

HAMURCU VE ARNOLD'UN KEDİSİ TRANSFORMASYONLARINDA KARŞILAŞILAN PARADOKSAL BULGULARIN İNCELENMESİ

Cahit ÖZGÜR¹ Atilla KILIÇARSLAN¹ Ulaş G. YÜKSEL¹

ÖZET:

Hamurcu transformasyonu diye bilinen ve uzat, kes ve katla algoritmasının tipik bir örneği olan iteratif dönüşüm acayip çekicili klasik bir kaotik modeldir. Kaotik karakter yörünge boyunca 8 -10 kademelik bir iterasyonda gerek hesapla ve gerekse geometrik çizim ile rahatlıkla doğrulanmaktadır. Ancak bilgisayar marifeti ile 30-40 kademeli bir iterasyonda elde edilen yörüngeler başlangıç noktası ne olursa olsun kaotik olmak bir yana sabit noktaya gitmektedir. Bu paradoksal durumun nedenleri X eksenini üzerindeki izdüşüme karşı gelen *Bernoulli kaydırması* dönüşümü incelenerek açıklanmıştır. Kuvvetli bir karıştırma özelliğine sahip olan *Arnold' un kedisi* dönüşümünde de benzer durumlar vardır. Dijitalleştirilmiş bir resmin iterasyon unda 30. ila 40. kademeye kadar kaotik karakter bozulmadığı halde piksel sayısına bağlı olarak belirli bir iterasyon kademesinde resmin orijinal haline geri döndüğü bilinmektedir. Bu çalışmada bazı koşullarda resmin 180 derece dönerek tepetakla olduğu gösterilmiş ve dönüş şartları etüt edilmiştir. Ayrıca *Ters-Yüz Kedi dönüşümü* adını verdiğimiz alternatif bir dönüşüm incelenmiştir.

Deterministik kaostun tipik bir örneği olan *Bernoulli kaydırması* 'nın genelleştirilmesi ile yaratılan zaman dizileri, algoritmik rasgelelik tanımına tam ters düşmesine karşın, üniform olasılık dağılımlı rasgele sayı üreticisi olarak kullanılması diğer paradoksal bir sayılır.

Anahtar Kelimeler: Hamurcu dönüşümü, Arnold'un kedisi, Bernoulli kaydırması, Kaosta geri gelme

ABSTRACT:

Bakers' map is one of the stretch, cut and fold procedure examples which represent a typical chaotic model with strange attractor. The Chaotic behavior associated with exponential divergence of nearby trajectories can clearly be confirmed up to about 8 -10 steps of iteration .On the other end computer application exceeding 30-40 iterations exhibits completely different character that is no matter where you start you and up with a stable fixed point which acts as a point attractor. This paradoxical behavior is explained by studying X component of the map viz. *Bernoulli shift*.

In this respect *Arnolds' cat map* is another example which deserves attention. In contrast to its strong mixing character, in digitalized form a picture after mixing thoroughly for the first 30th to 40th step it reappears in the original form and complete recurrence is observed. It is shown that depending on pixel numbers used , the picture may topple in half period. An *alternative cat map* which we coined the name *reversed cat map* is also studied.

It is interesting to see that a generalized form of the *Bernoulli shift map* can be used to obtain random time series which may be instrumental for *Random number generators* having uniform probability distribution.

Key words: *Bakers' transformation, Arnolds' cat map, Bernoulli shift, Recurrence in chaos*

1.Giriş:

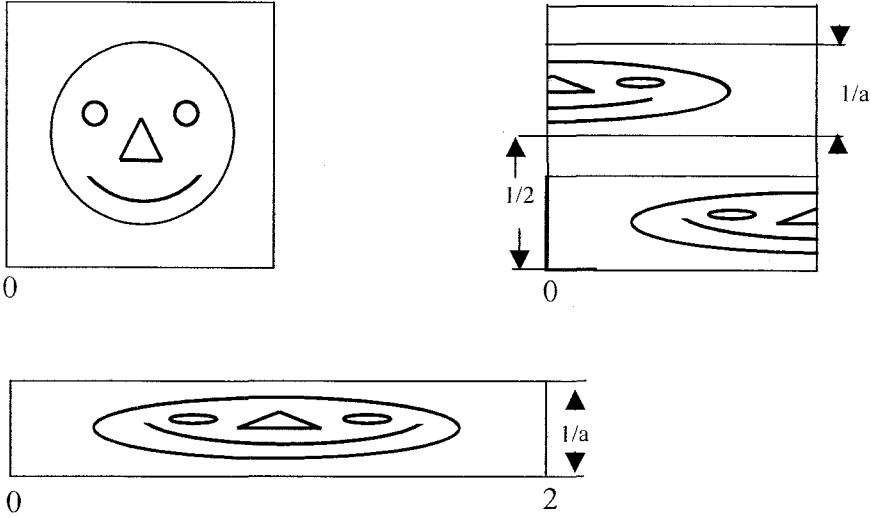
Deterministik Kaos'un tam ve genel bir tanımının yapılmasının güçlüğüne işaret edilmiş olmasına rağmen (Ref.1) kaotik dinamiğin ana karakterleri belirlidir. Bunlardan birincisi olayın yalancı rasgele görüntü sergilemesi, diğeri de ilk şartlara aşırı bağlılıktır. Sınırlı sistemlerde ikinci karakter matematiksel ifadesini *Liyapunof* eksponentinde bulur. Enrtopi ile disipatif sistemlerde çekicinin fraktal boyutu da kaos'un ölçütleri arasında sayılabilir.

Sürekli dinamik sistemlerde kaostun varlığı için faz uzayının en az üç boyutlu olması gerektiği halde iteratif sistemlerde bu sayı tersinir olmayan hallerde bir eksilir ve tek boyutlu iteratif kaotik dinamikler yaratılmasına imkân verir. Bu bildiride iki boyutlu ve tek boyutlu bazı iteratif kaotik örneklerde rastlanan paradoksal durumlar ele alınmaktadır. Bunların hepsinde uzat kes katla ya da kes yapıştır algoritması mevcuttur.

¹İstanbul Teknik Üniversitesi, Makine Fakültesi

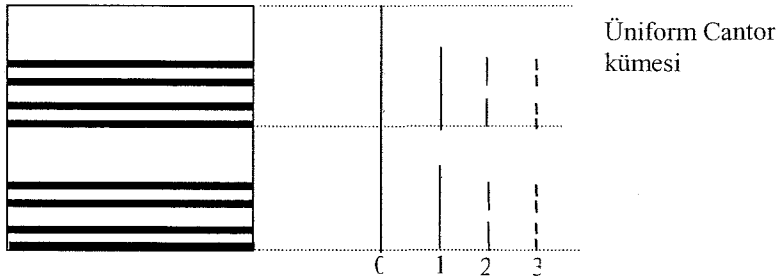
2.Hamurcu Transformasyonu

Şekilde görüldüğü gibi kenarları birim uzunlukta kare şeklinde bir hamur levhasının hamurcunun hareketine benzer şekilde iki kat uzatılıp iki eşit parçaya bölünmesi ve ikinci yarının karenin üst yarısına taşınması ile iterasyonun birinci kademesi tamamlanmaktadır. Uzatma ameliyesinde " $a > 2$ " oranında bir büzülme olmaktadır.



