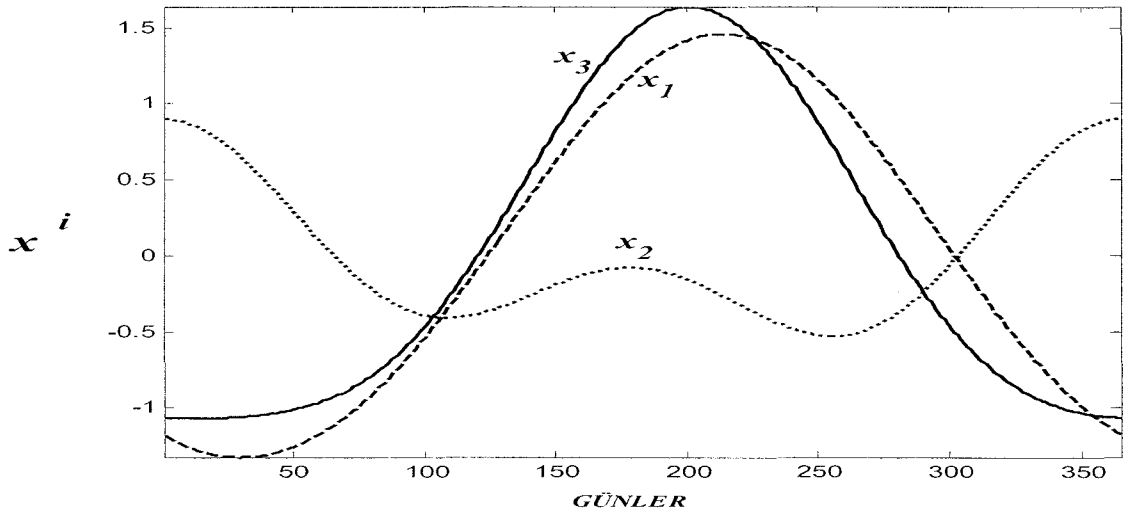
Buharlaşma ve sıcaklığın değerleri yılın ortasında birlikte artmakta; yılın başında ve sonunda ise birlikte azalmaktadır.

Rüzgar hızı değerlerinin salınımı, buharlaşma ve sıcaklık verilerinin birbirine benzer olan salınımından oldukça farklı bir salınım ortaya koymaktadır. Rüzgar hızının arttığı dönemlerde buharlaşmanın azaldığı görülmektedir. Özetle buharlaşma ile rüzgar hızı arasında lineer bir ilişki görülmemektedir.



Şekil 2. Standartlaştırılmış verilerin zaman serisi.

Her ne kadar yıllık ortalama ile veriler yuvarlatılsa da değişkenlerin uzun-vade davranışını yakalayabilmek açısından verilerden kısa-vade meteorolojik salınımların da çıkarılması gerekmektedir. Bu işlem çalışmada Fourier analizi ile yapılmıştır.

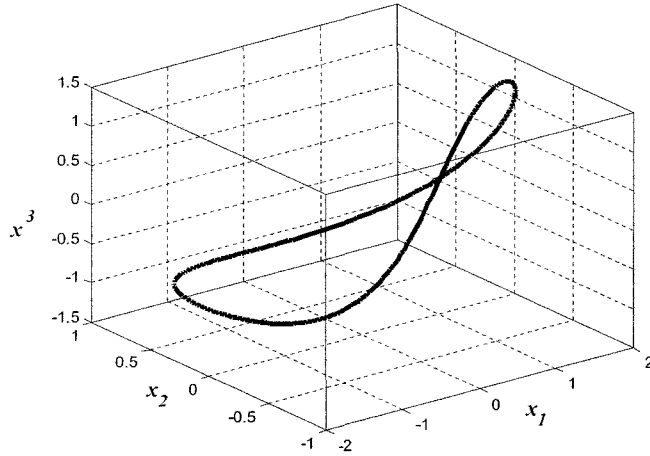


Şekil 3. Standartlaştırılmış verilerin harmonik analiz ile yumuşatılması sonucu elde edilen zaman serileri.

