

## Tamamlayıcısı Bir Q-Grubu Olan Frobenius Gruplarının Sınıflandırılması

Didem İşlekel Öztürk\*

### Abstract

In this paper, Frobenius groups the complements of which are Q-groups are investigated with the help of Sylow 2-groups  $Z_2$  or  $Q_8$ .

### Özet

Bu çalışmada, tamamlayıcısı bir Q-grubu olan Frobenius grupları, Sylow 2-alt grupları yardımıyla, sınıflandırılmıştır.

**Key Words:** Frobenius groups, Q-groups.

Frobenius grupları, Q-grubu olmaları koşulu ile Ion Armeanu ([1]) tarafından tamamen sınıflandırılmıştır. Bu çalışmada ise Frobenius gruplarının, daha zayıf bir koşul altında; sadece tamamlayıcısının bir Q-grubu olması halinde, nasıl karakterize edileceği anlatılacaktır.

**Tanım:** Adi kompleks gösterişli tüm karakterleri rasyonel değerli olan sonlu bir gruba bir Q-grubu denir ([4]).

**Teorem 1:** Triviyal olmayan bir Q-grubu çift mertebelidir; dolayısı ile bir Sylow 2-alt grubu vardır ([4]).

**Tanım :**  $G$ , sonlu elemanlı bir  $\Omega$  kümesi üzerinde sonlu bir tranzitif permütasyon grubu ve  $\alpha \in \Omega$  olsun.  $H = G_\alpha \neq \{ 1_G \}$  ve  $G$  nin,  $\Omega$  nın birden fazla noktasını sabit bırakan tek elemanı  $1_G$  ise,  $G$  ye bir Frobenius grubu,  $H = G_\alpha$  ya da  $G$  içinde bir Frobenius tamamlayıcısı denir.  $\Omega$  nın hiçbir elemanını sabit bırakmayan permütasyonlar ile birim elemanın oluşturduğu kümeye ise Frobenius çekirdeği adı verilir ([2]).

1) **Teorem 2:**  $G$ ,  $\Omega$  kümesi üzerinde bir tamamlayıcısı  $H$ , çekirdeği  $K$  olan bir Frobenius grubu olsun. Bu durumda aşağıdaki önemeler doğrudur ([3]):

- 2)  $K \triangleleft G$ ,  $K \cap H = \{ 1_G \}$  ve  $KH = G$  dir.
- 3)  $H$  çift mertebeli ise,
  - a)  $H$  sadece bir tane involüsyon içerir,
  - b)  $H$  nın involüsyonu  $i$  ile gösterildiği taktirde, her  $k \in K$  için  $k^i = i^{-1}k i = k^{-1}$  dir,
  - c)  $K$  alt grubu komütatiftir.
- 4)  $K$  nilpotenttir.

\* Matematik Bölümü Mimar Sinan Üniversitesi 34349 Beşiktaş - İstanbul

**Teorem 3:**  $G$ , sonlu  $\Omega$  kümesi üzerinde çekirdeği  $K$ , tamamlayıcısı  $H$  olan bir Frobenius grubu ve  $H$  bir  $Q$ -grubu olsun. Bu durumda:

- 1)  $G$  nin bir Sylow 2-alt grubu, ikinci mertebeden bir grup veya sekizinci mertebeden genelleştirilmiş quaternion grubudur.
- 2)  $G$  nin bir Sylow 2- alt grubu  $Z_2$  ise,  $E_3$  bir elemanter abelyen 3-grubu olmak üzere,  $G = KE_3Z_2$  dir.
- 3)  $G$  nin bir Sylow 2- alt grubu  $Q_8$  ise,  $Z_3$  üçüncü mertebeden devresel grubu göstermek üzere,  $G = KZ_3Q_8$  dir.