Şekil 1

Burada her iterasyon şerit sayısı 2 ile çarpıldığı için " k " kademe için 2^k sayıda şerit oluşur. Bu şeritlerin Y eksenindeki izdüşümlerinin limiti de *Üniform Cantor kümesi* ismi verilen bir fraktal'i tanımlar. Başka bir deyişle bu sistem garip atraktöre sahip disipatif kaotik bir sistemdir (Şekil 2). $a=2$ hali için ilerde göreceğimiz gibi sistem konservatiftir ve atraktör mevcut değildir.



Şekil 2

Transformasyonun denklemi,

$$0 < X < 1/2 \text{ için } \begin{bmatrix} X_{N+1} \\ Y_{N+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2X_N \\ Y_N/a \end{bmatrix} \dots\dots\dots (1a)$$

$$\frac{1}{2} \leq X \leq 1 \text{ için } \begin{bmatrix} X_{N+1} \\ Y_{N+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2X_N - 1 \\ 1/2 + Y_N/a \end{bmatrix} \dots\dots\dots (1b)$$

Lyapunof exponentleri:

$$X \text{ doğrultusunda } \sigma_1 = \text{Log } 2 > 0 \dots\dots\dots (2a)$$

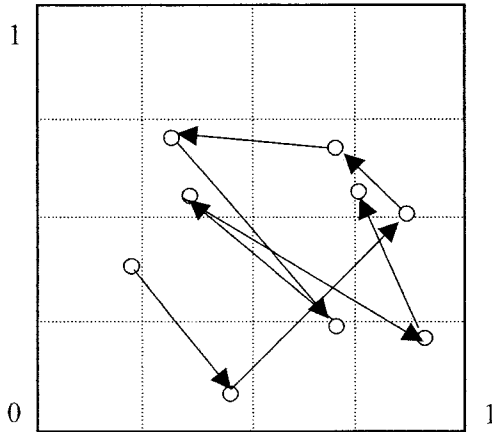
$$Y \text{ doğrultusunda } \sigma_2 = -\text{Log } a < 0 \dots\dots\dots (2b)$$

Toplam F kümesinin fraktal boyutu ise

$$\text{Dim}_H F_I = 1 + \frac{\text{Log } 2}{\text{Log } a}$$

şeklinde ifade edilebilir.

Açık bir şekilde kaotik olan bu iteratif sistemin belirli keyfi bir başlangıç noktasından geçen yörüngesinin ilk 8 kademesi şekilde gösterilmiştir. Burada Kaotik karakter gözlenmektedir; ancak iterasyona devam edildiği takdirde yörüngenin sabit $X=0, Y=0$ noktasına odaklandığı gözlenmektedir.



Şekil 3

Dört değişik başlama noktası için 35. kademede yörüngelerin vardığı noktalar örnek olarak aşağıda verilmiştir.

$X_0 = 0,23$	→	$X_{35} = 0$
$Y_0 = 0,25$	→	$Y_{35} = 0,0004$
$X_0 = 0,45$	→	$X_{35} = 0$
$Y_0 = 0,80$	→	$Y_{35} = 0,000004$
$X_0 = 0,20$	→	$X_{35} = 0$
$Y_0 = 0,25$	→	$Y_{35} = 0,0003$
$X_0 = 0,83$	→	$X_{35} = 0$
$Y_0 = 0,54$	→	$Y_{35} = 0,000003$

Görüldüğü gibi tüm yörüngelerin sabit noktada sonlandığı teyit edilmektedir. Aslında kaotik ortamda $X=0, Y=0$ noktasının itici bir sabit nokta olması beklenirken bu uygulamada bu noktanın çekici sabit nokta gibi hareket ettiği görülmektedir. Başka bir sözle ileri kademelerde kaos 'tan bahsetmek olası değildir. Bu paradoksal durumun nedenini araştırmak için transformasyonun X eksenı üzerideki işlevini incelemek yeterli olacaktır.

3. Bernoulli kaydırması

(1) denklemlerinin X eksenindeki bileşeni, ya da başka bir sözle yörüngenin X koordinatının iteratif değişim fonksiyonu *Bernoulli kaydırması* ismi verilen,

$$X_{N+I} = 2X_N \mod I \quad \dots \dots \dots (3)$$

denklemleri ile özetlenebilir. Fonksiyonun açık ifadesi

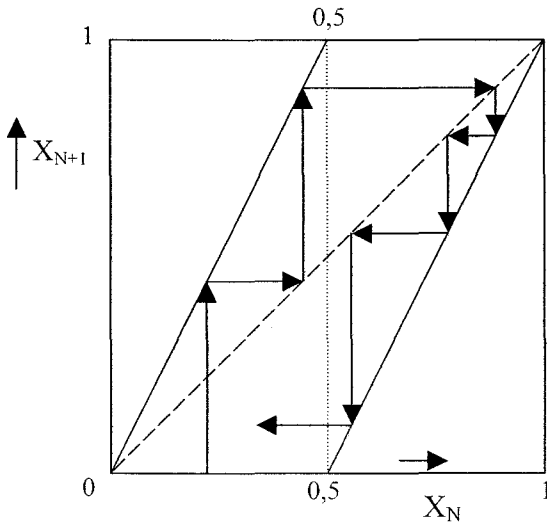
$$\begin{array}{ll} X < 1/2 & \text{için} \quad X_{N+1} = 2 X_N \\ X \geq 1/2 & \text{için} \quad X_{N+1} = 2 X_N - 1 \end{array} \quad \dots \dots \dots (4)$$

Tek boyutlu $f(X)$ dönüşümü için *Lyapunof* eksponenti

$$\sigma = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^n \log \left| \frac{\partial f(X)}{\partial X} \right| \quad \text{ve} \quad \frac{\partial f(X)}{\partial X} = 2 \quad \text{olduğundan}$$

$$\sigma = \log 2 \dots \dots \dots (5)$$

olarak bulunur.



Şekil 4

Yörüngenin geometrik çizimi elde etmek istersek fonksiyonu şekil 4'deki tarzda çizip istenilen başlangıç noktasından başlayarak ve 45 derece eğimli doğru kullanarak her adımdaki X değerini tespit ederiz.,

Şekilden görüldüğü gibi bu da kaotik gidişi doğrulamakta , sonlu adımlar için hiçbir X değeri tekrar etmemektedir.

Buna karşılık “0” ve “1” tekil noktaları ayrık tutulmak, koşulu ile hangi X noktasından başlarsak başlayalım bilgisayar ile yaptığımız iterasyonlar bizi daima sabit $X=0$ noktasına götürmektedir. Bu paradoksal durum hamurcu transformasyonundaki gözlemimizi doğrulamaktadır.

