

T.C. İSTANBUL KÜLTÜR ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

BAZILEVIČ FONKSİYONLARI

DOKTORA TEZİ

Tuğba DAYMAZ

1202010017

Anabilim Dalı: Matematik ve Bilgisayar Bilimleri

Program: Matematik

Tez Danışman : Prof. Dr. Emel YAVUZ

HAZİRAN 2025

T.C. İSTANBUL KÜLTÜR ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

BAZILEVIČ FONKSİYONLARI

DOKTORA TEZİ

Tuğba DAYMAZ

1202010017

Anabilim Dalı: Matematik ve Bilgisayar Bilimleri

Program: Matematik

Tez Danışman : Prof. Dr. Emel YAVUZ

Tez Eş Danışman : Prof. Dr. Seher Melike AYDOĞAN

Diğer Jüri Üyeleri: Prof. Dr. Mert ÇAĞLAR

Prof. Dr. Sevtap SÜMER

Prof. Dr. Fethiye Müge SAKAR

Doç. Dr. Alper ÜLKER

Dr. Öğr. Üyesi Günay ASLAN

HAZİRAN 2025

Önsöz

Lisansüstü eğitim-öğretim sürecimin en başından beri bana yol gösteren, tüm bu süreçte beni sabırla yönlendiren, cesaretlendiren, deneyimleri ve bilgi birikimiyle bana her zaman destek olan, bir kadının gücü ve başarabilecekleri konusunda bana ilham olan, anlayışlı ve destekleyici tavrıyla yolumu aydınlatan çok değerli danışman hocam Sayın Prof. Dr. Emel YAVUZ'a çok teşekkür ederim. Aynı zamanda akademik yolculuğunda bana olan inancı ve yapıcı tavrıyla potansiyelimi fark etmemde bana yardımcı olan eş danışmanım Sayın Prof. Dr. Seher Melike AYDOĞAN'a teşekkür ederim.

Hayatım boyunca bana her zaman sonsuz güç ve güven veren, desteklerini esirgemeyen canım aileme ve her kararımı sorgusuzca destekleyen sevgili eşim Berk Onur SARICAOĞLU'na teşekkürlerimi sunarım.

Haziran 2025

Tuğba Daymaz

İçindekiler

Önsöz	i
Simge Listesi	iv
Şekil Listesi	v
Özet	vi
Abstract	vii
1 Tanımlar ve Temel Özellikler	1
2 Alan Teoremleri	19
3 Büyüme ve Distorsiyon Teoremleri	33
4 Bazı Temel Alt Sınıflar	42
5 Bazilevič Fonksiyonları	60
5.1 $\mathcal{A}(\alpha, \beta, \gamma)$ Sınıfı ve Özellikleri	65

5.2	$\mathcal{A}(\alpha, \beta, \infty)$ Sınıfı için Katsayı Eşitsizlikleri	68
5.3	p -valent Bazilevič Fonksiyonları	73
5.4	$\mathcal{A}_p(\alpha, \beta, \gamma)$ Sınıfının Özellikleri	75
5.5	$\mathcal{A}_p(\alpha, \beta, \gamma)$ Sınıfındaki Fonksiyonlar için Katsayı Eşitsizlikleri	79
Kaynakça		86



Simge Listesi

$\mathcal{A}$	: Analitik fonksiyonlar sınıfı
$\mathcal{A}_p$	: p -valent (çok değerli) fonksiyonlar sınıfı
$\mathcal{B}(\alpha)$	: $\beta = 0$ durumundaki (α, β) tipinde Bazilevič fonksiyonları sınıfı
$\mathcal{B}(\alpha, \beta)$	: (α, β) tipinde Bazilevič fonksiyonları sınıfı
$\mathbb{C}$	: Kompleks düzlem
$\mathcal{C}$	: Konveks fonksiyonlar sınıfı
$\mathbb{D}$	: $\{z \in \mathbb{C} : z > 1\}$
$k(z)$	: Koebe fonksiyonu
$k_\alpha(z)$	: Koebe fonksiyonun rotasyonu
$\mathcal{K}$	: Konvekse yakın fonksiyonlar sınıfı
$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathcal{P}$	: Pozitif reel kısma sahip fonksiyonlar sınıfı
$\mathcal{P}_\alpha$	: Reel kısmı α 'dan büyük fonksiyonlar sınıfı
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathcal{S}$	: Yalınkat fonksiyonlar sınıfı
$\mathcal{S}^*$	: Yıldızl fonksiyonlar sınıfı
$\mathbb{U}$	: Açık birim disk $\{z \in \mathbb{C} : z < 1\}$

Şekil Listesi

1.1	Basit bağlantı ve basit bağlantılı olmayan domainler	2
1.2	Birim diskin $f(z) = (1 + z)^2$ fonksiyonu altındaki görüntüsü	5
1.3	Koebe fonksiyonu altında birim diskin görüntüsü	9
2.1	Alan teoremi	20
2.2	$g : \mathbb{D} \rightarrow \mathcal{E}^c$ ve $ z = r$ altında g 'nin görüntüsü C_r	25
4.1	Konveks ve konveks olmayan domainler	42

Enstitüsü : Lisansüstü Eğitim Enstitüsü

Dalı : Matematik ve Bilgisayar Bilimleri

Programı : Matematik Doktora

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Emel YAVUZ

Tez Eş Danışmanı : Prof. Dr. Seher Melike AYDOĞAN

Tez Türü ve Tarihi : Doktora - Haziran 2025

KISA ÖZET

Bazilevič Fonksiyonları

Tuğba DAYMAZ

Bu tezde öncelikle genel kavramlar ile birlikte tezin ilerleyen bölümlerinde kullanılacak bazı tanımlar, teoremler ve alt sınıflar sunulmuştur. Tezin amacı doğrultusunda, önce Bazilevič fonksiyonları ve bu fonksiyonların özel bir durumu olan p -değerli Bazilevič fonksiyonları üzerinde durulmuştur. $\mathbb{U}$ açık birim diski içinde Bazilevič fonksiyonları göz önünde bulundurularak, bu disk içinde bazı fonksiyon sınıfları tanımlanmış ve söz konusu sınıflardaki fonksiyonların çeşitli özellikleri incelenmiştir. Bu tez çalışmasının orijinal kısmında $\mathcal{A}(\alpha, \beta, \gamma)$ ve $\mathcal{A}_p(\alpha, \beta, \gamma)$ ile gösterilen Bazilevič fonksiyonlarının alt sınıfları tanımlanmış ve bu sınıflara ait temel özellikler ve katsayı eşitsizlikleri elde edilmiştir.

Anahtar Sözcükler: Bazilevič fonksiyonları, yıldızlı fonksiyonlar, p -değerli Bazilevič fonksiyonları, katsayı tahminleri.

Bilim Dalı Sayısal Kodu : 20404

University : Istanbul Kültür University
Institute : Institute of Graduate Studies
Department : Mathematics and Computer Science
Programme : PhD in Mathematics
Supervisor : Prof. Dr. Emel YAVUZ
Co-Supervisor : Prof. Dr. Seher Melike AYDOĞAN
Degree Awarded and Date : PhD. - June 2025

ABSTRACT

Bazilevič Functions

Tuğba DAYMAZ

In this thesis, general concepts as well as certain definitions, theorems, and subclasses that will be used in the subsequent chapters are first presented. In line with the objective of the study, Bazilevič functions and a special case of these functions, namely p -valently Bazilevič functions, are examined. By considering Bazilevič functions within the open unit disk $\mathbb{U}$, certain function classes defined in this disk are introduced, and various properties of functions within these classes are investigated. In the original part of this thesis, two subclasses of Bazilevič functions denoted by $\mathcal{A}(\alpha, \beta, \gamma)$ and $\mathcal{A}_p(\alpha, \beta, \gamma)$ are defined, and their fundamental properties and coefficient inequalities are given.

Key Words: Bazilevič functions, starlike functions, p -valently Bazilevič functions, coefficient estimates.

Science Code : 20404

Bölüm 1

Tanımlar ve Temel Özellikler

Bu kısımda kompleks fonksiyonlar teorisinde önemli rol oynayan bazı tanımlar verilecek ve birtakım temel özelliklerden bahsedilecektir.

Bir z_0 kompleks sayısının ε *komşuluğu*

$$|z - z_0| < \varepsilon \quad (1.1)$$

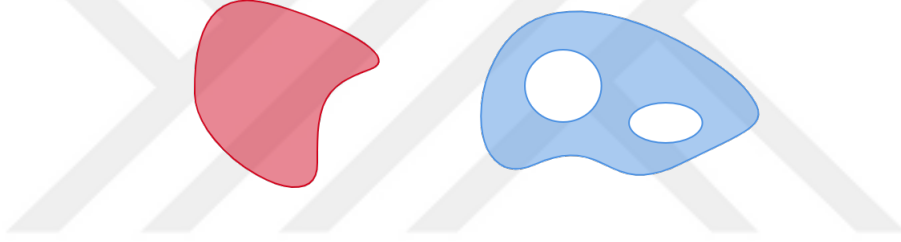
ifadesi ile verilir. Bu komşuluk, z_0 merkezli ve belirli bir pozitif ε yarıçaplı çemberin içindeki (çember üzerindeki kileri değil) z noktalarını içerir. ε değeri bilindiğinde ya da bu değerin tartışma içinde önemi olmadığında (1.1) kümesi sadece komşuluk olarak adlandırılır. z_0 hariç, z_0 noktasının ε komşuluğundaki tüm z noktalarını içeren bir komşuluğa *delikli komşuluk* denir ve

$$0 < |z - z_0| < \varepsilon$$

olarak gösterilir.

Bir z_0 noktasının sadece bir $\mathcal{D}$ kümesinin noktalarını içeren bir komşuluğu var ise z_0 'a $\mathcal{D}$ kümesinin bir *iç noktası* denir. $\mathcal{D}$ kümesinin hiçbir noktasını içermeyen bir komşuluğu bulunan bir z_0 noktasına da $\mathcal{D}$ 'nin *dış noktası* adı verilir. Eğer z_0 bu tanım-

lanan noktalardan biri değil ise $\mathcal{D}$ 'nin *sınır noktası*dır. Dolayısıyla bir sınır noktasının her komşuluğu, $\mathcal{D}$ 'nin hem en az bir iç noktasını hem de $\mathcal{D}$ 'nin iç noktası olmayan en az bir noktayı içerir. $\mathcal{D}$ kümesinin tüm sınır noktalarının kümesine $\mathcal{D}$ 'nin *sınırı* adı verilir. Hiçbir sınır noktasını içermeyen bir küme *açık* olarak isimlendirilir. Tüm sınır noktalarını içeren bir kümeye *kapalı* küme denir. $\mathcal{D}$ kümesi içindeki tüm noktalarla birlikte $\mathcal{D}$ 'nin sınırını da içeren kapalı küme $\mathcal{D}$ 'nin *kapanışı* olarak isimlendirilir ve $\overline{\mathcal{D}}$ ile gösterilir. Açık bir $\mathcal{D}$ kümesi içinde alınan her z_1 ve z_2 noktası tamamen $\mathcal{D}$ içinde kalacak şekilde sonlu sayıda uç uca eklenmiş bir *çok köşeli doğru* ile birleştirilebiliyor ise bu kümeye *bağlantılı* denir. Boş olmayan bağlantılı bir açık kümeye *domain* adı verilir. Dolayısıyla her komşuluk bir domaindir. Sınır noktalarının bazıları, hiçbiri veya hepsi ile birlikte bir domain *bölge* olarak adlandırılır. Tümleyeni bağlantılı olan bir domain *basit bağlantılı*dır (bkz. Şekil 1.1).



Şekil 1.1: Basit bağlantı ve basit bağlantılı olmayan domainler

f fonksiyonunun tanım kümesi z_0 noktasının bir $|z - z_0| < \varepsilon$ komşuluğunu içersin. f fonksiyonunun z_0 noktasındaki *türevi*

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

limitidir. Eğer $f'(z_0)$ mevcut ise f fonksiyonu z_0 noktasında *diferansiyellenebilir* olarak adlandırılır. Eğer z kompleks değişkeninin bir f fonksiyonu bir $\mathcal{D}$ açık kümesinin her noktasında türeve sahip ise $f(z)$ *fonksiyonu $\mathcal{D}$ kümesinde analitiktir* denir. $f(z)$ fonksiyonunun z_0 'ın bir komşuluğundaki her noktada türevi varsa f fonksiyonu z_0

noktasında analitik olarak adlandırılır. Literatürde analitikliği belirtmek için regüler ve holomorfik terimleri de kullanılmaktadır.

Bir f fonksiyonu bir $\mathcal{D}$ domaininde *birebir* (veya yalınkat veya schlict) ise $\mathcal{D}$ domainindeki her z_1 ve z_2 için

$$z_1 \neq z_2 \quad \text{ise} \quad f(z_1) \neq f(z_2)$$

sağlanır. $\mathcal{D}$ domaininde hem analitik hem de birebir olan bir f fonksiyonuna $\mathcal{D}$ üzerinde *konform* denir. Böyle bir f fonksiyonunu $\mathcal{D}$ 'nin *konform tasviri* olarak adlandıracağız.

Riemann teoremi, 19. yüzyıl matematiğinin en dikkat çekici sonuçlarından biri olarak kabul edilir ve $\mathbb{C}$ kompleks düzleminin herhangi bir basit bağlantılı alt kümesinin konform olarak birim disk $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ üzerine resmedildiğini belirtir.

Teorem 1.1 (Riemann Teoremi). *[6, sayfa 160] $\mathcal{D} \subsetneq \mathbb{C}$ basit bağlantılı bir domain ve $z_0 \in \mathcal{D}$ herhangi bir nokta olsun. $\mathcal{D}$ kümesini, $\mathbb{U}$ birim diski üzerine resmeden birebir ve tek türlü belirli bir analitik $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{U}$ fonksiyonu $f(z_0) = 0$ ve $f'(z_0) > 0$ özelliklerini sağlayacak şekilde mevcuttur.*

Bir konform dönüşümün ters görüntüsü de konform olduğundan Riemann teoremi $\mathbb{C}$ 'den farklı iki basit bağlantılı domainin konform olarak eşdeğer olduğunu söyler. Yani, $\mathcal{D} \subsetneq \mathbb{C}$ ve $\mathcal{D}' \subsetneq \mathbb{C}$ basit bağlantılı iki domain ve $z \in \mathcal{D}$ ve $w \in \mathcal{D}'$ ise $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}'$ şeklinde $f(z) = w$ ve $f'(z) > 0$ özelliğine sahip tek türlü belirli bir konform dönüşüm vardır.

f fonksiyonu $\mathcal{D}$ domaininde analitik olsun. $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ olarak yazarsak

u ve v sırasıyla f fonksiyonunun reel ve sanal kısımları

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{ve} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Cauchy-Riemann denklemlerini sağlar. Tersine, $u(x, y)$ ve $v(x, y)$ fonksiyonları Cauchy-Riemann denklemlerini sağlayan sürekli kısmi türevlere sahipse $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ fonksiyonu $\mathcal{D}$ domaini üzerinde analitiktir [6, sayfa 41].