Fourier analizi ile verilerin ilişkisi daha rahat görülebilecektir (Şekil 3). Fourier analizi sonucu zaman serileri model girişi için hazır hale gelmiş olmaktadır. Şekil 3, üç durum değişkeninin de kendi zaman serilerinin başlangıç ve bitiş değerlerinin eşit olduğu periyodik salınımı göstermektedir.

Fourier analizi sonunda elde ettiğimiz yuvarlatılmış zaman serileri model girişi için orijinal veri olarak dikkate alınacaktır. Sistemin çekicisinin üç boyutlu faz uzayındaki görüntüsü şekil 4’de verildiği gibidir.

Şekil 4, buharlaşma (x_1), rüzgar hızı (x_2) ve sıcaklık (x_3) verilerinin çekicisini üç boyutlu olarak göstermektedir. Bu çekicinin yörüngesi kendisini herhangi bir noktada kesmemektedir.



Şekil 4. Orijinal verilerin çekicisi.

Elde edilen bu üç boyutlu çekicinin, orijinal verilerin çekicisidir. Yörünge metodunda kullanılacak olan gerçek veri, Şekil 4’deki yörüngeyi üreten veridir. Yörünge metodunda bu yörünge orijinal yörünge olarak adlandırılır. Bu yörünge üzerinde uygun başlangıç koşulları seçilerek orijinal yörüngeye en yakın model yörünge elde edilmeye çalışılacaktır.

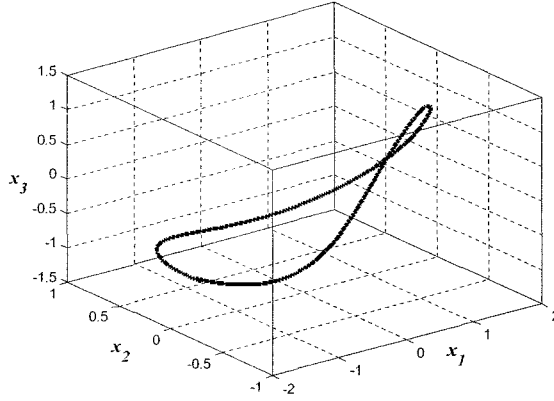
Modelin Çalıştırılarak Dinamik Sistemin Elde Edilmesi

Gerekli yumuşatma, standartlaştırma ve Fourier analizi yapılarak model girişi için hazır hale getirilmiş olan veriye yörünge metodu uygulanmıştır. Bunun için FORTRAN programlama dilinde yazılmış olan bir kod kullanılmıştır. Katsayılar kümesine ve durum değişkenlerine başlangıç değerleri atanarak işleme başlanır. Diferansiyel denklemin çözümü için adım uzunluğu h belirlenir. Diferansiyel denklemin integre edilmesi için bir algoritma belirlenir, bu çalışmada 4. mertebeden Runge-Kutta algoritması kullanılmıştır. Böylece katsayılar bulunarak buharlaşmayı idare eden dinamik sistem elde edilir. Bu dinamik sistem, buharlaşmanın sıcaklıkla ve rüzgar hızıyla arasındaki dinamik bağı verir. Tablo 2, buharlaşmayı idare eden dinamik sisteminin katsayılarını göstermektedir.

Tablo 2. Yörünge metodu ile elde edilen diferansiyel denklem sisteminin katsayıları.