Şimdi bunun nedenini bulmak için Bernoulli kaydırmasını daha yakından inceleyelim

Bernoulli kaydırmasının nümerik anlamı:

$(0,1)$ entervalinde bir X noktası 2 tabanına göre

$$X=0, a_1 a_2 a_3 a_4 \dots = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i a_i \quad (a_i \in 0,1) \quad \dots \quad (6)$$

şeklinde yazılır. Kaydırma işlemi de buna göre aşağıda görüldüğü gibi X_N den X_{N+1} ' e

geçerken virgölün sağa kaydırması ve tam sayının atılması ile gerçekleştirilir.

$$X_N = 0, a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 \dots$$

$$X_{N+1} = 0, a_2 a_3 a_4 a_5 \dots$$

Burada dinamik sistemin ilk şartlara aşırı bağıllığı şöyle görülebilir. Birbirinden virgülden sonra ancak 10. hanede fark eden birbirine yakın iki başlangıç noktasını ele alırsak.

$$X_0 = 0, a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 \dots a_{10} a_{11} a_{12} \dots$$

$$X_0^1 = 0, a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 \dots (a_{10})^1 (a_{11})^1 (a_{12})^1 \dots$$

Her iterasyonda kaydırma ile ortak bit lerin sayısı küçüldüğünden bu noktalar arasındaki fark artıyor ve 9. iterasyonda iki nokta arasında hiçbir benzerlik kalmıyor.

$$X_9 = 0, a_{10} a_{11} a_{12} \dots$$

$$X_9 = 0, (a_{10})^1 (a_{11})^1 (a_{12})^1 \dots$$

Buradan şu sonuç çıkar ki eğer başlangıç noktası irrasyonel bir sayı ise sayıyı temsil eden “a” lar dizisinde hiçbir periyodiklik olmadığından yörünge tamamen kaotiktir.

Buna karşılık rasyonel sayıdan başlayan yörüngeler ise periyodik olmak zorundadır. Çünkü bu sayıların 2 tabanına göre açılımlarında ya periyodik tekrarlar ile sonsuza gidilir ya da sayı sonlu sayıda hane içerir. Örneğin 1/5 ile başlayan yörüngenin periyodu 4 olur.

$$\frac{1}{5} \quad \frac{2}{5} \quad \frac{4}{5} \quad \frac{3}{5} \quad \frac{1}{5} \quad \text{Periyot 4}$$

1/5 in 2 tabanına göre açılımın verdiği periyodik dizi şu şekildedir:

$$0,1110111011101110111 \dots$$

Eğer, virgülden sonraki hanelerin sayısı sonlu ise kaydırma işleminde bu kademedan sonra daima sıfır elde edileceğinden periyodu 1 olan noktaya gelinmiş olur.

Sonuç: Rasyonel sayılardan başlayan yörüngeler kaotik değil periyodiktir. Kaotik yörünge ancak irrasyonel bir başlangıç sayısından elde edilebilir.

Burada yine **paradoksal bir görüntü** ile karşılaşmaktayız. (0,1) entervali arasında sonsuz sayıda olan rasyonel sayı kaos vermediği ve ancak bunların dışındaki noktalardan kaosa gidilebildiği halde bu transformasyonun kaotik olduğu nasıl ileri sürülebiliyor?

Bunun nedeni şöyle açıklanabilir. Cantor savına göre rasyonel sayılar sayılabilir sonsuz olup bunların miktarı $\aleph_0$ ile temsil edilir. İrrasyonel sayılar ise sayılamaz sonsuz olduğundan $\aleph_1$ ile temsil edilir. $\aleph_0 < \aleph_1$ göre sonsuz büyüktür. (0,1) entervalinde herhangi rasgele bir reel sayı seçiminde rasyonel sayıya rastlama olasılığı “sıfır” buna karşı irrasyonel sayılara rastlama olasılığı ise “1” dir. (Ref. 2)

Diğer bir paradoksal Durum

Bernoulli kaydırmasında bilgisayar uygulamasıyla yörüngeleri izleseک aşağıdaki iki örnekte görüldüğü gibi periyodik olması beklenen tüm yörüngeler daima sıfıra gitmektedir.

N	X	X
0	0.2	0,3333333
1	0.4	0,6666667
2	0.8	0,3333334
3	0.6	0,6666667
4	0.2	0,3333335
5	0.4000001	0,666667
6	0.8000002	0,333334
7	0.6000004	0,6666679
8	0.2000008	0,3333359
9	0.4000015	0,6666718
10	0.8000031	0,3333435
11	0.6000061	0,666687
12	0.2000122	0,333374
13	0,4000244	0,666748
14	0.8000488	0,3334961
15	0.6000977	0,6669922
16	0.2001953	0,3339844
17	0.4003906	0,6679688
18	0.8007813	0,3359375
19	0.6015625	0,671875
20	0.203125	0,34375
21	0.40625	0,6875
22	0.8125	0,375
23	0.625	0,75
24	0.25	0,5
25	0.5	0
26	0	0
27	0	0

Bu oluşumun nedenine gelince, bilgisayar kapasitesinin sınırlı olması yüzünden 2 tabanına çevrilen sayının hane sayısı sınırlı sayıda “bit” ten ibarettir. Virgülün kaydırılması suretiyle anlamlı “ bit” ler bittikten sonra iterasyonda daima sıfır elde edilecektir. Başka bir değişle bilgisayar irrasyonel sayıları tanıyamama özelliğine ek olarak tekrar eden sonsuz diziye sahip bir sayıyı da yuvarlatıp sonlu haneli olarak işlem yapmaktadır.

Hamurcu transformasyonuna geri dönersek $X=0$ a eriştikten sonra yalnızca (1a) bağıntısı geçerli olur ve Y değeri her defasında $1/a$ oranında küçülerek sıfıra gider. Bu suretle paradoksal görüntü açıklığa kavuşur.

4. Bernoulli kaydırmasında tam sayılar ile işlem (ayrık , dijital sistem)

(0,1) intervali yerine örneğin 10 pikseli bir dizi ele alınsa

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
---	---	---	---	---	---	---	---	---	----

$$S=10$$

kaydırma fonksiyonunun tanımı genelde

$$2X \leq S \quad \text{için} \quad X_{N+1} = 2X_N$$

$$X_{N+1} = f(X_N) \quad \dots\dots\dots (7)$$

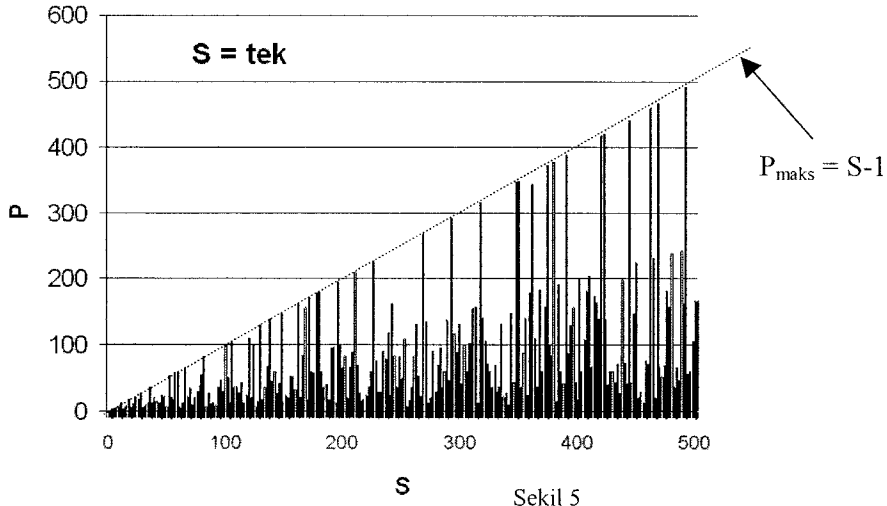
$$2X > S \quad \text{için} \quad X_{N+1} = 2X_N - S$$

şeklinde yapılabilir. Burada sistem ayrık olarak ele alındığından yani sürekli olarak tam sayılar ile işlem yapıldığından bilgisayarın kapasite ve yuvarlatma kısıtlaması ortadan kalkar.