Tanım 1.2 (Yalınkat Fonksiyonlar). $f(z)$ fonksiyonu $\mathcal{D}$ domaininde iki kez aynı değeri almazsa, yani $z_1, z_2 \in \mathcal{D}$ için

$$z_1 \neq z_2 \text{ ise } f(z_1) \neq f(z_2) \quad (1.2)$$

injektiflik (birebirlik) koşulu gerçekleşirse $f(z)$ fonksiyonu $\mathcal{D}$ domaininde *yalınkat* olarak adlandırılır. Eş değer olarak *yalınkat fonksiyonlar*, $z_1, z_2 \in \mathcal{D}$ için

$$f(z_1) = f(z_2) \text{ ise } z_1 = z_2$$

koşulunu sağlar.

Bu çalışmada öncelikli olarak $\mathcal{D}$ domaininde analitik olan yalınkat fonksiyonlar ilgilenilir. Dolayısıyla, yalınkat terimi $f(z)$ fonksiyonunun aynı zamanda analitik olduğu anlamını taşır. Ancak, tanıma bu dahil edilmez çünkü $f(z)$ fonksiyonunun $\mathcal{D}$ domaininde bir basit kutup noktasına sahip olduğu durumları da incelenecektir.

Tanım 1.3 (Yerel Yalınkat Fonksiyonlar). [8, sayfa 5] $f(z)$ fonksiyonu $\mathcal{D}$ domaininde tanımlı ve analitik olsun. $f'(z)$ türevi her yerde sıfırdan farklı ise $f(z)$ fonksiyonu *yerel yalınkattır* denir.

Uyarı 1.4. $\mathcal{D}$ domaininde analitik olan bir fonksiyonun yalınkat olması için gerek

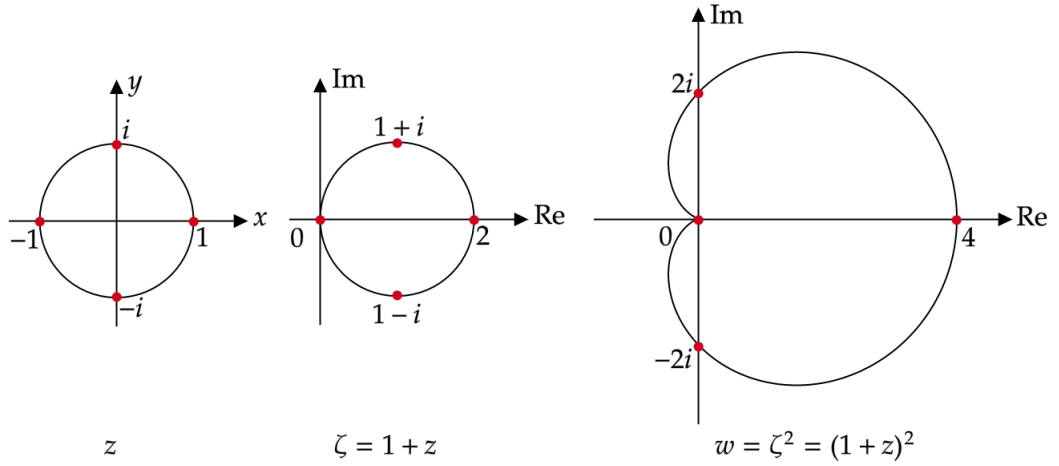
şart türevinin $\mathcal{D}$ domaininde sıfırlanmamasıdır. Yani, f fonksiyonu $\mathcal{D}$ domaininde yalnızkat ise her $z \in \mathcal{D}$ için $f'(z) \neq 0$ eşitsizliği gerçekleşir. Bu teoremin Rouché teoremi kullanılarak elde edilen bir ispatı Titchmarsh'ın kitabında verilmiştir [27, sayfa 198].

Yalnızkat fonksiyonlar teorisi bazı basitleştirici varsayımların yapılmasını gerektirecek kadar geniş ve komplekstir. Bunlardan en iyi bilineni keyfi $\mathcal{D}$ domainini $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ birim diski ile değiştirmektir.

Örnek olarak, $\mathbb{U}$ birim diskinde tanımlı $f(z) = (1+z)^2$ fonksiyonunu ele alalım. Bu fonksiyonun $\mathbb{U}$ birim diskinde yalnızkat olduğu geometrik olarak gösterilebilir. Burada, $\zeta = 1+z$ dönüşümünün birim diski sağa kaydıracağı ve $w = \zeta^2 = (1+z)^2$ kare almanın etkisi düşünüldüğünde görselleştirme kolaylaşır: $|z| = 1$ için $z = e^{i\theta}$ şeklinde yazılsın ve $f(z) = \rho e^{i\phi}$ olsun. Buradan

$$\begin{aligned} \rho e^{i\phi} &= (1 + e^{i\theta})^2 = 2e^{i\theta} + 1 + e^{i2\theta} = (2 + e^{-i\theta} + e^{i\theta})e^{i\theta} \\ &= (2 + \cos \theta - i \sin \theta + \cos \theta + i \sin \theta)e^{i\theta} = (2 + 2 \cos \theta)e^{i\theta}, \\ \rho &= 2 + 2 \cos \theta \quad (\phi = \theta) \end{aligned}$$

elde edilir. Şekil 1.2'de üç domain gösterilmiştir. Ayrıca $f(z) = (1+z)^2$ fonksiyonunun



Şekil 1.2: Birim diskin $f(z) = (1+z)^2$ fonksiyonu altındaki görüntüsü

$\mathbb{U}$ birim diskinde yalınkat olduğuna dair cebirsel bir kanıt da verilebilir: $f(z_1) = f(z_2)$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} f(z_1) - f(z_2) &= (1 + z_1)^2 - (1 + z_2)^2 \\ &= (1 + z_1 - 1 - z_2)(1 + z_1 + 1 + z_2) \\ &= (z_1 - z_2)(2 + z_1 + z_2) = 0 \quad (z_1, z_2 \in \mathbb{U}) \end{aligned}$$

olduğundan $z_1 = z_2$ sağlanır. Çünkü, $z_1 + z_2 = -2$ olsaydı $2 = |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| < 2$ çelişkisi elde edilirdir. Aynı türden bir argümanı kullanarak $g(z) = (1 + z)^3$ fonksiyonunun $\mathbb{U}$ 'da *yalınkat olmadığını* gösterebiliriz. Bunun için bir ters örnek verelim: $z_1 = -\frac{3}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}$ ve $z_2 = -\frac{3}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{4}$ olsun. Bu iki farklı sayı birim disk içinde yer alır, ancak $g(z_1) = \left(1 - \frac{3}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^3 = -\frac{1}{8} = \left(1 - \frac{3}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^3 = g(z_2)$ eşitliği gerçekleşir.

Eğer $f(z)$ fonksiyonu $\mathbb{U}$ 'da analitik ise $\mathbb{U}$ birim diskinde yakınsak olan

$$f(z) = b_0 + b_1z + b_2z^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \quad (1.3)$$

formunda bir Maclaurin serisi açılımına sahiptir. $f(z)$ fonksiyonunun bu gösterilimi kullanılarak iki soru sorulabilir: Verilen $\{b_n\}$ katsayılar dizisi $f(z)$ fonksiyonunun geometrik özelliklerine nasıl etki eder? $f(z)$ fonksiyonunun bir özelliği verildiğinde bu özellik (1.3) denklemindeki katsayıları nasıl etki eder? Biz burada yalınkatlık özelliği ile ilgilendiğimizden bu soruları daha spesifik hale getirebiliriz: (I) Eğer $f(z)$ fonksiyonu yalınkat ise bu durum Maclaurin serisindeki katsayıları nasıl etki eder? (II) (1.3) denklemindeki katsayılar verildiğinde $f(z)$ fonksiyonunun $\mathcal{D}$ domaininde yalınkat olup olmadığı belirlenebilir mi?

Riemann tasvir teoremi (Teorem 1.1) kompleks düzlemin herhangi bir basit bağlantılı özalt kümesinin birim diske konform olarak eşdeğer olduğunu söyler. Yani,

$\mathcal{D} \subsetneq \mathbb{C}$ basit bağlantılı ve $z_0 \in \mathcal{D}$ ise tek türlü belirli bir $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{U}$ konform tasviri $f(z_0) = 0$ ve $f'(z_0) > 0$ sağlayacak şekilde mevcuttur. Bu nedenle, herhangi bir basit bağlantılı domain üzerinde yalınkat fonksiyonlar hakkında söylenenler, birim disk üzerinde yalınkat fonksiyonlara aktarılabilir. Buna göre, f fonksiyonu $\mathcal{D}$ domaininde analitik ve yalınkat ise genelliği bozmadan, $\mathcal{D}$ domaininin $\mathbb{U}$ birim diski olduğu varsayılabilir ve Maclaurin serisi açılımının

$$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \quad (1.4)$$

formunda $f(0) = f'(0) - 1 = 0$ normalizasyonunu sağladığı söylenebilir.

Tanım 1.5 (Normalize Edilmiş Yalınkat Fonksiyonlar ve $\mathcal{S}$ Sınıfı). $\mathbb{U}$ birim diski üzerinde analitik, yalınkat ve $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ normalizasyon koşullarını sağlayan fonksiyonlar sınıfı $\mathcal{S}$ ile gösterilsin. Yani

$$\mathcal{S} = \{f : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{C} \mid f, \mathbb{U} \text{ birim diski üzerinde yalınkat ve analitik, } f(0) = 0, f'(0) = 1\}$$

dır.

Yalınkat fonksiyonlar teorisi yüzyılı aşkın bir süreye dayanan, eski ancak hala çok aktif bir alandır. Tarihçesi, ünlü Bieberbach hipoteziyle ilişkilidir. Bieberbach hipotezi, $k \in \mathcal{S}$ Koebe fonksiyonununundan ilham alarak $n \geq 2$ için $|a_n| \leq n$ eşitsizliğinin gerçekleştiğini öne sürer.

Tanım 1.6 (Koebe Fonksiyonu). *Analitik*

$$k(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n z^n = z + 2z^2 + 3z^3 + \cdots, \quad z \in \mathbb{U}$$

fonksiyonu Koebe fonksiyonu olarak adlandırılır. $|\alpha| = 1$ özel seçimiyle

$$k_\alpha(z) = \frac{z}{(1 - \alpha z)^2}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyonlar Koebe fonksiyonunun rotasyonlarıdır.

Koebe fonksiyonu, birim disk $\mathbb{U}$ 'yu, $-1/4$ noktasından ∞ 'a kadar olan negatif reel eksenin $\mathbb{C}$ 'den çıkarılması ile elde edilen bölgeye resmeder. Yani $k(\mathbb{U}) = \mathbb{C} \setminus (-\infty, -1/4]$ şeklindedir. Bunu görmek için

$$k(z) = \frac{z}{(1 - z)^2} = \frac{(1 + z)^2 - (1 - z)^2}{4(1 - z)^2} = \frac{1}{4} \left[\left(\frac{1 + z}{1 - z} \right)^2 - 1 \right]$$

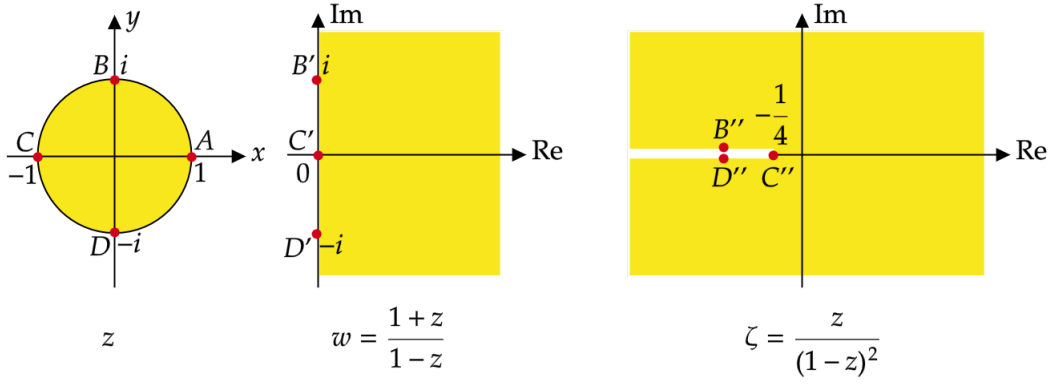
yazalım. Şimdi

$$w(z) = \frac{1 + z}{1 - z}, \quad g(z) = w^2(z), \quad k(z) = \frac{1}{4}(g(z) - 1), \quad |z| < 1. \quad (1.5)$$

fonksiyonlarını ele alalım. Her $z \in \mathbb{U}$ ve $w = u + iv$ için

$$\begin{aligned} w = \frac{1 + z}{1 - z} &\Rightarrow w - wz = 1 + z \Rightarrow (1 + w)z = w - 1 \Rightarrow z = \frac{w - 1}{w + 1} \\ |z| = \left| \frac{w - 1}{w + 1} \right| < 1 &\Rightarrow |w - 1|^2 < |w + 1|^2 \Rightarrow (u - 1)^2 + v^2 < (u + 1)^2 + v^2 \\ u^2 - 2u + 1 < u^2 + 2u + 1 &\Rightarrow -2u < 2u \end{aligned}$$

sağlandığından $u = \operatorname{Re} w > 0$ olduğu sonucu elde edilir. Bu, $w(z) = \frac{1 + z}{1 - z}$ fonksiyonunun $\mathbb{U}$ birim diskini $\operatorname{Re} w > 0$ yarı düzlemine resmettiği anlamına gelir. Ardından, $g(z) = w^2(z)$ fonksiyonu bu yarı düzlemi negatif reel eksen hariç tüm kompleks düzleme götürür. Böylece $k(z) = (g(z) - 1)/4$ transformasyonu yukarıda yer alan normalizasyonu gerçekleştirir. $k(z)$ fonksiyonunu oluşturmak için kullanılan fonksiyon dizisi Şekil 1.3'de gösterilmektedir.



Şekil 1.3: Koebe fonksiyonu altında birim diskin görüntüsü

Teorem 1.7. [9, sayfa 15] Koebe fonksiyonu

$$k(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = z + 2z^2 + 3z^3 + \cdots + nz^n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} nz^n \quad (1.6)$$

$\mathcal{S}$ fonksiyon sınıfındadır. Bu fonksiyon, $\mathbb{U}$ birim diskini $-\infty$ 'dan $-\frac{1}{4}$ noktasına kadar negatif reel ekseninde yer alan kesit dışında, tüm kompleks düzlemi kapsayan $\mathcal{D}$ domainine birebir şekilde resmeder.