| Katsayılar | Değerler | Katsayılar | Değerler | Katsayılar | Değerler |
|------------|----------|------------|----------|------------|----------|
| $c_{1,1}$ | 0.0052 | $c_{2,1}$ | 0.0072 | $c_{3,1}$ | 0.0020 |
| $c_{1,2}$ | 0.0700 | $c_{2,2}$ | -0.0114 | $c_{3,2}$ | 0.0643 |
| $c_{1,3}$ | -0.0280 | $c_{2,3}$ | 0.0189 | $c_{3,3}$ | -0.0389 |
| $c_{1,4}$ | -0.0750 | $c_{2,4}$ | 0.0128 | $c_{3,4}$ | -0.0671 |
| $c_{1,5}$ | -0.0470 | $c_{2,5}$ | -0.0487 | $c_{3,5}$ | -0.0228 |
| $c_{1,6}$ | -0.0195 | $c_{2,6}$ | -0.1063 | $c_{3,6}$ | 0.0096 |
| $c_{1,7}$ | 0.0316 | $c_{2,7}$ | 0.0400 | $c_{3,7}$ | 0.0166 |
| $c_{1,8}$ | 0.0282 | $c_{2,8}$ | 0.0588 | $c_{3,8}$ | 0.0058 |
| $c_{1,9}$ | 0.0163 | $c_{2,9}$ | 0.0101 | $c_{3,9}$ | 0.0088 |
| $c_{1,10}$ | -0.0200 | $c_{2,10}$ | 0.0357 | $c_{3,10}$ | -0.0201 |
| $c_{1,11}$ | -0.0071 | $c_{2,11}$ | 0.2207 | $c_{3,11}$ | -0.1249 |
| $c_{1,12}$ | -0.0066 | $c_{2,12}$ | -0.1157 | $c_{3,12}$ | 0.0522 |
| $c_{1,13}$ | 0.0888 | $c_{2,13}$ | -0.1663 | $c_{3,13}$ | 0.1129 |
| $c_{1,14}$ | 0.0127 | $c_{2,14}$ | 0.0725 | $c_{3,14}$ | -0.0333 |
| $c_{1,15}$ | -0.0045 | $c_{2,15}$ | -0.0650 | $c_{3,15}$ | 0.0383 |
| $c_{1,16}$ | -0.1212 | $c_{2,16}$ | 0.1367 | $c_{3,16}$ | -0.1309 |
| $c_{1,17}$ | 0.0161 | $c_{2,17}$ | -0.1028 | $c_{3,17}$ | 0.0759 |
| $c_{1,18}$ | -0.0206 | $c_{2,18}$ | 0.0605 | $c_{3,18}$ | -0.0321 |
| $c_{1,19}$ | -0.0061 | $c_{2,19}$ | -0.0176 | $c_{3,19}$ | 0.0077 |
| $c_{1,20}$ | 0.0482 | $c_{2,20}$ | -0.0288 | $c_{3,20}$ | 0.0459 |

Şekil 5, buharlaşma (x_1), rüzgar hızı (x_2) ve sıcaklık (x_3) durum değişkenlerine ait çekiciyi göstermektedir. Buharlaşma x_1 eksenini, rüzgar hızı x_2 eksenini ve sıcaklık x_3 eksenini gösterilir. Çekicinin yörüngesi kendisini herhangi bir noktada kesmemektedir.



Şekil 5. Buharlaşmayı idare eden dinamik sistemin çekicisi.

Bu çekici buharlaşma, rüzgar hızı ve sıcaklık arasındaki dinamik sistemin çekicisini temsil etmektedir. Buharlaşmayı idare eden dinamik sistemin çekicisi, modelin 2. iterasyon sonucunda elde edilmiştir. Yörüngenin başlangıç noktasına tekrar gelmesi buharlaşmayı idare eden dinamik sistemin periyodik olduğunu gösterir. İkinci iterasyon sonunda elde edilen yeniden kurulmuş bu diferansiyel denklem sistemi için başlangıç koşulu sayısı $J_{\max} = 72$, başlangıç koşullarından itibaren modelin çalışacağı adım sayısı $I_{\max} = 6$ ve iki başlangıç koşulu arasındaki zaman aralığı $d = 20'$ dir. Diğer taraftan iki veri arasındaki adım uzunluğu $h = 0.25$ ve eleman sayısı $N = 1457$ olarak alınmıştır.

Gerçek buharlaşma değerleri ile modelin vermiş olduğu buharlaşma değerleri arasındaki hata 0.0005'tir. Bu hata değeri 4. mertebeden Runge-Kutta algoritmasının hata sınırları içerisinde yer almaktadır.