Herhangi bir başlangıç noktasından başlayan yörünge S piksel sayısının sonlu olması nedeniyle sonunda daha önce geçtiği noktalardan birine dönmek zorunluluğunda olduğundan bu noktadan sonra periyodik bir dizi oluşturacaktır. S sayısına bağlı olarak en büyük periyodu bulmak istersek sonuncu pikselin sabit nokta oluşu nedeni ile kullanılamayacağı düşünülmektedir.

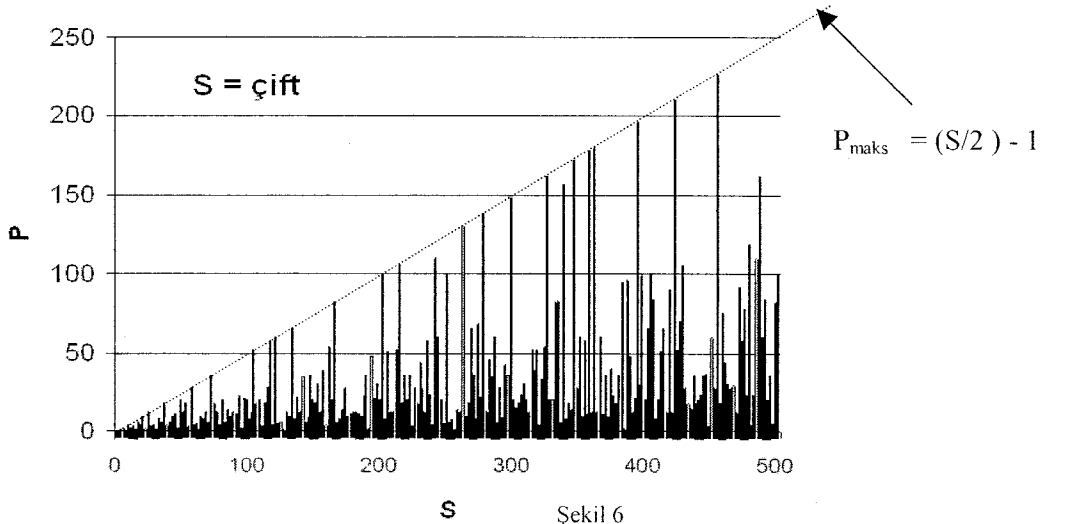
$$P_{maks} = S - 1 \quad \dots\dots\dots (8)$$

basit bağıntısı bulunur. Burada ilginç olan bir saptama şudur : her S piksel sayısı için tüm noktaların geri döndüğü bir periyot mevcuttur.

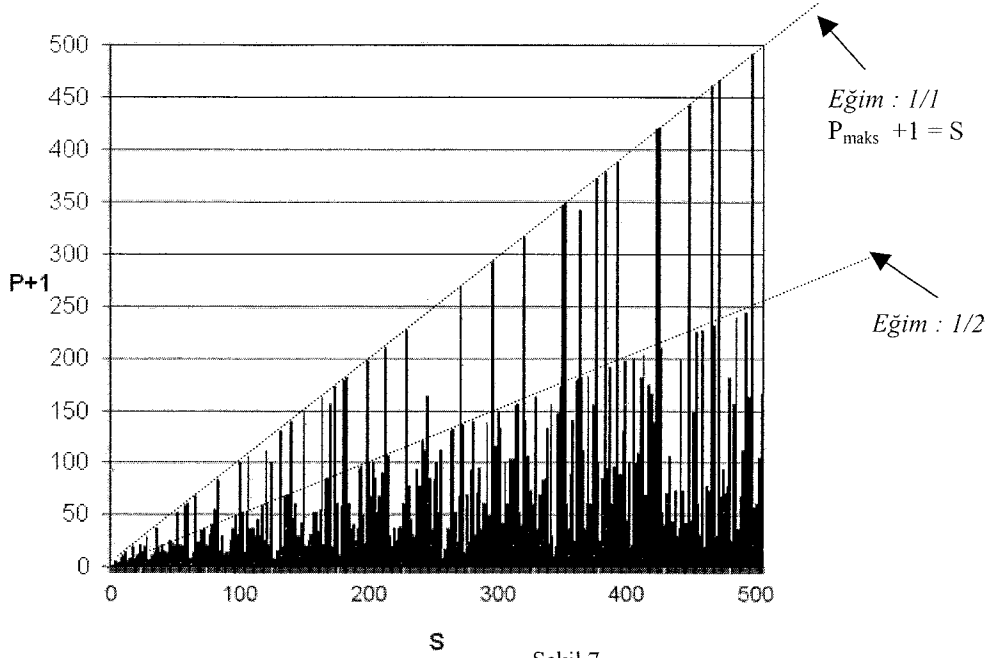


Sekil 5

Başlama noktalarına göre değişik periyotta yörüngeler olabilir ancak bunlar fondamantal periyot diyebileceğimiz ana periyodun tam sayı bölenleri yani harmoniklerdir.



Sekil 6



Şekil 7

Fondamatal periyot S piksel sayısının karmaşık bir fonksiyonu olmakla birlikte Şekil 5-7 de verilen diyagrama paralel olarak aşağıdaki saptamalar kolaylıkla ve sırası ile kanıtlanabilir: Bu kanıtlamaları yer darlığı nedeni ile vermiyoruz

- $P(\text{üst limit}) = S - 1$ $P \leq S - 1$
- $P(S) = P(2S) = P(2^k \cdot S)$
- Üst limit yalnızca tek sayılı S lerde gerçekleşir

Çift sayılı “ S ” değerleri için

$$P(\text{üst limit}) = (S/2) - 1 \quad \dots \dots \dots (9)$$

bağıntısı geçerlidir. Bu yüzden Şekil 7 de üst limitleri sınırlayan doğrulardan tek S ' lere karşı gelen doğrunun eğimi $1/1$ olup çift S ' lere karşı gelen doğrunun eğimi ise $1/2$ dir.

5. Arnold'un kedisi

Bu transformasyon lineer ve sabit alanlı , “Hamiltonien “ kaotik bir modeldir.

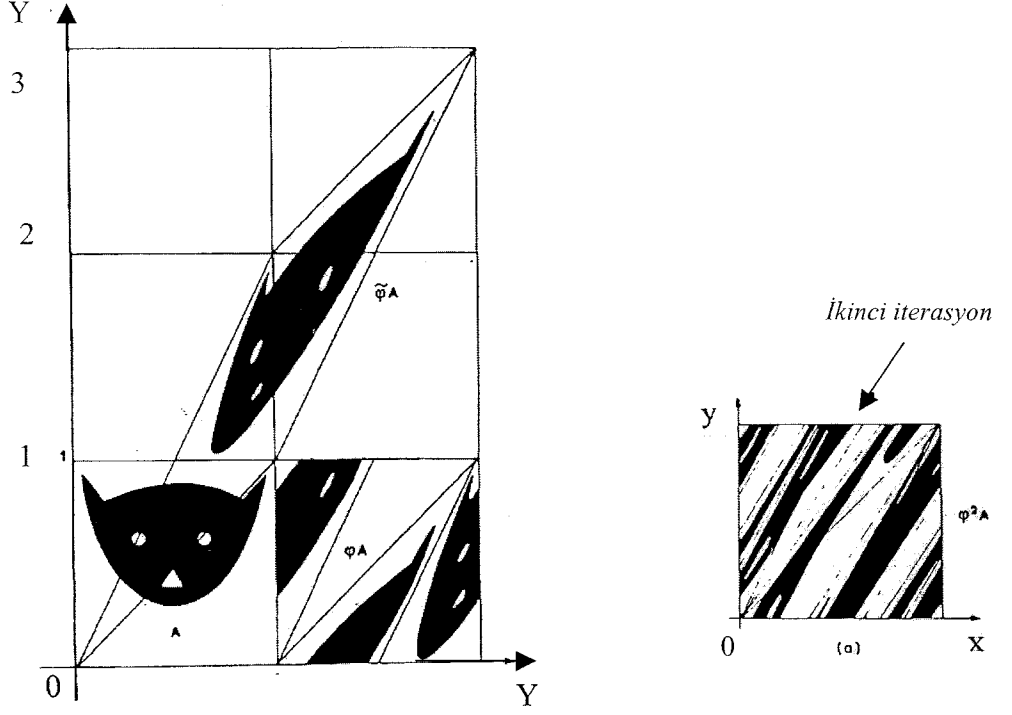
$$\begin{bmatrix} X_{n+1} \\ Y_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_n \\ Y_n \end{bmatrix} \quad (\text{mod } 1) \quad \dots \dots \dots (10)$$