Yalınkatlığı bozmadan bir açık nokta kümesini domainin görüntüsüne eklemek mümkün olmadığından sezgisel anlamda Koebe fonksiyonu $\mathcal{S}$ kümesindeki "en büyük" fonksiyondur. Teorem 1.7'daki domainin "maksimal" niteliği, simetrisi ve $k(z)$ katsayılarının büyüklüğü şu hipotezi önermektedir: $f(z) \in \mathcal{S}$ ise $n \geq 2$ için $|a_n| \leq n$ ifadesi sağlanır. Bu teorem literatürde Bieberbach hipotezi [4] olarak adlandırılır. Hipotez, 1916 yılında Bieberbach tarafından $|a_2| \leq 2$ eşitsizliğinin ispatlandığı bir çalışmada dipnot olarak belirtmiştir ve eşitsizlikte eşitlik halinin f fonksiyonunun Koebe fonksiyonu veya onun rotasyonlarından biri olduğunda gerçekleşeceği gerek ve yeter şart olarak verilmiştir.

Bieberbach hipotezi basit bir ifadeye sahip olmasına rağmen birçok matematikçi için bir meydan okuma olmuş ve hipotezi ispatlama çalışmaları uzun bir süre başarısız-

lıkla sonuçlanmıştır. Bu süreçte farklı yöntemler geliştirilmiş ve bu yöntemler teoremin bir parçası haline gelmiştir. Bieberbach hipotezinin dramatik hikayesi matematiğin oluşumunu açıklamaktadır. 68 yıl boyunca birçok matematikçi bu problemi çözmek için yalınkat fonksiyonlar teorisine katkılar yapmıştır. Örneğin, M. Schiffer kompleks analizde varyasyon hesabı tekniğini getirmiştir. C. Löwner ise Lie'nin bazı fikirlerini kullanarak bazı kısmi diferansiyel denklemlerin çözümleri olarak ilgili fonksiyonları temsil etmenin bir yolunu bulmuştur. W. Kaplan konvekse yakın fonksiyonlar sınıfına dikkat çekmiş ve M. Reade bu geniş sınıf için hipotezin doğru olduğunu göstermiştir. Diğer birçok matematikçi de problemi çözmek için kompleks analizde etkileyici ilerlemeler kaydetmiştir. Hipotezin ispatına yönelik son deneme yapıldığında, büyüleyici bir matematik gerçeğinin oraya çıkarıldığı açıkça görülmüştür. Elbette daha önceki çalışmaların bu başarı için temel oluşturduğu açıktır. Bieberbach hipotezinin tarihi matematikçilerin, matematik bilimini nasıl inşa ettiklerine dair yolu göstermektedir. 1984 yılında, hipotez ortaya atıldıktan 68 yıl sonra, matematikçi Louis de Branges uzun ve karmaşık ancak doğru bir kanıt sunmuştur. [7].

Aşağıda $\mathcal{S}$ kümesindeki bazı basit ama önemli fonksiyonlar listelenmiştir:

(i) $f(z) = z$ birim fonksiyonu $\mathbb{U}$ üzerinde yalınkattır. Dolayısıyla, $\mathcal{S}$ boş değildir.

(ii) Koebe fonksiyonu

$$k(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = z + 2z^2 + 3z^3 + 4z^4 + \dots$$

Yalınkat k fonksiyonu $\mathbb{U}$ 'yu $\mathbb{C} \setminus (-\infty, -1/4]$ üzerine resmeder. Daha önce belirtildiği gibi k fonksiyonu $\mathcal{S}$ sınıfındaki en önemli örnektir.

(iii)

$$f(z) = \frac{z}{1-z^2} = z + z^3 + z^5 + z^7 + \dots$$

fonksiyonu $\mathbb{U}$ 'yu $\mathbb{C} \setminus (-\infty, -1/2] \cup [1/2, \infty)$ üzerine tasvir eder.

(iv)

$$f(z) = \frac{z}{1-z} = z + z^2 + z^3 + \dots$$

fonksiyonu $\mathbb{U}$ 'yu $\operatorname{Re} z > -1/2$ yarı düzlemi üzerine yansıtır.

(v)

$$w = f(z) = \frac{1}{2} \log \frac{1+z}{1-z}$$

fonksiyonu $\mathbb{U}$ 'yu $-\pi/4 < \operatorname{Im} w < \pi/4$ yatay şeridi üzerine resmeder.

(vi)

$$f(z) = z - \frac{1}{2}z^2 = \frac{1}{2}(1 - (1-z)^2)$$

fonksiyonu $\mathbb{U}$ birim diskini bir kardiodin içine tasvir eder.

Akla $\mathcal{S}$ sınıfını koruyan dönüşümler hangileridir sorusu gelebilir. Aşağıdaki örnek, $f \in \mathcal{S}$ ve $g \in \mathcal{S}$ ise $f + g \notin \mathcal{S}$ olabileceğini, yani $\mathcal{S}$ sınıfının toplama işlemi altında kapalı olmadığını gösterir.

Örnek 1.8.

$$f(z) = \frac{z}{1-z} \quad \text{ve} \quad g(z) = \frac{z}{1+iz}$$

fonksiyonları normalizasyon koşullarını sağlayan, $\mathbb{U}$ birim diskinde birebir ve analitik fonksiyonlar olduklarından $\mathcal{S}$ sınıfına aittirler. Diğer taraftan

$$f'(z) = \frac{1}{(1-z)^2} \quad \text{ve} \quad g'(z) = \frac{1}{(1+iz)^2}$$

olduğundan

$$f'(z) + g'(z) = \frac{2 - 2(1-i)z}{(1-z)^2(1+iz)^2}$$

sağlanır. Eğer

$$z = \frac{1}{1-i} = \frac{1+i}{2}$$

ise $f'(z) + g'(z) = 0$ bulunur ki bu $f + g \notin \mathcal{S}$ olduğunu ifade eder.

Şimdi, $\mathcal{S}$ sınıfını koruyan bazı dönüşümleri verelim:

(i) *Rotasyon*. Eğer $f \in \mathcal{S}$ ve

$$\begin{aligned} g(z) &= e^{-i\theta} f(e^{i\theta} z) = e^{-i\theta} (e^{i\theta} z + a_2 e^{2i\theta} z^2 + a_3 e^{3i\theta} z^3 + \dots) \\ &= z + a_2 e^{i\theta} z^2 + a_3 e^{2i\theta} z^3 + \dots, \quad \theta \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

ise $g \in \mathcal{S}$ dir.

Kanıt. $f \in \mathcal{S}$ olsun. Eğer $R(z) = e^{i\theta} z$ ve $T(z) = e^{-i\theta} z$ şeklinde tanımlanır ise $R : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ve $T : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonları açıkça birebirdir. $g(z) = e^{-i\theta} f(e^{i\theta} z) = (T \circ f \circ R)(z)$ birebir tasvirlerin bir bileşkesi olduğundan g fonksiyonunun $\mathbb{U}$ birim diskinde yalınkat olduğu sonucuna varılır. Diğer taraftan

$$g'(z) = e^{-i\theta} \cdot e^{i\theta} f'(e^{i\theta} z) = f'(e^{i\theta} z)$$

sağlandığından g fonksiyonunun $\mathbb{U}$ birim diskinde analitik olduğu görülür. Ayrıca, $g(0) = f(0) = 0$ ve $g'(0) = f'(0) = 1$ eşitliklerinden $g(z) \in \mathcal{S}$ neticesine ulaşılır. $\square$

(ii) *Dilatasyon*. Eğer $f \in \mathcal{S}$, $0 < r < 1$ ve

$$\begin{aligned} g(z) &= r^{-1} f(rz) = r^{-1} (rz + a_2 r^2 z^2 + a_3 r^3 z^3 + \dots) \\ &= z + a_2 r z^2 + a_3 r^2 z^3 + \dots \end{aligned}$$

ise $g \in \mathcal{S}$ dir.

Kanıt. $0 < r < 1$ ve $f \in \mathcal{S}$ olsun. Eğer $R(z) = rz$ ve $T(z) = \frac{z}{r}$ şeklinde tanımlanırsa ise $R : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ve $T : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonları açıkça birebirdir. $g(z) = \frac{1}{r}f(rz) = (T \circ f \circ R)(z)$ bileşke fonksiyonu olduğundan g fonksiyonu $\mathbb{U}$ birim diski üzerinde birebirdir. Diğer taraftan

$$g'(z) = \frac{1}{r} \cdot r \cdot f'(rz) = f'(rz)$$

olduğundan g fonksiyonu $\mathbb{U}$ birim diskinde analitiktir. Ayrıca, $g(0) = f(0) = 0$ ve $g'(0) = f'(0) = 1$ normalizasyon koşulları gerçekleştiğinden $g(z) \in \mathcal{S}$ olduğu görülür. $\square$

(iii) *Eşleniklik.* Eğer $f \in \mathcal{S}$ ve

$$g(z) = \overline{f(\bar{z})} = \overline{\bar{z} + a_2\bar{z}^2 + a_3\bar{z}^3 + \dots} = z + \overline{a_2}z^2 + \overline{a_3}z^3 + \dots$$

ise $g \in \mathcal{S}$.

Kanıt. $f \in \mathcal{S}$ ve $w(z) = \bar{z}$ olmak üzere $w : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonu birebirdir. $g(z) = \overline{f(\bar{z})} = (w \circ f \circ w)(z)$ ifadesi birebir fonksiyonların bileşkesi olduğundan, g fonksiyonu da $\mathbb{U}$ birim diskinde birebirdir. $w(z)$ fonksiyonunun $\mathbb{U}$ birim diskinde analitik olmadığına dikkat edelim. Bu yüzden (i) ve (ii) şıklarının ispatlarında yaptığımız gibi analitik fonksiyonların bileşkesinin de analitik olduğu gerçeğini kullanamayız. Bunun yerine öncelikle f fonksiyonun Taylor seri açılımı olan

$$z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$$

ifadesinin yakınsaklık yarıçapının 1 olduğunu gözlemleyelim. Bu yukarıda verilen Taylor serisinin her $|z| < 1$ için $f(z)$ fonksiyonuna yakınsadığını ve dolayısıyla $|z| \leq r < 1$ olan her kapalı diskte düzgün yakınsadığını gösterir. Sonuç

olarak

$$z + \sum_{n=2}^{\infty} \overline{a_n} z^n$$

Taylor serisinin yakınsaklık yarıçapının 1 olduğu ve bununla beraber $\mathbb{U}$ üzerinde analitik bir fonksiyon tanımlandığı görülür. Dolayısıyla

$$g(z) = \overline{f(\bar{z})} = z + \overline{a_2} z^2 + \overline{a_3} z^3 + \dots$$

ifadesinin de $g(0) = f(0) = 0$ ve $g'(0) = f'(0) = 1$ olacak şekilde $\mathbb{U}$ üzerinde analitik olduğu sonucuna ulaşılır. Yani, $g(z) \in \mathcal{S}$ 'dir. $\square$

Dördüncü transformasyonu vermeden önce $\mathbb{U}$ birim diskini konform olarak $\mathbb{U}$ birim diskine resmeden *Möbius dönüşümleri* (veya *kesirli doğrusal dönüşümler*) olarak adlandırılan özel bir fonksiyon sınıfını tanıtalım.

Önerme 1.9. $z_0 \in \mathbb{U}$ sabiti için $z_0 \mapsto 0$ ve $|g'(z)| > 0$ olmak üzere

$$g(z) = \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z}$$

fonksiyonu $\mathbb{U}$ birim diskinin $\mathbb{U}$ üzerine bir konform tasvirdir.

Kanıt. Açıkça $g(z_0) = 0$ sağlanır. Ayrıca

$$g'(z) = \frac{(1 - \bar{z}_0 z) + \bar{z}_0(z - z_0)}{(1 - \bar{z}_0 z)^2} = \frac{1 - |z_0|^2}{(1 - \bar{z}_0 z)^2}$$

türevinde $|z_0| < 1$ olduğu kullanıldığında her $z \in \mathbb{U}$ için $|g'(z)| > 0$ eşitsizliğinin geçerliliği görülür. g fonksiyonunun $\mathbb{U}$ birim diskini $\mathbb{U}$ birim diskine resmettiğini göstermek için her $|z| < 1$ için $|g(z)| < 1$ olduğunu kanıtlamak gerekir. Bu aşağıdaki eşitsizlikler aracılığıyla elde edilir: $|z| < 1$ olduğundan $|z|^2 < 1$ ve $1 - |z_0|^2 \in \mathbb{R}$ olduğundan

$(1 - |z_0|^2)|z|^2 < 1 - |z_0|^2$ bulunur. Bu eşitsizlik düzenlenirse

$$|z|^2 + |z_0|^2 < 1 + |z_0|^2|z|^2$$

ifadesi elde edilir. Yukarıdaki eşitsizliğin her iki tarafından $\bar{z}z_0 + z\bar{z}_0 \in \mathbb{R}$ çıkartılarak

$$|z|^2 + |z_0|^2 - \bar{z}z_0 - z\bar{z}_0 < 1 + |z_0|^2|z|^2 - \bar{z}z_0 - z\bar{z}_0$$

bulunur ve bu eşitsizlik

$$z\bar{z} - \bar{z}z_0 - z\bar{z}_0 + z_0\bar{z}_0 < 1 - \bar{z}z_0 - z\bar{z}_0 + \bar{z}_0z_0\bar{z}z$$

olarak yazılabilir. Buradan

$$(z - z_0)(\bar{z} - \bar{z}_0) < (1 - \bar{z}_0z)(1 - z_0\bar{z}) \quad \text{veya} \quad |z - z_0|^2 < |1 - \bar{z}_0z|^2$$

elde edilir. Böylece

$$|g(z)| = \frac{|z - z_0|}{|1 - \bar{z}_0z|} < 1$$

sonucuna ulaşılır. Kanıtı tamamlamak için g fonksiyonunun $\mathbb{U}$ 'yu üzerine resmettiğini göstermek gerekir. Bunun için her $w \in \text{Range}(g)$ için $w = g(z)$ olacak şekilde bir $z \in \text{Domain}(g)$ olduğunu gösterelim. Bir $w \in \mathbb{U}$ verilsin. Şimdi

$$w = \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0z}$$

şeklinde yazılır ve w, z için çözülürse

$$w - \bar{z}_0zw = z - z_0 \quad \text{ve} \quad z = \frac{w + z_0}{1 + \bar{z}_0w}$$

bulunur. Buna göre $\frac{w + z_0}{1 + \overline{z_0}w} \in \mathbb{U}$ ve

$$g\left(\frac{w + z_0}{1 + \overline{z_0}w}\right) = w$$

olduğundan $g : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{U}$ fonksiyonu üzerinedir. Böylece kanıt tamamlanır. $\square$

$g(z) = \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0}z}$ Möbius dönüşümü için bir Taylor açılımı elde edilebilir. Gerçekten $z_0 \in \mathbb{U}$ sabit ise

$$\begin{aligned} g(z) &= \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0}z} = (z - z_0)(1 + \overline{z_0}z + \overline{z_0}^2 z^2 + \overline{z_0}^3 z^3 + \dots) \\ &= z_0 + (1 - \overline{z_0}z_0)z + (\overline{z_0} - \overline{z_0}^2 z_0)z^2 + (\overline{z_0}^2 - \overline{z_0}^3 z_0)z^3 + \dots \\ &= z_0 + (1 - |z_0|^2)z + \overline{z_0}(1 - |z_0|^2)z^2 + \overline{z_0}^2(1 - |z_0|^2)z^3 + \dots \\ &= z_0 + (1 - |z_0|^2) \sum_{n=1}^{\infty} \overline{z_0}^{n-1} z^n \end{aligned} \quad (1.7)$$

dir.