4. SONUÇLAR

Bu çalışmada bir meteoroloji istasyonunda ölçülmüş olan değişkenlerden hareketle söz konusu meteorolojik süreci idare eden dinamik sistem tahmin edilmeye çalışılmıştır. Bu amaca yönelik olarak geliştirilmiş olan yörünge metodu kullanılmıştır. Bu metotta orijinal çekiciyi üreten dinamik sistem verilerden hareketle elde edilmektedir. Yörünge metodu, dinamik sistemi idare eden nonlinear bir diferansiyel denklem sistemi kullanılmaktadır. Diferansiyel denklem sisteminin katsayıları orijinal yörüngeye en yakın yörüngeyi veren katsayılardır.

Çalışmada Gazimagosa'da 1 Ocak 2000–31 Aralık 2004 tarihleri arasında ölçülmüş olan 5 yıllık buharlaşma, rüzgar hızı ve sıcaklık verileri kullanılmıştır.

Yukarıda adı geçen istasyonun verilerinin kullanılmasının nedeni buharlaşmanın dinamiğini tam olarak ortaya koyabilmek için sürekli verilere olan gereksinimdir. Değişkenlerin tipik yıllık ortalama davranışları elde edilerek normleştirilmiştir. Bu şekilde elde edilen seriden kıda-vade salınımlar Fourier analizi yapılarak çıkarılmıştır. Sonuç seriye yörünge metodu uygulanarak diferansiyel denklem sisteminin katsayıları elde edilmiştir.

Bu şekilde elde edilen dinamik sistemin çekicisi ile orijinal sistemin çekicisi arasındaki fark ihmal edilebilecek düzeydedir. Gerçek buharlaşma değerleri ile modelin vermiş olduğu buharlaşma değerleri arasındaki hata 0.0005'tir. Bu hata değeri 4. mertebeden Runge-Kutta algoritmasının hata sınırları içerisinde yer almaktadır.

Elde edilen dinamik sistem kullanılarak süreç hakkında önemli bilgiler ortaya konabilir. Örneğin, değişkenler arasındaki etkileşimler ve nonlinearlik derecesi hakkında önemli

bilgiler elde edilebilir, sistemin kararlılık özellikleri incelenebilir, parametrelerde meydana gelen değişimlere ve dış zorlamalara karşı modelin tepkisi incelenebilir ve elde edilen model öngörü amacına yönelik olarak kullanılabilir.

KAYNAKLAR

- Breden, J.L., and Hübler, A.,** 1990. Reconstructing equation of motion from experimental data with unobserved variables, *Physical Review A*, 42(10), 5817-5826.
- Cremers, J., and Hübler, A.,** 1986. Construction of differential equations from experimental data, *Zeitschrift für Naturforschung A*, 42, 797-802.
- Crutchfield, J.P., and McNamara, B.S.,** 1986. Equations of motion from a data series, *Complex Systems*, 1, 417-452.
- Eisenhammer, T., Hübler, A., Packard, N., and Kelso, J.A.S.,** 1991. Modeling experimental time series with ordinary differential equations, *Biological Cybernetics*, 65, 107-112.
- Koçak, K.,** 1996. Kaotik Davranış Kriteri Olarak Fraktal Boyut Değişimi ve Dinamik Sistemlere Uygulanması, *Doktora Tezi*, İTÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.
- Ok, M.R.,** 2003. Buharlaşmanın Hesaplanmasına ve Belirlenmesine Yönelik Bir Model Tasarımı, *Yüksek Lisans Tezi*, İTÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü Meteoroloji Mühendisliği Ana Bilim Dalı, İstanbul.
- Packard, N.H., Crutfield, J.P., Farmer, J.D., Shaw, R.S.,** 1980. Geometry from a time series, *Physical Review Lett.*, 45(9), 712-716.
- Perona, P., D'Odorico, P., Porporato, A., and Ridolfi, L.,** 2001. Reconstructing the Temporal Dynamics of Snow Cover from Observations, *Geophysical Research Letters*, 28, 2975-2978.
- Perona, P., Porporato, A., and Ridolfi, L.,** 2000. On The trajectory Method for the Reconstruction of Differential Equations from Time Series, *Nonlinear Dynamics*, 23, 13-33.