**İspat:** 1) Teorem 1'e göre  $H$ , çift mertebelidir;  $H$  nin mertebesi iki olan en az bir elemanı vardır. Teorem 2, 3-a) gözönüne alındığında,  $H$  nin sadece bir tane involüsyon içerdiği sonucuna varılır.  $H$  nin bu asal involüsyonu içeren bir Sylow 2-alt grubu,  $Z_2$  veya  $Q_8$  dir ([4]).  $K$  alt grubunun, Teorem 2, 3-c) de belirtilen sonuçların ışığında komütatif olduğu açıktır. Üstelik  $K$  tek mertebeli bir alt gruptur. Çünkü  $x \in H$ ,  $|x| = 2$  ve  $k \in K$  ise Teorem 2, 3-b) den dolayı,

$$k^x = k^{-1} \Rightarrow x = k^{-1}xk \Rightarrow k \in C_G(k) \leq H \quad (1)$$

elde edilir ki, bu bir çelişkidir. Şu halde  $K$  nin ikinci mertebeden bir elemanı yoktur.

O halde  $G$  nin bir Sylow 2-alt grubu,  $H$  nin da bir Sylow 2-alt grubudur; böylece teoremin birinci parçası ispatlanmış olur.

2)  $H$  bir  $Q$ -grubu ve  $Z_2 \in \text{Syl}_2(H)$  ise,  $E_3$  bir elemanter abelyen 3-grubu olmak üzere,

$$H = E_3Z_2 \quad (2)$$

dir ([4]).  $G = KH$  eşitliği ile (2) deki bağıntı birlikte değerlendirilirse

$$G = KE_3Z_2 \quad (3)$$

sonucuna varılır.

3)  $H$  nin bir Sylow 2-alt grubu  $Q_8$  ise  $H$  aşağıdaki gruplardan birisi olmalıdır([4]):

- i)  $E_3$  bir elemanter abelyen 3-grubu olmak üzere,  $H = E_3Q_8$  dir.
- ii)  $Z_5$  beşinci mertebeden grubu göstermek üzere,  $H = (Z_5 \times Z_5)Q_8$  dir.

Her iki durumda da  $H$  çözülebilirdir.  $H$  bir  $Q$ -grubu olduğundan,  $Z(H)$  bir 2-grubudur([4]). Şu halde, ([5])'e göre  $H$  grubu,

$$H = Z_3Q_8, H \cong \text{SL}(2,3)$$

$$M \in \text{Syl}_p(H) \text{ (} p \text{ asal, } p > 2), M \triangleleft H \text{ ve } W = Q_8 \times M \text{ için } H/W \cong S_3$$

koşullarından birini sağlamalıdır. Fakat,  $Q_8 \in \text{Syl}_2(H)$  ve  $|W| = 2^3 \cdot p^r$  ( $p$  asal,  $p > 2$ ;  $r \in \mathbb{N}$ )

için  $[H : W] \neq 6$  elde edilir ve dolayısı ile  $H/W$  bölüm grubu,  $S_3$  simetrik grubuna izomorf olamaz. Sonuç olarak

$$H = Z_3Q_8, H \cong SL(2,3) \text{ ve } G = KZ_3Q_8 \quad (4)$$

bulunur.

Bu çalışma, Doktora Tezimin bir parçasını oluşturmaktadır. Yardımlarından dolayı, Prof. Dr. Erhan GÜZEL'e teşekkür ederim.

#### Kaynaklar

- [1] Armeanu, I. (1995), "Frobenius Q-Groups", İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Dergisi, 54, 23-24
- [2] Dornhoff, L., (1971), "Group Representation Theory: Part A, Ordinary representation theory", New York, Marcel Dekker.
- [3] Gorenstein, D., (1968), "Finite Groups", New York, Harper and Row.
- [4] Kletzing, D., (1984), "Structure and representations of Q-groups", New York, Springer-Verlag.
- [5] Passman, D., (1968), "Permutation Groups", New York, W.A.Benjamin.