(iv) *Disk otomorfizmi.* $f \in \mathcal{S}$ ve

$$g(z) = \frac{f\left(\frac{z + z_0}{1 + \overline{z_0}z}\right) - f(z_0)}{(1 - |z_0|^2)f'(z_0)}, \quad |z_0| < 1$$

ise $g(z) \in \mathcal{S}$ dir.

Kanıt. $f \in \mathcal{S}$ olsun ve $w(0) = z_0$ ifadesini sağlayan ve $\mathbb{U}$ birim diskini kendi üzerine resmeden $w(z) = \frac{z + z_0}{1 + \overline{z_0}z}$ Möbius dönüşümü göz önüne alınsın. $z_0 \in \mathbb{U}$ sağlandığından $g(0) = 0$ olmak üzere

$$g(z) = \frac{f(w(z)) - f(z_0)}{(1 - |z_0|^2)f'(z_0)}$$

fonksiyonu $\mathbb{U}$ birim diski üzerinde yalınkattır. Ayrıca

$$\begin{aligned} g'(z) &= \frac{w'(z)f'(w(z))}{(1-|z_0|^2)f'(z_0)} = \frac{\frac{1+\overline{z_0}z-(z+z_0)\overline{z_0}}{(1+\overline{z_0}z)^2}f'(w(z))}{(1-|z_0|^2)f'(z_0)} \\ &= \frac{\frac{1+\overline{z_0}z-\overline{z_0}z-|z_0|^2}{(1+\overline{z_0}z)^2}f'(w(z))}{(1-|z_0|^2)f'(z_0)} = \frac{f'(w(z))}{(1+\overline{z_0}z)^2f'(z_0)} \end{aligned} \quad (1.8)$$

olduğundan, $g'(0) = 1$ elde edilir ve g fonksiyonun $\mathbb{U}$ birim diski üzerinde analitikliği gözlemlenir. O halde $g \in \mathcal{S}$ 'dir. $\square$

(v) *Range transformasyonu.* Eğer $f \in \mathcal{S}$ ve $\phi : f(\mathbb{U}) \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonu $f(\mathbb{U})$ üzerinde analitik, yalınkat ve

$$g(z) = \frac{(\phi \circ f)(z) - \phi(0)}{\phi'(0)}$$

ise $g \in \mathcal{S}$ 'dir.

Kanıt. $g(0) = 0$ iken g fonksiyonunun $\mathbb{U}$ birim diski üzerinde yalınkat olduğu açıktır. Ayrıca

$$g'(z) = \frac{f'(z)\phi'(f(z))}{\phi'(0)}$$

türev fonksiyonu göz önüne alındığında $g'(0) = 1$ olmak üzere g fonksiyonun $\mathbb{U}$ üzerinde analitik olduğu sonucu elde edilir. O halde $g \in \mathcal{S}$ 'dir. $\square$

(vi) *İhmal edilen değer transformasyonu.* Eğer $f(z) \neq w$ koşulu altında $f(z) \in \mathcal{S}$ ve

$$g(z) = \frac{wf(z)}{w - f(z)}$$

ise $g \in \mathcal{S}$ 'dir.

Kanıt. $\zeta \neq w$ için $T(\zeta) = \frac{w\zeta}{w - \zeta}$ fonksiyonu birebirdir ve $g(z) = (T \circ f)(z)$

şeklinde tanımlanan bileşke fonksiyonu $\mathbb{U}$ birim diskinde yalınkattır. Ayrıca

$$g'(z) = \frac{wf'(z)(w - f(z)) + wf(z)f'(z)}{(w - f(z))^2} = \frac{w^2f'(z)}{(w - f(z))^2}$$

ve $w \neq f(z)$ olduğundan $g'(0) = 1$ ve dolayısıyla g fonksiyonunun $\mathbb{U}$ birim diskinde analitik olduğu sonucu elde edilir. Buna göre $g \in \mathcal{S}$ 'dir. $\square$

(vii) *Karekök transformasyonu.* $f(z) \in \mathcal{S}$ ve

$$g(z) = z\sqrt{f(z^2)/z^2}$$

ise $g \in \mathcal{S}$ dir.

Kant. $f(z) = 0$ eşitliği sadece $z = 0$ olduğunda gerçekleştiğinden karekök fonksiyonunun tek değerli bir dalını seçebiliriz öyleki $z \in \mathbb{U}$ için

$$\begin{aligned} g(z) &= z\sqrt{f(z^2)/z^2} = z\sqrt{\frac{z^2 + a_2z^4 + a_3z^6 + \dots}{z^2}} \\ &= z\sqrt{1 + a_2z^2 + a_3z^4 + \dots} = z + c_3z^3 + c_5z^5 + \dots \end{aligned}$$

yani $g(-z) = -g(z)$ sağlanır. Sıfırdan farklı $z_1, z_2 \in \mathbb{U}$ için

$$g(z_1) = g(z_2) \Rightarrow f(z_1^2) = f(z_2^2) \Rightarrow z_1^2 = z_2^2 \Rightarrow z_1 = \pm z_2$$

dir. $z_1 = -z_2$ ise $g(z_1) = g(z_2) = g(-z_1) = -g(z_1)$ olur. Buradan $g(z_1) = 0$ ve $z_1 = 0$ bulunur. O halde, yalnızca $z_1 = z_2$ iken $g(z_1) = g(z_2)$ eşitliği sağlanır. Yani $g(z)$ fonksiyonu $\mathbb{U}$ 'da yalınkat ve $g(0) = 0$ ve $g'(0) = 1$ olmak üzere $\mathbb{U}$ birim diskinde analitiktir. O halde $g \in \mathcal{S}$ olduğu elde edilir. $\square$

Bölüm 2

Alan Teoremleri

Bir bölgenin alanı her zaman pozitif olduğundan herhangi bir alan ifadesi bir eşitsizlik ile verilebilir. Bu tür bir eşitsizlik, yalınkat fonksiyonlar teorisindeki bazı temel teoremleri kanıtlamak için kullanılır. Bu bölümde, bir tanesi $f(z) = z + a_2z^2 + a_3z^3 + \dots \in \mathcal{S}$ biçimindeki yalınkat bir fonksiyonun birim disk altındaki görüntüsünün alanını f fonksiyonunun Taylor açılımındaki a_n katsayılarıyla ifade eden alan teoreminin iki versiyonunu tanıtaacağız. Alan teoreminin ardından bir diğer geometrik sonuç Koebe dörtte-bir teoremi ve Bieberbach teoreminin a_2 ikinci katsayısı için geçerli olan $|a_2| \leq 2$ eşitsizliği ortaya koyulacaktır.

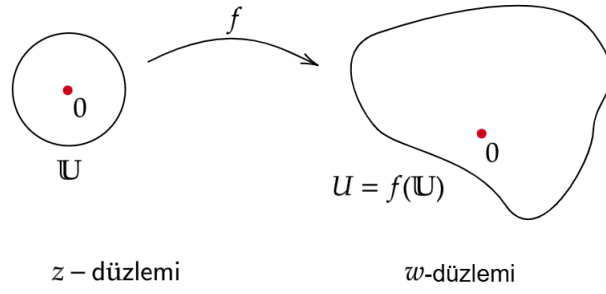
Teorem 2.1 (Alan Teoremi - I). *[9, sayfa 25] Eğer $f : \mathbb{U} \rightarrow f(\mathbb{U})$ fonksiyonu $f(0) = 0$ ve $f'(0) > 0$ olmak üzere $\mathbb{U}$ 'nun bir konform tasviri ise $0 < a_1 \in \mathbb{R}$ için f 'nin*

$$f(z) = a_1z + a_2z^2 + a_3z^3 + \dots, \quad |z| < 1 \quad (2.1)$$

formunda bir Taylor açılımı mevcuttur. Bu durumda

$$\text{Alan}(f(\mathbb{U})) = \pi \sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|^2$$

eşitliği sağlanır (bkz. Şekil 2.1).



Şekil 2.1: Alan teoremi

Kanıt. $U = f(\mathbb{U})$ ve $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ olsun. O halde $P = u - iv$, $Q = iu + v$ için

$$\int_{\partial U} \bar{w} dw = \int_{\partial U} (u - iv)(du + idv) = \int_{\partial U} (u - iv)du + (iu + v)dv = \int_{\partial U} Pdu + Qdv$$

sağlanır. Diğer taraftan, Green teoremi kullanılarak

$$\int_{\partial U} \bar{w} dw = \int_{\partial U} Pdu + Qdv = \iint_U (Q_u - P_v)d(u, v) = \iint_U 2i d(u, v) = 2i \text{Area}(U)$$

yazılabilir. Burada

$$\frac{1}{2i} \int_{\partial U} \bar{w} dw = \frac{1}{2i} \int_{\partial \mathbb{U}} \overline{f(z)} f'(z) dz$$

değişken dönüşümü yaparak

$$\text{Area}(U) = \frac{1}{2i} \int_{\partial U} \bar{w} dw$$

elde edilir. Yukarıda elde edilen eşitlikte (2.1) ifadesi kutupsal formda yazıldığında,

$\partial\mathbb{U} = \{e^{i\theta} : 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \text{Area}(U) &= \frac{1}{2i} \int_{\partial\mathbb{U}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \overline{a_n} \bar{z}^n \right) \left(\sum_{m=1}^{\infty} m a_m z^{m-1} \right) dz \\ &= \frac{1}{2i} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \overline{a_n} e^{-in\theta} \right) \left(\sum_{m=1}^{\infty} m a_m e^{i(m-1)\theta} \right) i e^{i\theta} d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \overline{a_n} e^{-in\theta} \right) \left(\sum_{m=1}^{\infty} m a_m e^{im\theta} \right) d\theta \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Son olarak, Cauchy çarpımını tüm diagonal terimlerin $m \neq n$ olmak üzere $e^{i(m-n)\theta}$ formunda ve tümünün $0 \leq \theta \leq 2\pi$ aralığında integralinin 0'a eşit olduğu gözlemi ile hesaplayarak

$$\begin{aligned} \text{Area}(U) &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \overline{a_n} e^{-in\theta} \right) \left(\sum_{m=1}^{\infty} m a_m e^{im\theta} \right) d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{k=1}^{\infty} k \overline{a_k} a_k \right) d\theta \\ &= \left(\sum_{k=1}^{\infty} k |a_k|^2 \right) \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta = \pi \sum_{k=1}^{\infty} k |a_k|^2 \end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. □

$f \in \mathcal{S}$ olsun. Tanımdan $f(0) = 0$ ve $f'(0) = 1$ olmak üzere $f : \mathbb{U} \rightarrow f(\mathbb{U})$ fonksiyonu $\mathbb{U}$ 'da analitik ve yalınkattır. Eğer $\text{Area}(f(\mathbb{U})) < \infty$ ise f fonksiyonu *sınırlıdır* denir. Teorem 2.1, $\text{Area}(f(\mathbb{U}))$ için

$$\text{Area}(f(\mathbb{U})) = \pi \sum_{n=1}^{\infty} n |a_n|^2 \quad (2.2)$$

karakterizasyonunu verir. Ayrıca, $\text{Area}(f(\mathbb{U}))$ alanı için bir diğer ifade

$$\text{Area}(f(\mathbb{U})) = \iint_{f(\mathbb{U})} dx dy = \iint_{\mathbb{U}} |f'(z)|^2 dx dy$$

şeklindedir. Bu ifadeyi göstermek için $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ olarak yazılsın. f fonksiyonu $\mathbb{U}$ üzerinde analitik olduğundan, $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ olarak bilinen Cauchy-Riemann eşitliklerini gerçekler ve türevi $f'(z) = u_x + iv_x$ olarak bulunur. Dolayısıyla

$$|f'(z)|^2 = u_x^2 + v_x^2$$

sağlanır. Öte yandan, f fonksiyonunun Jacobian matrisi J_f ve

$$\det J_f(x, y) = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_x & -v_x \\ v_x & u_x \end{vmatrix} = u_x^2 + v_x^2 = |f'(z)|^2$$

olmak üzere

$$\text{Area}(f(\mathbb{U})) = \iint_{f(\mathbb{U})} dudv = \iint_{\mathbb{U}} |\det J_f(x, y)| dxdy$$

olarak elde edilir.

$$\iint_{\mathbb{U}} |f'(z)|^2 dxdy$$

ifadesi f fonksiyonunun *Dirichlet integrali* olarak da adlandırılır. Başka bir deyişle, $f \in \mathcal{S}$ fonksiyonunun sınırlı olması için gerek yeter koşul fonksiyonun sonlu bir Dirichlet integraline sahip olmasıdır. $f \in \mathcal{S}$ için $a_1 = 1$ olduğunu kullanarak yukarıda elde edilen neticeleri aşağıdaki şekilde özetleyebiliriz.

Corollary 2.2. $f \in \mathcal{S}$ ise

$$\iint_{\mathbb{U}} |f'(z)|^2 dxdy = \pi \sum_{n=1}^{\infty} n |a_n|^2$$

eşitliği sağlanır.

Örnek 2.3. $f(z) = z - \frac{1}{2}z^2 = \frac{1}{2}(1 - (1 - z)^2)$ şeklinde tanımlanan fonksiyon $\mathcal{S}$ sınıfındadır. Aslında f fonksiyonu birim diski bir kardioidin içine resmeder. Corollary 2.2 kullanılarak kardioidin alanı belirlenebilir ve f fonksiyonunun sınırlı olduğu doğrulanabilir. $a_1 = 1$, $a_2 = -1/2$ olduğundan

$$\text{Area}(f(\mathbb{U})) = \pi \sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|^2 = \pi \left(1 \cdot |1|^2 + 2 \cdot \left| -\frac{1}{2} \right|^2 \right) = \frac{3\pi}{2} \text{ birim kare} < \infty$$

bulunur. Alternatif olarak $f'(z) = 1 - z$ olduğundan

$$|f'(z)|^2 = (1 - z)(1 - \bar{z}) = 1 - z - \bar{z} + |z|^2$$

ve buradan

$$\begin{aligned} \text{Area}(f(\mathbb{U})) &= \iint_{\mathbb{U}} |f'(z)|^2 dx dy = \iint_{\mathbb{U}} (1 - z - \bar{z} + |z|^2) dx dy \quad (z = x + iy) \\ &= \iint_{\mathbb{U}} [1 - (x + iy) - (x - iy) + x^2 + y^2] dx dy \\ &= \iint_{\mathbb{U}} (1 - 2x + x^2 + y^2) dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 - 2r \cos \theta + r^2) r dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{r^2}{2} - \frac{2r^3}{3} \cos \theta + \frac{r^4}{4} \right)_0^1 d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{4} - \frac{2}{3} \cos \theta \right) d\theta \\ &= \left(\frac{3}{4} \theta - \frac{2}{3} \sin \theta \right)_0^{2\pi} \\ &= \frac{3\pi}{2} \text{ birim kare} \end{aligned}$$

elde edilir.