bağıntısı ile belirli olan Kedi transformasyonu Şekil 6 da görüldüğü gibi yine uzat kes katla işlemini içermektedir. Lineer denklem sisteminin katsayılar matrisinden

$$\lambda_+ = \frac{3+\sqrt{5}}{2}, \quad \lambda_- = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \quad \lambda_+ \lambda_- = 1 \quad \dots \dots \dots (11)$$

şeklinde 2 pozitif özdeğer bulunur. Özdeğer vektörleri ise karşılıklı olarak

$$\frac{y}{x} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \phi = 1.618 \text{ altın oran, } \frac{y}{x} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = -\frac{1}{\phi} = -0.618 \text{ şeklindedir.}$$



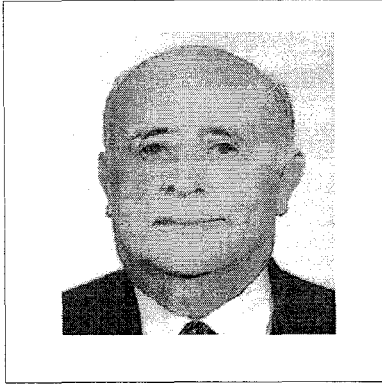
Şekil 8

Pozitif Lyapunov eksponenti : $\sigma = \text{Log} \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2} \right)$ (12)

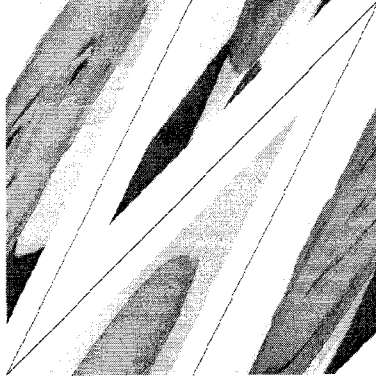
N. iterasyon kademesinde fonksiyonun karakteristik matrisi “ F_n ” Fibonacci serisinin “n.” “elemanını göstermek üzere şu ilginç bağıntı ile ifade edilebilir:

$$T^n = \begin{bmatrix} F_{2n-1} & F_{2n} \\ F_{2n} & F_{2n+1} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (13)$$

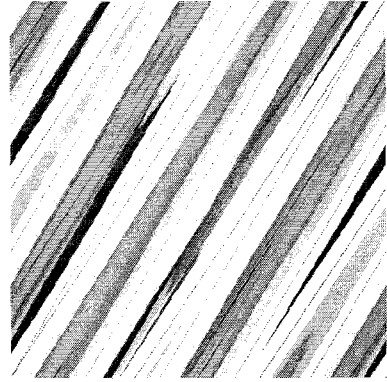
SxS (bu örnekte S=498) pikseli bir resmi düşünelim; başka bir sözle bir resim taranarak bu şekilde dijitalize edilmiş olsun? Söz konusu *Arnold* transformasyonunu bu resme iteratif bir şekilde arka arkaya uygulayalım. Şekil 9 da görüldüğü gibi ilk kademelerden itibaren kuvvetli bir karışım oluşmakta ve resim kimliğini tamamen kaybetmektedir. Ancak tüm noktalarının belirli bir kademede tekrar aynı yere geldiğini ve resmin yeniden eski şekli ile belirdiğini görüyoruz. Başka bir sözle Bernoulli kaydırmasında olduğu gibi tüm yörüngelerin ortak bir periyodu vardır. Buna fondamental periyot diyelim.