Şimdi, 1914 yılında Gronwall tarafından keşfedilen ikinci alan teoremini verelim [11]. Bu teorem $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$ domaininde sonsuzdaki rezidüsü 1 olan basit

kutba sahip analitik ve yalınkat olan fonksiyonlar için geçerlidir. Bu tür fonksiyonlar $b_n \in \mathbb{C}$ olmak üzere

$$g(z) = z + b_0 + \frac{b_1}{z} + \frac{b_2}{z^2} + \cdots = z + b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{z^n}, \quad |z| > 1$$

formunda bir Laurent açılımına sahiptir. Σ sembolü bu tip fonksiyonların kümesini göstermek için kullanılsın. Ayrıca, $g \in \Sigma$ ise g fonksiyonu $\mathbb{D}$ domainini bir kompakt (kapalı ve sınırlı) $\mathcal{E}$ kümesinin tümleyeni üzerine resmeder. Bununla beraber, eğer $f \in \mathcal{S}$ ve $g(z) = \frac{1}{f(1/z)}$ şeklinde *tersine* tanımlanırsa

$$g(z) = \frac{1}{\frac{1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \frac{a_3}{z^3} + \cdots} = z - a_2 + (a_2^2 - a_3)z^{-1} + \cdots, \quad |z| > 1$$

elde edilir. Aslında bu ters alma işlemi $\mathcal{S}$ sınıfı ile Σ sınıfının Σ' alt sınıfı arasında $0 \in \mathcal{E}$ olacak şekilde (yani, $\mathbb{D}'$ 'de $g(z) \neq 0$ olacak şekilde) birebir bir eşleme kurar.

$g \in \Sigma$ fonksiyonunun katsayılarının üzerinde yalınkatlık ile belirlenmiş katı bir sınırlama bulunmaktadır. Bu durum aşağıdaki alan teoremiyle ifade edilir.

Teorem 2.4 (Alan Teoremi - II). [11] $g \in \Sigma$ olmak üzere g fonksiyonu

$$g(z) = z + b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^{-n}, \quad |z| > 1 \quad (2.3)$$

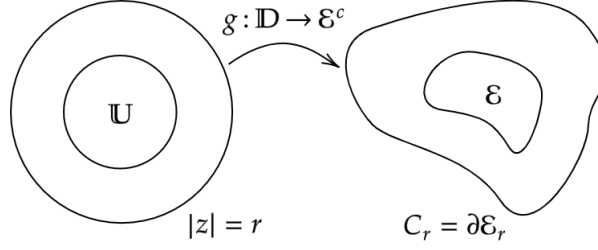
Laurent açılımına sahiptir. O halde

$$\sum_{n=1}^{\infty} n|b_n|^2 \leq 1$$

eşitsizliği gerçekleşir.

Kanıt. $g \in \Sigma$ olsun. g tarafından ihmal edilen kompakt, bağlantılı nokta kümesi $\mathcal{E}$ ile gösterilsin. $r > 1$ olarak kabul edilsin ve C_r , yarıçapı r olan dairenin g altındaki

görüntüsü olsun. g yalınkat bir fonksiyon olduğundan, C_r bir Jordan eğrisi, yani basit (kendi kendini kesmeyen) ve kapalı bir eğridir. Dolayısıyla, C_r eğrisi $\mathcal{E}$ 'yi içeren bir $\mathcal{E}_r$ domainini çevreler (bkz. Şekil 2.2). Green teoremi ve değişken dönüşümü kullanılarak



Şekil 2.2: $g : \mathbb{D} \rightarrow \mathcal{E}^c$ ve $|z| = r$ altında g 'nin görüntüsü C_r

$$\text{Area}(\mathcal{E}_r) = \frac{1}{2i} \int_{C_r} \bar{w} dw = \frac{1}{2i} \int_{|z|=r} \overline{g(z)} g'(z) dz$$

elde edilir. Bu ifadede (2.3) denklemi kullanıldığında ve kutupsal koordinatlara geçildiğinde

$$\begin{aligned} \text{Area}(\mathcal{E}_r) &= \frac{1}{2i} \int_0^{2\pi} \left(r e^{-i\theta} + \sum_{n=0}^{\infty} \bar{b}_n r^{-n} e^{in\theta} \right) \left(1 - \sum_{j=1}^{\infty} j b_j r^{-j-1} e^{-i(j+1)\theta} \right) i r e^{i\theta} d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(r^2 + \sum_{n=0}^{\infty} \bar{b}_n r^{1-n} e^{i(n+1)\theta} \right) \left(1 - \sum_{j=1}^{\infty} j b_j r^{-j-1} e^{-i(j+1)\theta} \right) d\theta \end{aligned}$$

bulunur.

$$n \neq j \quad \text{iken} \quad \int_0^{2\pi} e^{i(n-j)\theta} d\theta = 0$$

ve

$$n = j \quad \text{iken} \quad \int_0^{2\pi} \bar{b}_n r^{1-n} e^{i(n+1)\theta} \cdot j b_j r^{-j-1} e^{-i(j+1)\theta} d\theta = 2\pi n |b_n|^2 r^{-2n}$$

olduğundan

$$\text{Area}(\mathcal{E}_r) = \pi \left(r^2 - \sum_{n=1}^{\infty} n |b_n|^2 r^{-2n} \right)$$

sonucuna ulaşılır. $r \rightarrow 1+$ iken

$$\text{Area}(\mathcal{E}) = \lim_{r \rightarrow 1+} \text{Area}(\mathcal{E}_r) = \pi \left(1 - \sum_{n=1}^{\infty} n |b_n|^2 \right)$$

elde edilir. $\text{Area}(\mathcal{E}) \geq 0$ olduğundan

$$\sum_{n=1}^{\infty} n |b_n|^2 \leq 1$$

eşitsizliğine ulaşılır. □

Corollary 2.5. $g \in \Sigma$ için

$$|b_n| \leq n^{-1/2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

eşitsizliği gerçekleşir.

Belirtmek gerekir ki yukarıdaki sonuçta verilen üst sınır

$$g(z) = z + n^{-1/2} z^{-n}$$

fonksiyonu $\mathbb{D}$ üzerinde yalınkat olmadığından eğer $n \geq 2$ ise kesin değildir. Yani, eşitsizlikte eşitlik hali sağlanmaz. Aslında, $n \geq 2$ için

$$g'(z) = 1 - n^{1/2} z^{-n-1}$$

türevi $\mathbb{D}$ üzerinde bazı noktalarda sifıra eşittir. Bununla birlikte, $|b_1| = 1$ ise

$$g(z) = z + b_0 + \frac{b_1}{z}$$

fonksiyonu $\mathbb{D}$ üzerinde yalınkattır ve bu nedenle üst sınırmın $n = 1$ için kesin olduğu

kolayca kontrol edilebilir.

Corollary 2.6. *Eğer $g \in \Sigma$ ise*

$$|b_1| \leq 1$$

eşitsizliği gerçekleşir. Ayrıca, eşitliğin sağlanması için gerek yeter koşul $b_0 \in \mathbb{C}$ ve $|b_1| = 1$ olmak üzere g fonksiyonunun

$$g(z) = z + b_0 + \frac{b_1}{z}, \quad z \in \mathbb{D}$$

formunda olmasıdır. Bu, $\mathbb{D}$ üzerinden uzunluğu 4 birim olan bir doğru parçasının tümleyeni üzerine konform bir tasvirdir.

Şimdi alan teoremini kullanarak Bieberbach'ın 1916'de $f \in \mathcal{S}$ için $|a_2| \leq 2$ ifadesini nasıl kanıtladığı gösterelim.

Teorem 2.7 (Bieberbach Teoremi). *[4] Eğer $f(z) = z + a_2z^2 + a_3z^3 + \dots \in \mathcal{S}$ ise $|a_2| \leq 2$ dir. Eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter koşul f fonksiyonunun Koebe fonksiyonunun bir dönüşümü olmasıdır.*

Kanıt. $f \in \mathcal{S}$ ise $f(z) = z + a_2z^2 + a_3z^3 + \dots$ ($z \in \mathbb{U}$) formunda bir açılıma sahiptir. Her z için $F^2(z) = f(z^2)$ olacak şekilde bir $F \in \mathcal{S}$ tek fonksiyonu tanımlansın. Bu fonksiyon için

$$F^2(z) = f(z^2) = z^2 + a_2z^4 + a_3z^6 + \dots = z^2(1 + a_2z^2 + a_3z^4 + \dots)$$

ifadesi geçerli olduğundan F fonksiyonunun Taylor açılımı

$$F(z) = z + c_3z^3 + c_5z^5 + \dots$$

formundadır. Bu durumda

$$F^2(z) = (z + c_3z^3 + c_5z^5 + \dots)(z + c_3z^3 + c_5z^5 + \dots) = z^2 + a_2z^4 + a_3z^6 + \dots$$

yazılabilir. Yukarıdaki ifadelerin katsayıları karşılaştırıldığında

$$z^2 + 2c_3z^4 + \dots = z^2 + a_2z^4 + a_3z^6 + \dots$$

elde ederiz. Buradan $c_3 = \frac{a_2}{2}$ neticesine ulaşılır.

Şimdi $z \in \mathbb{D}$ olmak üzere $g(z) = \frac{1}{F(\frac{1}{z})}$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda $g \in \Sigma$ olur. Ayrıca g fonksiyonunun tek ve $\mathbb{D}$ 'de

$$g(z) = \frac{1}{\frac{1}{z} + \frac{c_3}{z^3} + \dots} = z - \frac{c_3}{z} + \dots = z - \frac{a_2/2}{z} + \dots$$

formunda bir Laurent serisi açılımına sahip olduğu açıktır. Bu aşamada Corollary 2.6 kullanıldığında $|a_2| \leq 2$ sonucuna ulaşılır.

Eğer $|a_2| = 2$ ise Corollary 2.6'dan $|b_1| \leq 1$ eşitsizliğini sağlayan bir $b_1 \in \mathbb{C}$ için g fonksiyonunun $g(z) = z - \frac{b_1}{z}$ şeklindeki bir formu olduğu sonucu elde edilir. Bu durumda $F(z) = \frac{z}{1-b_1z^2}$ ve $f(z) = \frac{z}{(1-b_1z)^2}$ ($z \in \mathbb{U}$) şeklindedir. $\square$

Eğer $f(z) = z + a_2z^2 + a_3z^3 + \dots$ fonksiyonu $f \in \mathcal{S}$ olmak üzere

$$g(z) = \frac{1}{f(1/z)} = z - a_2 + (a_2^2 - a_3)z^{-1} + \dots, \quad z \in \mathbb{D} \quad (2.4)$$

şeklinde yazılır ve Corollary 2.6'nın sonucu g fonksiyonunda kullanılırsa aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 2.8. $f \in \mathcal{S}$ ise $|a_2^2 - a_3| \leq 1$ eşitsizliği gerçekleşir.

Uyarı 2.9. *Koebe fonksiyonun*

$$k(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = z + 2z^2 + 3z^3 + 4z^4 + \dots$$

açılımı kullanılırsa $|a_2^2 - a_3| = |2^2 - 3| = 1$ eşitlik durumu elde edilir. Ancak $\mathcal{S}$ sınıfına ait Teorem 2.8'deki eşitliği sağlayan başka fonksiyonlar da vardır. Örneğin, $f(z) = \frac{z}{1-z^2} = z + z^3 + z^5 + \dots$ fonksiyonu eşitliği gerçektir.

Corollary 2.10. *f fonksiyonu $\mathcal{S}$ sınıfına ait bir tek fonksiyon olmak üzere $f(z) = z + c_3z^3 + c_5z^5 + \dots$ ($z \in \mathbb{U}$) yazılabilir. Burada $|c_3| \leq 1$ eşitsizliği sağlanır. Ayrıca eşitliğin sağlanması için gerek yeter koşul $f(z)$ fonksiyonunun $g(z) = \frac{z}{1-z^2}$ fonksiyonunun bir dönüşümü olmasıdır.*

Bieberbach hipotezi, yalınkat fonksiyonlar teorisinin gelişiminde bir başlangıç noktası olmuş ve geçtiğimiz yüzyıl boyunca geniş kapsamlı bir matematik araştırma alanına dönüşmüştür.

Teorem 2.11 (Bieberbach Hipotezi). *[7] Eğer $f(z) \in \mathcal{S}$ ise f fonksiyonu*

$$f(z) = z + a_2z^2 + a_3z^3 + \dots = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$$

formunda bir Maclaurin serisi açılımına sahiptir ve her $n \geq 2$ için

$$|a_n| \leq n \tag{2.5}$$

sağlanır. Eşitliğin gerçekleşmesi için gerek yeter şart f fonksiyonunun Koebe fonksiyonunun bir dönüşümü olmasıdır.

Bieberbach hipotezi, 20. yüzyılın en meşhur matematik problemlerinden biri haline gelmiştir. Bu hipotez üzerine yapılan çalışmalar yavaş ilerlemiş ve 1968 yılına

dek yalnızca $n = 2, 3, 4, 5$ ve 6 durumları için ispat sağlanabilmiştir. Hipotezin $n \geq 3$ durumları için doğruluğunu göstermek, temel yöntemlerin ötesinde, daha sofistike tekniklerin kullanılmasını gerektirmiştir. Bu bağlamda, $n = 3$ durumu ilk kez 1923 yılında Karl Löwner tarafından ele alınmıştır. Löwner, diferansiyel denklemler aracılığıyla tanımlanan ve $\mathcal{S}$ sınıfında yoğun bir alt sınıf oluşturan özel bir fonksiyon ailesi üzerinden son derece yaratıcı bir yöntem geliştirmiştir. Bu yaklaşım yalnızca $n = 3$ durumu için Bieberbach hipotezini doğrulamakla kalmamış, aynı zamanda $f \in \mathcal{S}$ olan fonksiyonların terslerinin katsayılarına ilişkin kesin sınırların elde edilmesini de mümkün kılmıştır. Daha da önemlisi, Löwner tarafından geliştirilen bu teori, ilerleyen yıllarda Louis de Branges tarafından hipotezin genel durumunun ispatında temel bir araç olarak kullanılmıştır. Böylece Löwner teorisi, yalnızca özel bir durumu çözmekle sınırlı kalmamış, hipotezin nihai çözümüne giden yolda belirleyici bir rol oynamıştır.

Yirminci yüzyıl boyunca, diğer matematikçiler $|a_n| < Cn$ eşitsizliğini sağlayan en küçük C sabitini bulmaya çalışmışlardır. 1976 yılına kadar C sabiti için bilinen en iyi sınır yaklaşık olarak 1.0691 idi ve bu sınır her $n \geq 2$ için bilinen en iyi sınır olup de Branges'ın 1984 yılında Bieberbach hipotezini kanıtlamasına kadar geçerli kalmıştır.

Şimdi, Bieberbach teoreminin önemli bir uygulaması olarak, Koebe'ye ait klasik örtme teoremine değineceğiz. Her $f \in \mathcal{S}$ fonksiyonu, $f(0) = 0$ koşulunu sağlayan ve birim disk üzerinde yalınkat bir açık tasvirdir. Bu nedenle, böyle bir fonksiyonun değer bölgesi mutlaka orijini merkez kabul eden bir diski içermek zorundadır. Koebe, 1907 yılının başlarında gerçekleştirdiği çalışmasında [15], $\mathcal{S}$ sınıfındaki her fonksiyonun değer bölgesinin, yarıçapı $\rho > 0$ olan ve orijini içeren bir diski kapsadığını göstermiştir. Daha spesifik olarak, bu değer bölgesinin mutlaka $|w| < \rho$ biçiminde bir diski içerdiğini ispatlamıştır. Bu bağlamda, Koebe tarafından tanımlanan özel bir fonksiyon olan Koebe fonksiyonu, kapsanan diskin yarıçapı için en küçük olası değer $\rho = \frac{1}{4}$ olduğunu ortaya koymuştur. Daha sonra Bieberbach [4], bu hipotezi

kesinleştirek $\mathcal{S}$ sınıfındaki tüm fonksiyonların değer bölgelerinin orijini merkez alan ve yarıçapı tam olarak $\frac{1}{4}$ olan bir diski mutlaka içerdiğini matematiksel olarak kanıtlamıştır. Bu sonuç, yalnızca Koebe fonksiyonunun ekstremal bir örnek olduğunu göstermekle kalmaz, aynı zamanda örtme teoreminin kesinliğini de ortaya koyar.

Teorem 2.12 (Koebe 1/4 Teoremi). *[8, sayfa 31] Her $f \in \mathcal{S}$ fonksiyonunun değer kümesi $\{w \in \mathbb{C} : |w| < 1/4\}$ diskini içerir. Yani, $\text{dist}(0, \partial f(\mathbb{U})) \geq 1/4$ ifadesi gerçekleşir.*

Kanıt. $f \in \mathcal{S}$ olmak üzere

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots, \quad |z| < 1$$

yazılabilir ve Bieberbach teoremi (Theorem 2.7) gereği $|a_2| \leq 2$ eşitsizliği doğrudur.

Şimdi $z_0 \notin f(\mathbb{U})$ olmak üzere

$$\begin{aligned} g_{z_0}(z) &= \frac{z_0 f(z)}{z_0 - f(z)} = \frac{z_0(z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots)}{z_0 - (z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots)} = \frac{z_0 z + z_0 a_2 z^2 + z_0 a_3 z^3 + \dots}{z_0 - z - a_2 z^2 - a_3 z^3 - \dots} \\ &= z + \left(a_2 + \frac{1}{z_0}\right) z^2 + \dots \end{aligned}$$

ihmal edilen değer transformasyonunu göz önüne alalım. $g_{z_0} \in \mathcal{S}$ olduğu bilindiğine göre, Bieberbach teoreminden

$$\left|a_2 + \frac{1}{z_0}\right| \leq 2.$$

sonucuna varırız. Ayrıca $|a_2| \leq 2$ olduğu göz önüne alındığında

$$\left|\frac{1}{z_0}\right| = \left|\frac{1}{z_0} + a_2 - a_2\right| \leq \left|\frac{1}{z_0} + a_2\right| + |a_2| \leq 4 \quad \text{veya} \quad |z_0| \geq \frac{1}{4}$$

bulunur. Yani $f \in \mathcal{S}$ 'nin her ihmal edilen değeri orijin merkezli ve yarıçapı $1/4$ olan diskin dışında yer alır. □

Bu kanıt aslında $\mathcal{S}$ sınıfındaki modülü $\frac{1}{4}$ olan bir değeri ihmal eden fonksiyonların yalnızca Keobe fonksiyonu ve onun rotasyonları olduğunu gösterir. Dolayısıyla, $\mathcal{S}$ sınıfındaki diğer tüm fonksiyonların değer bölgesi daha büyük bir yarıçapa sahip bir disk içerir.

(2.4) denkleminde geri dönersek, ilk göze çarpan $|a_3 - a_2^2| \leq 1$ eşitsizliğidir. Bu eşitsizlik Fekete ve Szegő'nün daha derin bir teoremine ilham vermiştir ve kanıtı Löwner teorisi ile birlikte Valiron ve Landau'nun lemmasını gerektirmiştir.

Teorem 2.13 (Fekete–Szegő Teoremi). *[8, sayfa 104] $f \in \mathcal{S}$ olsun ve $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ verilsin. Buna göre $0 < \mu < 1$ için*

$$|a_3 - \mu a_2^2| \leq 1 + 2e^{-2\mu/(1-\mu)}$$

eşitsizliği gerçekleşir. Bu eşitsizlik her μ için kesindir.

Koebe fonksiyonu yukarıda verilen Fekete–Szegő teoreminde ekstremal fonksiyon olmadığından, yalınkat fonksiyonlar teorisi yalnızca $\mathcal{S}$ sınıfındaki problemlerde k fonksiyonunun ekstremal olduğunu göstermekten ibaret değildir.

Bölüm 3

Büyüme ve Distorsiyon Teoremleri

Bieberbach'ın $|a_2| \leq 2$ eşitsizliği, konform tasvirlerin geometrik teorisi üzerinde derin ve kalıcı etkiler bırakmıştır. Bu bağlamda elde edilen en önemli sonuçlardan biri, $\mathcal{S}$ sınıfına ait fonksiyonların türevlerinin modülleri için, yani $|f'(z)|$ ifadesi açısından kesin alt ve üst sınırlar sağlayan *Koebe distorsiyon teoremidir*. “Distorsiyon” terimi $|f'(z)|$ büyüklüğünün ilgili konform tasvir altında yay uzunluğunun sonsuz küçük ölçekteki büyüme oranı olarak geometrik bir yoruma sahip olmasından kaynaklanır. Benzer şekilde, $|f'(z)|^2$ ifadesi de bu tasvirin Jacobian determinanı olarak alanın sonsuz küçük büyüme faktörünü temsil eder.

Aşağıdaki lemma, distorsiyon teoreminin kanıtında ve onunla ilişkili çeşitli sonuçların elde edilmesinde temel bir araç olarak kullanılmaktadır.

Lemma 3.1. $f \in \mathcal{S}$ ise

$$\left| \frac{zf''(z)}{f'(z)} - \frac{2|z|^2}{1-|z|^2} \right| \leq \frac{4|z|}{1-|z|^2}, \quad z \in \mathbb{U} \quad (3.1)$$

eşitsizliği gerçekleşir.

Kanıt. $f \in \mathcal{S}$ olsun. Bir $\zeta \in \mathbb{U}$ sabiti için $T_\zeta(0) = \zeta$ eşitliğini sağlayan $\mathbb{U}$ 'nun $\mathbb{U}$

üzerine

$$T_{\zeta}(z) = \frac{z + \zeta}{1 + \bar{\zeta}z}$$

olarak tanımlanan Möbius transformasyonu göz önüne alınsın. Buna göre

$$T'_{\zeta}(z) = \frac{1 \cdot (1 + \bar{\zeta}z) - \bar{\zeta}(z + \zeta)}{(1 + \bar{\zeta}z)^2} = \frac{1 + \bar{\zeta}z - \bar{\zeta}z - |\zeta|^2}{(1 + \bar{\zeta}z)^2} = \frac{1 - |\zeta|^2}{(1 + \bar{\zeta}z)^2}$$

olduğundan $T'_{\zeta}(0) = 1 - |\zeta|^2$ sağlanır. Bu nedenle

$$F_{\zeta}(z) = \frac{f(T_{\zeta}(z)) - f(\zeta)}{(1 - |\zeta|^2)f'(\zeta)} \quad (3.2)$$

olarak tanımlanırsa bu bir disk otomorfizması olduğunda $F_{\zeta} \in \mathcal{S}$ 'dir. (1.7) denkleminde $T_{\zeta}(z)$ fonksiyonunun Taylor serisi açılımı

$$T_{\zeta}(z) = \zeta + (1 - |\zeta|^2)z - \bar{\zeta}(1 - |\zeta|^2)z^2 + \dots$$

şeklindedir. Bu yüzden, $f(T_{\zeta}(z))$ 'nin Taylor serisi

$$f(T_{\zeta}(z)) = f(\zeta) + f'(\zeta)[T_{\zeta}(z) - \zeta] + \frac{f''(\zeta)}{2!}[T_{\zeta}(z) - \zeta]^2 + \dots$$

formunda olup buradan

$$f(T_{\zeta}(z)) - f(\zeta) = (1 - |\zeta|^2)f'(\zeta)z + \left[\frac{f''(\zeta)}{2}(1 - |\zeta|^2)^2 - \bar{\zeta}(1 - |\zeta|^2)f'(\zeta) \right] z^2 + \dots \quad (3.3)$$

elde edilir. Şimdi (3.3) denklemini (3.2) ifadesinde kullanılırsa

$$F_{\zeta}(z) = z + \frac{1}{2} \left[(1 - |\zeta|^2) \frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)} - 2\bar{\zeta} \right] z^2 + \dots$$

bulunur. Dolayısıyla Bieberbach teoremi'ne (Theorem 2.7) göre

$$\frac{1}{2} \left| (1 - |\zeta|^2) \frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)} - 2\bar{\zeta} \right| \leq 2$$

eşitsizliğine ulaşılır. Yukarıdaki denklem $\frac{2|\zeta|}{1-|\zeta|^2}$ ile çarpıldığında

$$\left| \frac{\zeta f''(\zeta)}{f'(\zeta)} - \frac{2\zeta\bar{\zeta}}{1-|\zeta|^2} \right| \leq \frac{4|\zeta|}{1-|\zeta|^2} \quad (3.4)$$

elde edilir. Son olarak (3.4) denkleminde ζ yerine z koyarak bu lemmanın ispatı tamamlanır. Koebe fonksiyonunun uygun bir rotasyonu ile yukarıdaki eşitlik her $z \in \mathbb{U}$ için eşitlik haline gelir. $\square$

Şimdi $\mathcal{S}$ sınıfı için distorsiyon teoremini verelim.

Teorem 3.2 (Distorsiyon Teoremi). $f \in \mathcal{S}$ ise

$$\frac{1-|z|}{(1+|z|)^3} \leq |f'(z)| \leq \frac{1+|z|}{(1-|z|)^3}, \quad z \in \mathbb{U} \quad (3.5)$$

eşitsizliği geçerlidir. Eşitliğin sağlanması için gerek yeter koşul f fonksiyonunun Koebe fonksiyonunun bir dönüşümü olmasıdır.

Kanıt. $|\zeta| \leq C$ eşitsizliğinin $-C \leq \operatorname{Re}\{\zeta\} \leq C$ bağıntısını gerektirdiği (3.1) denkleminde kullanılarak

$$-\frac{4|z|}{1-|z|^2} \leq \operatorname{Re} \left\{ \frac{zf''(z)}{f'(z)} - \frac{2|z|^2}{1-|z|^2} \right\} \leq \frac{4|z|}{1-|z|^2}$$

ve buradan

$$\frac{2|z|^2}{1-|z|^2} - \frac{4|z|}{1-|z|^2} \leq \operatorname{Re} \left\{ \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right\} \leq \frac{2|z|^2}{1-|z|^2} + \frac{4|z|}{1-|z|^2} \quad (3.6)$$

elde edilir. $f'(z) \neq 0$ ve $f'(0) = 1$ sağlandığından $\log f'(z)$ 'in orijinde sıfır olan tek değerli bir dalı seçilebilir. Ayrıca, $z = re^{i\theta}$ ve sabit θ için

$$r \frac{\partial}{\partial r} \log f'(z) = r \frac{\partial}{\partial r} [\log |f'(z)| + i \arg f'(z)]$$

ve

$$r \frac{\partial}{\partial r} \log f'(z) = r \frac{d}{dz} [\log f'(z)] \frac{\partial z}{\partial r} = r \frac{f''(z)}{f'(z)} e^{i\theta} = \frac{zf''(z)}{f'(z)}$$

olduğu görülür. Son iki ifadenin sağ tarafındaki reel kısımları eşitlediğimizde

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right\} = r \frac{\partial}{\partial r} \operatorname{Re} \{ \log f'(z) \}, \quad |z| = r \quad (3.7)$$

bulunur. (3.6) ve (3.7) denklemleri birleştirilerek

$$\frac{2|z| - 4}{1 - |z|^2} \leq \frac{\partial}{\partial r} \log |f'(z)| \leq \frac{2|z| + 4}{1 - |z|^2}$$

veya buna denk olarak

$$\frac{2r - 4}{1 - r^2} \leq \frac{\partial}{\partial r} \log |f'(re^{i\theta})| \leq \frac{2r + 4}{1 - r^2} \quad (z = re^{i\theta}) \quad (3.8)$$

elde edilir. Yukarıdaki ifadenin r 'ye göre 0'dan R 'ye integrali alınır

$$\int_0^R \frac{2r - 4}{1 - r^2} dr \leq \log |f'(Re^{i\theta})| \leq \int_0^R \frac{2r + 4}{1 - r^2} dr \quad (3.9)$$

sonucu bulunur. Buradan

$$\int_0^R \frac{2r - 4}{1 - r^2} dr = \int_0^R \left[\frac{1}{r - 1} - \frac{3}{1 + r} \right] dr = [\log(1 - r) - 3 \log(1 + r)]_0^R = \log \frac{1 - R}{(1 + R)^3}$$

ve

$$\int_0^R \frac{2r+4}{1-r^2} dr = \int_0^R \left[\frac{1}{1+r} + \frac{3}{1-r} \right] dr = [\log(1+r) - 3\log(1-r)]_0^R = \log \frac{1+R}{(1-R)^3}$$

olduğu gözlemlenir. (3.9) denkleminde bu sonuçlar kullanılarak

$$\log \frac{1-R}{(1+R)^3} \leq \log |f'(Re^{i\theta})| \leq \log \frac{1+R}{(1-R)^3}$$

bulunur. Buradan üstel alınır ve R ifadesi $|z| = r$ ile değiştirilirse istenen sonuç elde edilir.