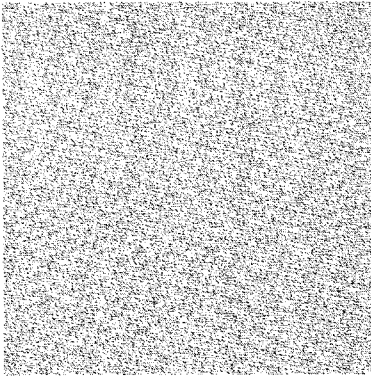
N=0



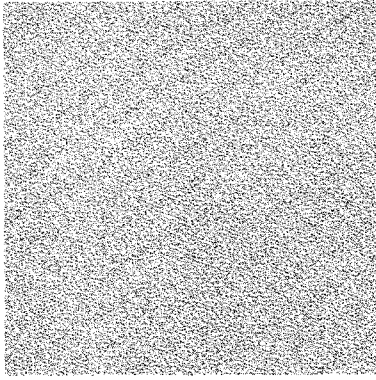
N=1



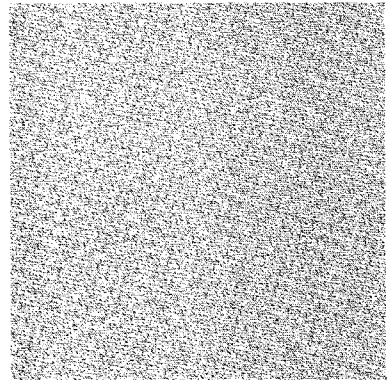
N=2



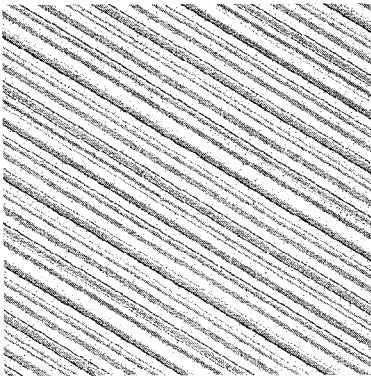
N=10



N=30



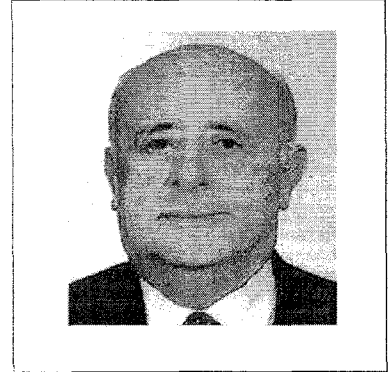
N=52



N=80



N=83



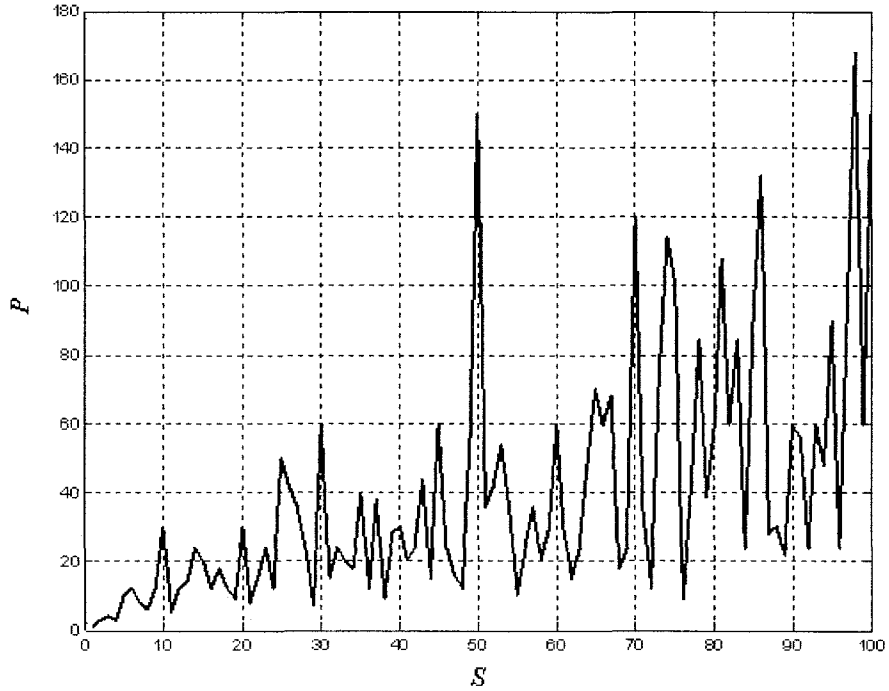
N=84

Şekil 9 Arnold transformasyonunda geri geliş

Her S değeri için bir P geri geliş periyodu mevcuttur. Örnekte $S = 498$ için, $P = 84$ olduğu görülüyor. P ile S arasında karmaşık bir ilişki mevcut olup bu bağıntı henüz tam olarak saptanmış değildir. Şekil 10 da sayısal olarak elde ettiğimiz sonuçlardan bir örnek verilmiştir. Bu diyagramın hesaplanmasında kullanılan program incelenerek bazı bulgulara erişilmiştir.

Bunlar şöyle özetlenebilir.

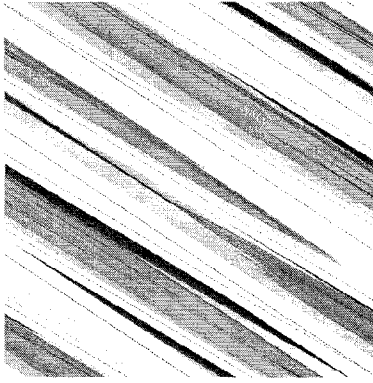
- Tüm noktaların geri gelme periyotları eş değildir. Fondamantal periyodun altında harmoniklere (yani ana frekansın tam katlarına) sahip daha küçük periyotlu noktalardan başlayan yörüngeler mevcuttur. Yalnız fondamantal periyotta tüm noktalar eski yerlerine dönerler ve tam geri gelme gerçekleşir
- $P=S+1$ şeklinde olan tüm S ler asal sayı, ancak bunun karşıtı doğru değil
- $S = 2.5^k$ için $P=3S$ (Ref. 4)
- $S=5^k$ ve $S = 6.5^k$ için $P= 2S$ (Ref. 4)



Şekil 10 Geri gelme Periyotları

5.1 BAŞ AŞAĞI DÖNME OLAYI :

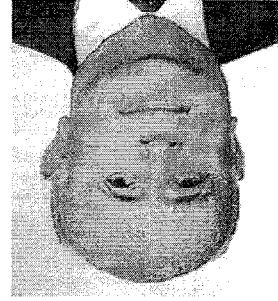
Dijitalleştirilmiş resmin arka arkaya yapılan “kedi dönüşümleri “ ile belirli bir periyotta geri gelmesi literatürde “ *Recurrence* “ olarak bilinen fakat fazla etüt edilmemiş bir olaydır. Fakat şimdiye kadar bilgimize göre hiç değinilmemiş bir olay yarım periyotlarda karşılaşılabilen “ baş aşağı dönme “ olayıdır. Şekil 9 resmin 84. iterasyon kademesinde ilk görüntüsü ile tamamen geri geldiğini görüyoruz. Burada ilk bakışta 30. kademe ile 50. kademe arasında kaotik karışmanın devam ettiği izlenimi elde edilebilir. Ancak bu aralık dikkatlice ve kademe kademe izlenirse resmin 42. kademe Şekil 11 de görüldüğü gibi resmin “Baş aşağı dönmüş olarak “ geri geldiği açıklıkla tespit edilir.



N=40



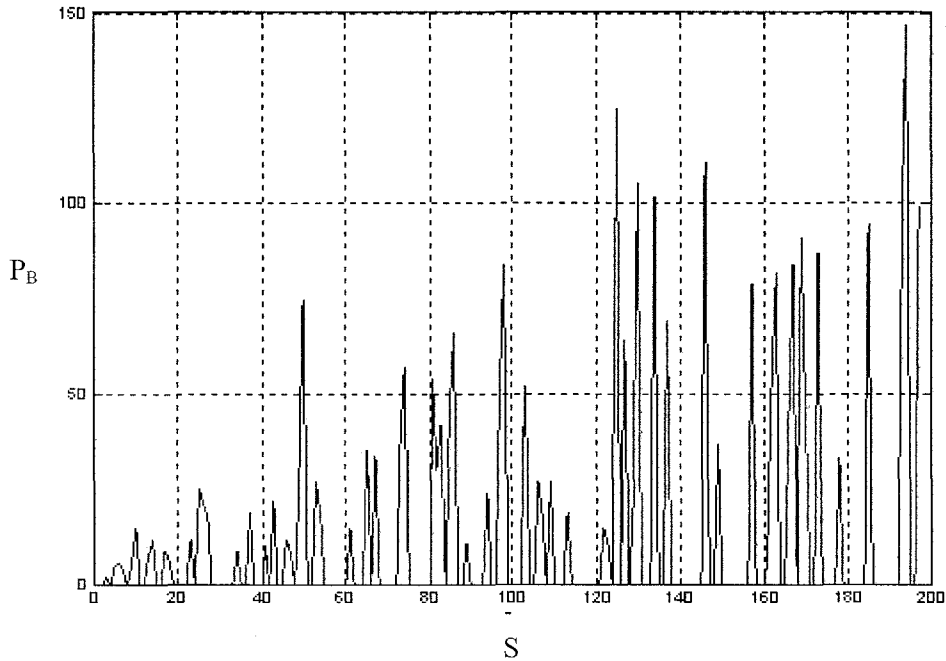
N=41



N=42

Baş aşağı dönme durumunun incelenmesinde bu dönmenin resmin 180 derecelik bir açı ile çevrilmesine karşı geldiği görülmüştür. Bu surete baş aşağı dönme periyodunun tam geri gelme periyodunun yarısına eşit olduğu açıktır. Ayrıca matematik model deneme sonuçları incelenerek aşağıda özetlenen tespitler yapılmıştır:

- Tek sayılı Periyotlar için baş aşağı dönme mümkün değildir..
- Bazı S değerleri için baş aşağı dönme gerçekleşmemektedir.
- $S = 100$ mertebesi üzerinde bir piksel sayısına kadar olan bölgede baş aşağı dönüşün olduğu hallerin toplam tam geri gelme sayısının üçte biri mertebesinde olduğu görülüyor.
- Resmin 180 derece döndüğü baş aşağı dönme olaylarında bütün noktalar bu işleve katılmıyor. Bir kısım yerlerinde kalıyor ve ikinci yarım dönmeden sonra tam periyoda katılıyorlar ve tam geri gelme gerçekleşiyor..