Şimdi $k(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$ Koebe fonksiyonunu ele alalım. Bu fonksiyonun türevi

$$k'(z) = \frac{1 \cdot (1-z)^2 + 2z(1-z)}{(1-z)^4} = \frac{1+z}{(1-z)^3}$$

olup $|f'(z)|$ için yapılan her iki tahminde de bu fonksiyonun en iyi sonuçları verdiği görülür. Dahası (3.5) eşitsizliğinde yer alan alt veya üst sınırlardan birisi $z = Re^{i\theta}$ için eşitlik durumunda olduğunda her r ($0 \leq r \leq R$) için (3.8) denkleminin yine aynı sınırı eşit formda olur. Özel olarak $r = 0$ için

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{e^{i\theta} f''(0)}{f'(0)} \right\} = -4 \quad \text{veya} \quad \operatorname{Re} \left\{ \frac{e^{i\theta} f''(0)}{f'(0)} \right\} = 4$$

elde edilir. Bu da $|a_2| = 2$ olduğu anlamına gelir. Dolayısıyla Bieberbach teoremine göre f fonksiyonu Koebe fonksiyonunun bir dönüşümü olmalıdır. $\square$

Distorsiyon teoremi $|f(z)|$ için kesin üst ve alt sınırlar elde etmede kullanılır.

Teorem 3.3 (Büyüme Teoremi). $f \in \mathcal{S}$ ise

$$\frac{|z|}{(1+|z|)^2} \leq |f(z)| \leq \frac{|z|}{(1-|z|)^2}, \quad z \in \mathbb{U} \quad (3.10)$$

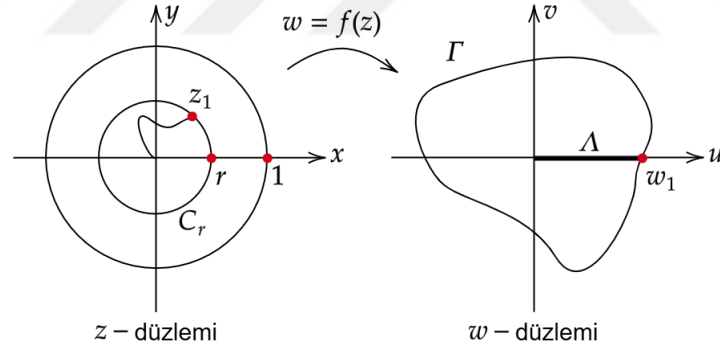
ifadesi gerçeklenir. EŖitliĐin sağlanması in gerek yeter koŖul f fonksiyonunun Koebe fonksiyonunun uygun bir dnŖm olmasıdır.

Kanıt. $f \in \mathcal{S}$ ve $z = re^{i\theta} \in \mathbb{U}$ bir sabit olsun. (3.10) ifadesinin sağ tarafında yer alan eŖitsizliĐi ispatlamak in Teorem 3.2 ve $f(0) = 0$ olduğu gerçeği kullanılarak integral alınırsa

$$\begin{aligned} |f(z)| &= \left| \int_0^z f'(s) ds \right| = \left| \int_0^r f'(\rho e^{i\theta}) e^{i\theta} d\rho \right| \\ &\leq \int_0^r |f'(\rho e^{i\theta})| d\rho \leq \int_0^r \frac{1+\rho}{(1-\rho)^3} d\rho = \frac{r}{(1-r)^2} \end{aligned}$$

elde edilir.

(3.10) denkleminin sol tarafını ispatlamak daha detaylı bir inceleme yapmayı gerektirir. $\Gamma = f(C_r)$ ve Γ üzerinde orijine en yakın nokta w_1 olsun. f fonksiyonunun uygun bir dnŖm kullanılarak $w_1 > 0$ olduğu varsayılabilir. Ayrıca $0 \leq w \leq w_1$ Ŗeklinde belirlenen doğru parçası Λ olsun ve $f(z)$ altında w_1 ve Λ 'nın ngrntleri sırası ile z_1 ve L ile gösterilsin. L üzerinde z 'yi integral deĐiŖkeni olarak alarak L



zerinde $f'(z)dz = dw > 0$ neticesi elde edilir. Bu nedenle

$$\begin{aligned} w_1 &= \int_0^{w_1} dw = \int_0^{z_1} f'(z) dz = \int_0^{z_1} |f'(z)| |dz| \\ &\geq \int_0^r |f'(\rho e^{i\theta})| d\rho \geq \int_0^r \frac{1-\rho}{(1+\rho)^2} d\rho = \frac{r}{(1+r)^2} \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır.

Eğer bir $f \in \mathcal{S}$ için (3.10) eşitsizliğin alt ya da üst sınırında eşitlik gerçekleşirse, o zaman (3.5) ifadesinde de ilgili sınırdaki eşitlik söz konusu olur. Bu nedenle distorsiyon teoremi gereği eşitliği sağlayan fonksiyon f , Koebe fonksiyonu ya da uygun bir dönüşümü olmalıdır. $\square$

Aşağıdaki sonuç büyüme teoremi ile distorsiyon teoremi arasındaki ilişkiyi ortaya koymaktadır. Bununla birlikte kolay görülsede bu sonuç sadece büyüme ve distorsiyon teoremlerinin bir uygulaması değildir, aksine Lemma 3.1’de kullanılan disk otomorfizmini gerektirir. Aslında, eğer $f \in \mathcal{S}$ ve $z \in \mathbb{U}$ ise büyüme ve distorsiyon teoremlerinin direk sonucu

$$\left(\frac{1-|z|}{1+|z|}\right)^3 \leq \left|\frac{zf'(z)}{f(z)}\right| \leq \left(\frac{1+|z|}{1-|z|}\right)^3 \quad (3.11)$$

şeklinde olup bu ifade aşağıdakine göre daha zayıftır.

Corollary 3.4. *Eğer $f \in \mathcal{S}$ ise*

$$\frac{1-|z|}{1+|z|} \leq \left|\frac{zf'(z)}{f(z)}\right| \leq \frac{1+|z|}{1-|z|}, \quad z \in \mathbb{U} \quad (3.12)$$

eşitsizliği sağlanır. Eşitliğin sağlanması için gerek yeter koşul f fonksiyonunun Koebe fonksiyonunun uygun bir dönüşümü olmasıdır.

Kanıt. $f \in \mathcal{S}$ olsun. Lemma 3.1’in kanıtında olduğu gibi sabit bir $\zeta \in \mathbb{U}$ seçilir ve $T_\zeta(z)$ fonksiyonu

$$T_\zeta(z) = \frac{z + \zeta}{1 + \bar{\zeta}z}$$

şeklinde tanımlanırsa

$$F_\zeta(z) = \frac{f(T_\zeta(z)) - f(\zeta)}{(1-|\zeta|^2)f'(\zeta)}$$

disk otomorfizmi için $F_\zeta \in \mathcal{S}$ ifadesinin doğru olduğu görülür. Büyüme teoreminden (Teorem 3.3)

$$\frac{|\zeta|}{(1+|\zeta|)^2} \leq |F_\zeta(-\zeta)| \leq \frac{|\zeta|}{(1-|\zeta|)^2} \quad (3.13)$$

bulunur. Ancak $T_\zeta(-\zeta) = f(0) = 0$ olduğundan

$$F_\zeta(-\zeta) = \frac{f(T_\zeta(-\zeta)) - f(\zeta)}{(1-|\zeta|^2)f'(\zeta)} = \frac{f(0) - f(\zeta)}{(1-|\zeta|^2)f'(\zeta)} = \frac{-f(\zeta)}{(1-|\zeta|^2)f'(\zeta)}$$

elde edilir ve bu sonuç (3.13) denkleminde kullanıldığında

$$\frac{|\zeta|}{(1+|\zeta|)^2} \leq \frac{|f(\zeta)|}{(1-|\zeta|^2)|f'(\zeta)|} \leq \frac{|\zeta|}{(1-|\zeta|)^2} \quad (3.14)$$

bulunur. Son olarak, (3.14) denkleminde ζ yerine z yazılır ve sadeleştirme işlemi uygulanırsa (3.12) denklemi elde edilir ve lemma kanıtlanmış olur. Yine belirtmek gerekir ki (3.12) denklemi (3.11) denklemini gerektirmez. $\square$

Önerme 3.5. Her $0 < r < 1$ için bir $C_r < \infty$ sabiti vardır, öyleki $f \in \mathcal{S}$ ve $|z| \leq r$ ise

$$|f(z) - z| \leq C_r |z|^2 \quad (3.15)$$

eşitsizliği gerçekleşir. Burada, C_r için en iyi seçim

$$C_r = \frac{2-r}{(1-r)^2}$$

ifadesidir.

Kanıt. $f \in \mathcal{S}$ olduğundan $f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots$ şeklinde ifade edilebilir ve

buradan

$$\begin{aligned} |f(z) - z| &= \left| \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \right| \leq \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| |z|^n \\ &= |z|^2 \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| |z|^{n-2} \leq |z|^2 \sum_{n=2}^{\infty} n r^{n-2} = \frac{2-r}{(1-r)^2} |z|^2 \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Burada ikinci eşitsizlikte $|a_n| \leq n$ ve $|z| \leq r$ ifadeleri kullanılmıştır.

□



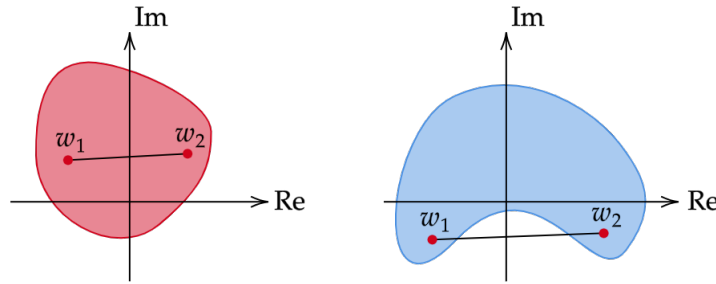
Bölüm 4

Bazı Temel Alt Sınıflar

Bu bölümde $\mathcal{S}$ sınıfının geometrik koşullarla tanımlanan bazı alt sınıfları incelenecektir. Diğer neticelerin yanı sıra bu alt sınıfların her biri için Biberbach tahminini kanıtlanacaktır.

Tanım 4.1 (Konveks Fonksiyonlar ve $\mathcal{C}$ Sınıfı). *Düzlemde bir $\mathcal{D}$ domaini, içerisinde yer alan herhangi iki w_1 ve w_2 noktalarını birleştiren doğru parçası tamamen $\mathcal{D}$ 'nin içerisinde yer alıyorsa konveks olarak adlandırılır (bkz. Şekil 4.1). Eğer bir $f(z)$ fonksiyonu $\mathbb{U}$ birim diskini konform olarak bir konveks domaine resmediyor ise konveks fonksiyon olarak adlandırılır.*

$\mathbb{U}$ üzerinde konveks olan tüm $f \in \mathcal{S}$ fonksiyonlarının kümesi $\mathcal{C}$ ile gösterilir.

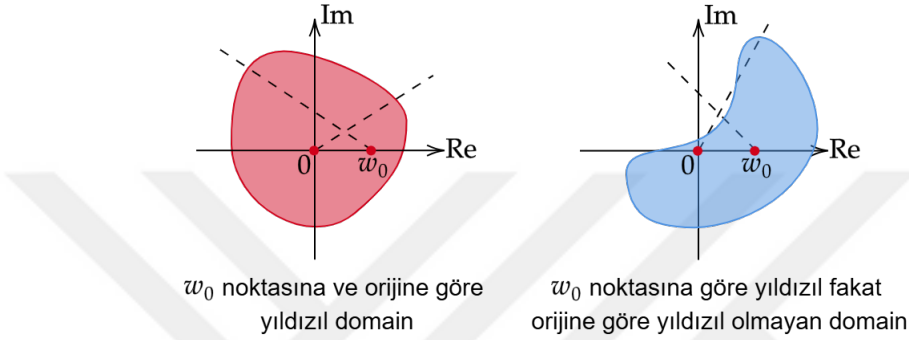


Şekil 4.1: Konveks ve konveks olmayan domainler

Tanım 4.2 (Yıldızıl Fonksiyonlar ve $\mathcal{S}^*$ Sınıfı). *Düzlemdeki bir $\mathcal{D}$ domaini içinde yer alan herhangi bir w_0 noktasını başlangıç olarak kabul eden her doğru parçası veya ırsın*

$\mathcal{D}$ 'nin sınırını sadece tek bir noktada kesiyorsa $\mathcal{D}$ domainine w_0 noktasına göre yıldızlı denir. Daha gözümüzde canlandırabileceğimiz bir ifadeyle tanıma göre $\mathcal{D}$ 'nin her noktası w_0 noktasından "görülebilir" durumdadır. Eğer bir $f(z)$ fonksiyonu $\mathbb{U}$ birim diskini w_0 noktasına göre yıldızlı bir domain üzerine konform olarak resmediyorsa, bu durumda $f(z)$ fonksiyonuna w_0 noktasına göre yıldızlıdır denir. Özel olarak $w_0 = 0$ olması durumunda $f(z)$ fonksiyonu yıldızlı fonksiyon olarak adlandırılır.

$\mathbb{U}$ birim diskinde yıldızlı olan tüm $f \in \mathcal{S}$ fonksiyonlarının sınıfı $\mathcal{S}^*$ ile gösterilir.



Uyarı 4.3. Bir $\mathcal{D}$ konveks domaini her iç noktasında yıldızlıdır. Aksine, eğer bir $\mathcal{D}$ domaini her iç noktasında yıldızlı ise bir konvektir. Bu nedenle, $\mathcal{C} \subset \mathcal{S}^* \subset \mathcal{S}$ şeklinde bir içermeye bağıntısı vardır. Örneğin, $f(z) = \frac{1+z}{1-z}$ fonksiyonu $\mathbb{U}$ 'yu sağ yarım düzleme resmettiği için bir konveks fonksiyondur. Öte yandan, Koebe fonksiyonu yıldızlı olmasına rağmen konveks değildir. Aslında, $k(\mathbb{U})$ bölgesi her $w_0 > -1/4$ noktasına göre yıldızlıdır.

En temel ve üzerinde en çok çalışılan yalınkat fonksiyonların iki alt sınıfı $\mathcal{C}$ ve $\mathcal{S}^*$ 'dir. Konveks fonksiyonlara ilişkin ilk çalışma Study'nin 1913 tarihli kitabında [25] yer almaktadır. Diğer taraftan, yıldızlı fonksiyonlar Nevanlinna tarafından 1921'de tanıtılmıştır [18]. Koebe fonksiyonunun $\mathcal{S}^*$ sınıfına ait olmasından dolayı yıldızlı fonksiyonlar özellikle ilgi çekici olup $\mathcal{S}$ sınıfının diğer alt sınıflarına göre daha çok araştırılmışlardır. Söz edilen faktörler ve yıldızlı fonksiyonların görüntülerinin geometrisi,

$\mathcal{S}^*$ sınıfındaki fonksiyonlar için zengin ve güzel bir dizi özellik ortaya koymaktadır. Bu özelliklerin bazıları $\mathcal{S}$ sınıfındaki fonksiyonlar için de geçerliyen, bazıları ya yanlış ya da $\mathcal{S}$ sınıfı için açık problemlerdir.