Şekil 11 Baş aşağı dönme periyotları

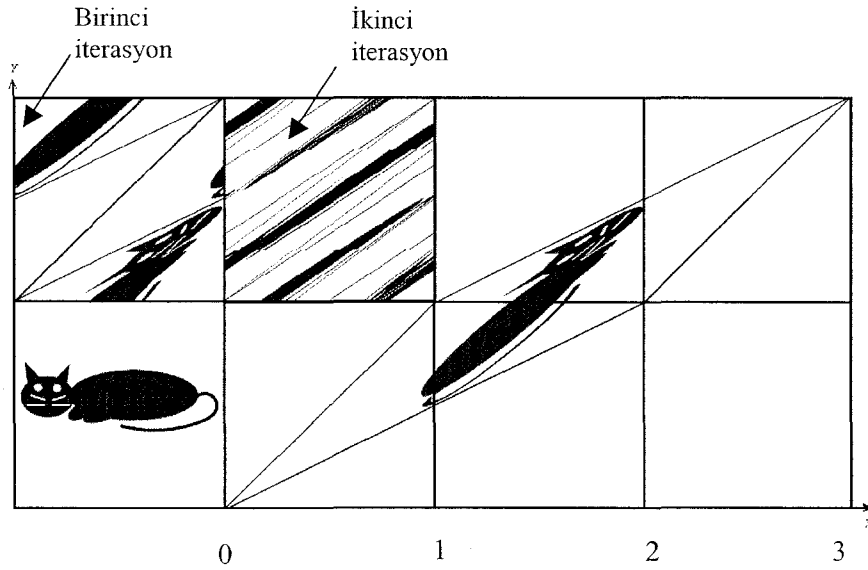
6. Alternatif kedi (TERS YÜZ KEDİ) transformasyonları

Standart Arnold' un kedisi transformasyonu (10) ifadesi ile verilmişti. Burada katsayılar matrisinin birbirinin transpozesi şeklinde ifade edilen iki dönüşüm "alternatif kedi transformasyonları" olarak görülebilir. Bu fonksiyonlar aşağıdaki şekilde ifade edilirler : :

$$\begin{bmatrix} X_{N+1} \\ Y_{N+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_N \\ Y_N \end{bmatrix} \pmod{1} \quad \dots\dots\dots (14 a)$$

$$\begin{bmatrix} X_{N+1} \\ Y_{N+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_N \\ Y_N \end{bmatrix} \pmod{1} \quad \dots\dots\dots (14 b)$$

Bu iki transformasyon bir bakıma bir birinin eşidir; öyle ki birinde X ' ler ile Y' ler yer değiştirilirse diğeri elde edilir. Bu bakımdan bu dönüşümlerin iteratif olarak uygulanmasında birisinin " geri gelme " ve "baş aşağı dönme periyotları " diğerininkine eştir.



Şekil 12

Burada özdeğerler:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 1 + \sqrt{2} \\ \lambda_2 &= 1 - \sqrt{2} \end{aligned} \quad \text{olup} \quad \text{Pozitif Lyapunof eksponenti.} \quad \sigma = \text{Log} (1 + \sqrt{2}) \quad (15)$$

değerindedir. Bu transformasyonda standart Arnold' un kedisi transformasyonunda gözlenen genel özellikler yani Tam geri geliş ve Baş aşağı dönme olayları aynen izlenmiştir. Yer darlığı nedeni bunlarla ilgili sayısal sonuçlar verilmemiştir. Standart kedi dönüşümünde olduğu gibi burada da Baş aşağı dönüş "S x S " matrisinin tüm noktaları için

oluşamamaktadır. Ayrıca her S sayısı için böyle bir dönüşün var olmadığı yani baş aşağı dönüşün hiç gözlenmediği 1 S değerleri de mevcut bulunmadığı saptanmıştır.

Bunlara ek olarak bu Standart ve alternatif kedi transformasyonlarını şematik olarak gösteren Şekil 8 ve Şekil 12 nin incelenmesinde kolayca görülebileceği Standart Kedi transformasyonu ile Alternatif Kedi transformasyonu arasında önemli bir fark mevcuttur. Bu da Şekil 12 de gösterilen şemada resmin her itersayonda ters yüz edilmesidir. Bu bakımdan bu dönüşüme *Ters yüz kedi değişimi* adını vermiş bulunuyoruz.

7. Konservatif hamurcu Transformasyonu

Yukarıda (1) denklem sistemi ile tanımladığımız genel Hamurcu transformasyonunda " a " büzülme oranını 2 ye eşit alırsak bu dönüşüm sabit alanlı, enerji kaybı olmayan kısacası Hamiltoniyen bir fonksiyonu temsil eder. Bu halde disipasyon olmadığı için çekici de yoktur.

Sistemin Lyapunof eksponentleri ise

$$\sigma_1 = \text{Log } 2 > 0$$

$$\sigma_2 = \text{Log } 0,5 < 0$$

den ibarettir.

2 tabanına göre yazılmış koordinatlara sahip bir başlangıç noktasından geçen yörüngeyi belirlemek için:

X değerlerinde virgöl bir hane sağa, Y değerlerinde ise de virgöl bir hane sola kaydırılacaktır.

Ancak $2X$ 'in "1" den büyük olması halinde Y değerine $1/2$ eklemek gerekir. Bu ilave de genel olarak "0, a_1 " şeklinde ifade edilebilir. Buna göre örneğin

$$X_0 = 0, a_1 a_2 a_3 a_4 \dots$$

$$Y_0 = 0, b_1 b_2 b_3 b_4 \dots$$

noktası birinci iterasyonda

$$X_1 = 0, a_2 a_3 a_4 \dots$$

$$Y_1 = 0,0 b_1 b_2 b_3 b_4 \dots + 0, a_1 \dots = 0, a_1 b_1 b_2 b_3 b_4$$

noktasına gelir. Bunu daha elegan bir şekilde ifade etmek istersek. X ve Y 'yi sırt sırta

$$\dots b_4 b_3 b_2 b_1 = a_1 a_2 a_3 a_4 \dots$$

şeklinde dayamak suretiyle elde edilen dizide her iterasyonda virgölün bir hane sağa kayacağını söyleyebiliriz. Bu formu kullanarak aşağıdaki çıkarımları yapmak için biraz dikkat yeterlidir.

- X_0 başlama noktası irrasyonel bir sayı ise kaotik bir yörünge beklenecektir
- X_0 sınırlı sayıda fraksiyon (hane) içeriyorsa : (Bilgisayardaki durum bir örnek)
X değerleri için "0" noktası sabit noktadır
Y değerleri de asimptotik olarak sıfıra gider.
- X_0 Sonsuz terimli rasyonel bir sayı ise, periyodik bir yörüngeye yakınsar

Sonuç olarak bilgisayar uygulamalarında görülen paradoksal durum daha önce disipatif sistemde gözlenene benzer şekilde burada da karşımıza çıkar.

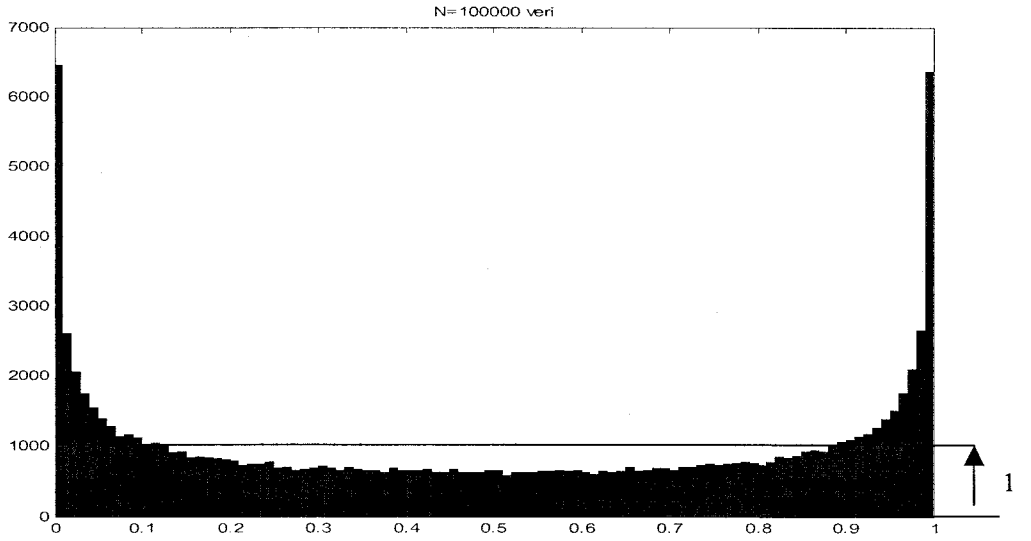
8. Yalancı rasgeleliğin Rasgele sayı üretiminde kullanılması

Deterministik kaos 'un ana karakterlerinden birisinin yalancı bir rasgele görüntü sergilemesi olduğu bilinmektedir. Acaba bu özellik rasgele sayılar üretilmesinde bir metot olarak kullanılabilir mi?

İlk örnek olarak tamimiyle ergodik bir olay yaratan Lojistik dönüşümü ele alalım

$$X_{N+1} = 4 X_N (1 - X_N) \quad \dots\dots\dots (16)$$

Bu denklemi (0,1) entervalinde herhangi bir X noktasından başlayarak iteratif şekilde 100 000 kez uygulayalım. Söz konusu entervali 100 eşit bölgeye bölerek yörüngeyi bu bölgelere uğrama sayılarını bir histogramda gösterelim. Bu suretle limite gerçek bir olasılık dağılımına ulaşılacaktır. Histogramın kapladığı alan 100 000 geçiş iterasyondaki uğrama noktası 100 000 olduğundan herhangi bir noktanın tüm enterval içine düşme olasılığı %100 =1 dir. Bir iterasyon noktasının seçilen bir bölgeye düşme olma olasılığı ise o bölgeye ait histogram alanının tüm bölge alanına oranı kadardır. Bu nedenle bu histogramın limiti bize olasılık dağılımını verir. Şekil 13 görüldüğü gibi bu dağılım üniform olmaktan çok uzaktır. Bu nedenle düzgün dağılımlı rasgele bir sayı dizisi üretmek için pek uygun değildir.

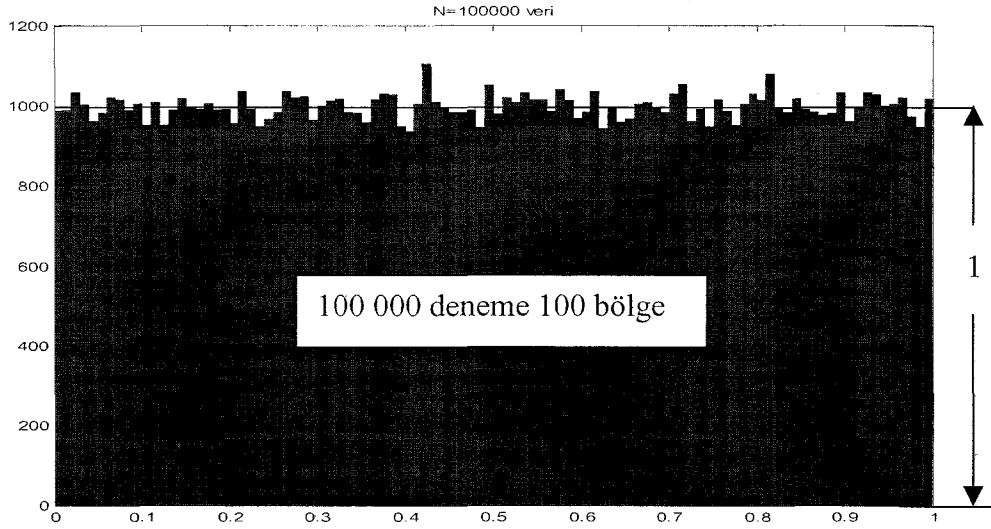


Şekil 13 Lojistik denklem olasılık dağılımı.

Bunun yerine bu kez Bernoulli kaydırmasını genelleştirip “2” katsayısı yerine değişik tamsayıları denesek en uygun çözüm olarak aşağıdaki dönüşüm denklemine gelinmektedir

$$X_{n+1} = 16807 X_n \text{ Mod } 1 \quad \dots\dots\dots (17)$$

Yukarıdakine benzer şekilde 100 000 deneyin sonucunda elde edilen histogram Şekil 14 te gösterilmiştir. Burada dağılımın ufak sapmalara rağmen üniforma yakın olduğu gözlenmektedir



Şekil 14 (Özel Bernoulli Kaydırması modeli ile olasılık dağılımı)

Deney sayısı artırılarak üniforma daha yakın bir olasılık dağılımı elde edilebilir. Boyutsuzlaştırma yapılırsa $(0,1)$ aralığı "1" ve üniform dağılım yüksekliği de şekilde görüldüğü gibi "1" alınır. Yörünge'nin enterval üzerinde herhangi bir aralığa uğrama olasılığı bu aralığın tüm entervale oranı kadar olur.

Buradaki paradoksal durum da tümüyle deterministik bir bağıntı kullanılarak tümüyle raslantısal bir dağılımın elde edilmesidir.

Kaynaklar:

1. R.Bown "Clarifying Chaos, Examples and Counter Examples", Int.J. Bifurcation and Chaos. Vol.6. No 2, 1996
2. Gregory Chatain "Metamath the Quest for Omega" Panteon Books Newyork 2005
3. Eric W.Weissten "Arnolds' Cat Map " from MathWorld a Wolfram Web Resource [http// Mathworld. Wolfram. com](http://Mathworld.Wolfram.com).
4. Cabriel Peterson "Arnold's Cat Map" [http/ online.redwoods.us/instruct/darnold/maw/catmap.htm](http://online.redwoods.us/instruct/darnold/maw/catmap.htm)"
5. A.W. Moore "A Brief history of Infinity "Scientific American April 1995