$\mathcal{C}$ ve $\mathcal{S}^*$ sınıfları, pozitif reel kısma sahip fonksiyonlar sınıfı $\mathcal{P}$ ile yakından ilişkilidir.

Tanım 4.4 (Carathéodory Fonksiyonları). *p fonksiyonu $\mathbb{U}$ birim diski üzerinde analitik ve $p(0) = 1$ olsun. $0 \leq \alpha < 1$ için $\mathcal{P}_\alpha$ ile*

$$\operatorname{Re} p(z) > \alpha \quad (z \in \mathbb{U})$$

eşitsizliğini sağlayan

$$p(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} p_n z^n$$

Taylor açılımına sahip p fonksiyonlarının sınıfı ifade edilsin. $\mathcal{P}_0$ sınıfı kısaca $\mathcal{P}$ ile gösterilir ve bu sınıfa ait fonksiyonlar pozitif reel kısma sahip fonksiyonlar veya Carathéodory fonksiyonları olarak adlandırılır.

$\mathbb{U}$ birim diskini $\{w : \operatorname{Re} w > \alpha\}$ yarım düzlemine resmeden

$$\begin{aligned} p(z) &= \frac{1 + (1 - 2\alpha)z}{1 - z} = \frac{1 + z}{1 - z}(1 - \alpha) + \alpha = (1 + z) \left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n \right) (1 - \alpha) + \alpha \\ &= \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} 2z^n \right) (1 - \alpha) + \alpha = 1 + 2(1 - \alpha) \sum_{n=1}^{\infty} z^n \end{aligned}$$

fonksiyonu $p \in \mathcal{P}_\alpha$ fonksiyonlarının bir örneği olarak verilebilir. Başka bir örnek ise $\mathcal{P}_\alpha$ sınıfına ait olmakla beraber $n \geq 2$ için yalınkat olmayan $p(z) = 1 - (1 - \alpha)z^n$, $n \in \mathbb{N}$ fonksiyonudur.

Aşağıdaki lemma Carathéodory tarafından [5] verilmiş olup teoride sıklıkla kullanılmaktadır.

Lemma 4.5 (Carathéodory's Lemma). *Eğer $p \in \mathcal{P}$ ve*

$$p(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} p_n z^n$$

ise $|p_n| \leq 2$ eşitsizliği her $n = 1, 2, \dots$ için sağlanır. Bu eşitsizlik her n için kesindir.

Sonraki teoremin kanıtında, iyi bilinen Schwarz lemmasını kullanılacaktır.

Lemma 4.6 (Schwarz lemması). *[6, sayfa 130] w bir Schwarz fonksiyonu olsun. Yani, $\mathbb{U}$ 'da analitik olan ve $w(0) = 0$ ifadesini gerçekleyen w fonksiyonu aynı zamanda birim diskte $|w(z)| < 1$ eşitsizliğini sağlasın. Buna göre $\mathbb{U}$ birim diski içinde $|w'(0)| \leq 1$ ve $|w(z)| \leq |z|$ eşitsizlikleri geçerlidir. Ayrıca, eğer bir $z \neq 0$ için $|w'(0)| = 1$ veya $|w(z)| = |z|$ ise her $\zeta \in \mathbb{U}$ için $w(\zeta) = c\zeta$ olacak şekilde bir c sabiti vardır öyleki $|c| = 1$ sağlanır.*

Yıldızlı fonksiyonların analitik gösterimi, pozitif reel kısma sahip fonksiyonlar kullanılarak verilebilir. Burada, kısmen Duren [8, sayfa 41] tarafından verilen aşağıdaki ispatı referans alacağız.

Teorem 4.7. *$f(0) = 0$ ve $f'(0) = 1$ normalizasyonlarını sağlayan f fonksiyonu $\mathbb{U}$ birim diskinde analitik olsun. Bu durumda $f \in \mathcal{S}^*$ olması için gerek yeter koşul $zf'(z)/f(z) \in \mathcal{P}$, yani*

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{zf'(z)}{f(z)} \right\} > 0 \quad (z \in \mathbb{U}) \quad (4.1)$$

ifadesinin gerçekleşmesidir.

Kanıt. $f \in \mathcal{S}^*$ olsun. Öncelikle, f fonksiyonunun her $|z| < \rho < 1$ alt diskini bir yıldızlı bölgeye resmettiğini gösterelim. Bunun için $g(z) = f(\rho z)$ fonksiyonunun $\mathbb{U}$ 'da yıldızlı olduğunun ispatlanması gerekir. Yani her $t \in (0, 1)$ sabiti ve her $z \in \mathbb{U}$ için $tg(z)$ noktasının g 'nin değer bölgesinde olduğu gösterilmelidir. $f \in \mathcal{S}^*$ olduğundan $\mathbb{U}$ 'da

analitik ve $|w(z)| \leq |z|$ koşulunu gerçekleyen bir w fonksiyonu için $tf(z) = f(w(z))$ eşitliği sağlanır. Bu durumda, $w_1(z) = w(\rho z)/\rho$ ve $|w_1(z)| \leq |z|$ olmak üzere

$$tg(z) = tf(\rho z) = f(w(\rho z)) = f\left(\rho \frac{w(\rho z)}{\rho}\right) = f(\rho w_1(z)) = g(w_1(z))$$

ifadesi gerçekleşir. Bu, f fonksiyonunun her $|z| = \rho < 1$ çemberini bir yıldızlı domaini sınırlayan C_ρ eğrisi üzerine resmettiğini gösterir. O halde, z pozitif yönde $|z| = \rho$ çemberi etrafında döndüğünde $\arg f(z)$ artandır. Diğer bir deyişle

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \{\arg f(\rho e^{i\theta})\} \geq 0$$

ifadesi gerçekleşir. Dolayısıyla yukarıdaki denklem kullanılarak $\mathcal{S}^*$ sınıfındaki fonksiyon için $\mathcal{P}$ sınıfı kullanılarak analitik bir temsil elde edilebilir. Yani, $z = \rho e^{i\theta}$ için

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta} \{\arg f(\rho e^{i\theta})\} &= \operatorname{Im} \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} \log f(\rho e^{i\theta}) \right\} \\ &= \operatorname{Im} \left\{ \frac{i \rho e^{i\theta} f'(\rho e^{i\theta})}{f(\rho e^{i\theta})} \right\} = \operatorname{Im} \left\{ \frac{iz f'(z)}{f(z)} \right\} = \operatorname{Re} \left\{ \frac{z f'(z)}{f(z)} \right\} \end{aligned}$$

eşitliği gerçekleşir. Dolayısıyla harmonik fonksiyonlar için verilen maksimum prensibi [6, sayfa 253] kullanılarak $zf'(z)/f(z) \in \mathcal{P}$ olduğu sonucu elde edilir.

Tersine, $f(0) = 0$ ve $f'(z) = 1$ normalizasyon koşullarını sağlayan bir analitik fonksiyon f ve $zf'(z)/f(z) \in \mathcal{P}$ olsun. Buna göre f 'nin $\mathbb{U}$ diskinde orijindeki basit sıfırı hariç başka sıfırı yoktur. Yukarıdaki argümanı tersine çevirmek her $\rho < 1$ için

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \{\arg f(\rho e^{i\theta})\} > 0, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

olduğunu gösterir. Bu nedenle, z noktası $|z| = \rho$ çemberi etrafında saat yönünün tersine döndükçe, $f(z)$ noktası artan bir argümanla kapalı bir eğri olan C_ρ üzerinde hareket eder. f 'nin $|z| = \rho$ içinde yalnızca bir sıfırı olduğu için, argüman prensibi [6,

sayfa 123] bize C_ρ 'nın tam olarak bir kez orijini çevrelediğini söyler. Bu nedenle, C_ρ kendisiyle kesişemez ve dolayısıyla C_ρ , yıldızlı bir bölge olan $\mathcal{D}_\rho$ 'yu çevreleyen basit bir kapalı eğridir. $\mathcal{D}_\rho$, C_ρ 'nın iç kısmını temsil eder ve f , $|z| < \rho$ diskinde $\mathcal{D}_\rho$ içindeki her değeri tam olarak bir kez alır. Bu her $\rho < 1$ için geçerli olduğuna göre, f 'nin $\mathbb{U}$ üzerinde yalınkat ve yıldızlı olduğu sonucuna varırız. $\square$

Yukarıdaki sonuçlar gösterir ki, eğer $\mathbb{U}$ 'da analitik bir f fonksiyonu $f(0) = f'(0) - 1 = 0$ koşulunu sağlıyor ve $z \in \mathbb{U}$ için $\operatorname{Re} z f'(z)/f(z) > 0$ ise f fonksiyonu $\mathbb{U}$ 'da yalınkattır. Yani $\mathcal{S}^* \subset \mathcal{S}$ geçerlidir. Bu anlamda, $\mathcal{S}^*$ 'ın $\mathcal{S}$ 'nin doğal bir alt kümesi olduğu söylenebilir.

Örnek 4.8. Her $z \in \mathbb{U}$ için $k(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$ Koebe fonksiyonunun yıldızlı olduğunu gösterelim.

$$k'(z) = \frac{1+z}{(1-z)^3}$$

olduğundan

$$\frac{zk'(z)}{k(z)} = \frac{z(1+z)}{(1-z)^3} \frac{(1-z)^2}{z} = \frac{1+z}{1-z}$$

sağlanır. Bu nedenle

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{zk'(z)}{k(z)} \right\} = \operatorname{Re} \left\{ \frac{1+z}{1-z} \right\} > 0$$

elde edilir.

Benzer bir analitik ifade, konveks fonksiyonlar için de geçerlidir ve kanıtı yine Duren tarafından verilen ispata benzer [8, sayfa 42].

Teorem 4.9. f , $\mathbb{U}$ üzerinde analitik bir fonksiyon, $f(0) = 0$ ve $f'(0) = 1$ olsun. $f \in \mathcal{C}$ için gerek yeter koşul $[1 + zf''(z)/f'(z)] \in \mathcal{P}$ olması, yani

$$\operatorname{Re} \left\{ 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right\} > 0 \quad (z \in \mathbb{U}) \quad (4.2)$$

sağlanmasıdır.

Kanıt. Öncelikle $f \in \mathcal{C}$ olmak üzere $f(z)$ fonksiyonu her $|z| < r < 1$ alt diskini konveks bir bölgeye resmeder. Bunu göstermek için $|z_1| \leq |z_2| < r$ koşulunu sağlayan z_1 ve z_2 noktaları seçilsin ve $w_1 = f(z_1)$ ve $w_2 = f(z_2)$ olsun. Buradan

$$w_0 = tw_1 + (1-t)w_2, \quad 0 < t < 1$$

yazılabilir. f konveks bir tasvir olduğundan $f(z_0) = w_0$ eşitliğini sağlayan tek türlü belirli bir $z_0 \in \mathbb{U}$ noktası vardır. Burada gösterilmesi gereken $|z_0| < r$ olduğudur. Ancak $g(0) = 0$ ve $g(z_2) = w_0$ olmak üzere

$$g(z) = tf(z_1z/z_2) + (1-t)f(z)$$

fonksiyonu $\mathbb{U}$ 'da analitiktir. $f \in \mathcal{C}$ olduğundan

$$h(z) = f^{-1}(g(z))$$

fonksiyonu iyi tanımlıdır. $h(0) = 0$ ve $|h(z)| \leq 1$ için Schwarz lemması gereği $|h(z)| \leq |z|$ sağlanır. Bu durumda

$$|z_0| = |h(z_2)| \leq |z_2| < r$$

olduğu gösterilmiş olur. Bu nedenle, f her $|z| = r < 1$ çemberini konveks bir domaini sınırlayan C_r eğrisi üzerine resmeder. Konveksliğin sonucu olarak C_r üzerindeki teğetin eğimi, eğri pozitif yönde dönerek takip edildiğinde azalmaz. Analitik olarak, bu

olgu

$$\begin{aligned}
0 &\leq \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\arg \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} f(re^{i\theta}) \right\} \right) = \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\arg \{ ire^{i\theta} f'(re^{i\theta}) \} \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial \theta} \operatorname{Im} \{ \log [ire^{i\theta} f'(re^{i\theta})] \} \\
&= \operatorname{Im} \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} \log [ire^{i\theta} f'(re^{i\theta})] \right\} \\
&= \operatorname{Im} \left\{ \frac{ire^{i\theta} [if'(re^{i\theta}) + ire^{i\theta} f''(re^{i\theta})]}{ire^{i\theta} f'(re^{i\theta})} \right\} \quad (z = re^{i\theta})
\end{aligned}$$

şeklinde ifade edilebilir ki bu ise

$$\operatorname{Re} \left\{ 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right\} \geq 0, \quad |z| = r$$

koşuluna indirgenebilir. Dolayısıyla, harmonik fonksiyonlar için maksimum prensibi [6, sayfa 253] gereği $[1 + zf''(z)/f'(z)] \in \mathcal{P}$ olduğunu gösterilmiş olur.

Tersine, $[1 + zf''(z)/f'(z)] \in \mathcal{P}$ ifadesini gerçekleyen f fonksiyonunun yukarıdaki normalizasyon koşullarını da sağladığını var sayalım. Yukarıdaki sonuçlara göre, C_r eğrisine ait teğet doğrusunun eğimi monoton olarak artar. Ancak bir nokta C_r eğrisi üzerinde tam bir dönüş yaptığında teğet vektörünün argümanı

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\arg \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} f(re^{i\theta}) \right\} \right) d\theta &= \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} \left\{ 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right\} d\theta \\
&= \operatorname{Re} \left\{ \int_{|z|=r} \left[1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right] \frac{dz}{iz} \right\} = 2\pi, \quad z = re^{i\theta}
\end{aligned}$$

eşitiğini sağlar. Buradan her C_r 'nin konveks bir domaini sınırlayan basit bir kapalı eğri olduğu sonucu elde edilir. Bu durum herhangi bir $r < 1$ için geçerli olduğundan f 'nin değer bölgesi konveks bir domain olan yalınkat bir fonksiyon olduğu bulunur. $\square$

Örnek 4.10. $w = f(z) = \log(1+z)$ fonksiyonunun her $z \in \mathbb{U}$ için konveks fonksiyon

olduğunu göstermek için aşağıdaki adımların izlenmesi gerekir.

$$f'(z) = \frac{1}{1+z} \Rightarrow \log f'(z) = \log \left(\frac{1}{1+z} \right) = \log 1 - \log(1+z)$$
$$\frac{f''(z)}{f'(z)} = -\frac{1}{1+z} \Rightarrow 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} = 1 - \frac{z}{1+z}$$

yani

$$1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} = \frac{1}{1+z}$$

olur. O halde

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left\{ 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right\} &= \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{1+z} \right\} = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{1+z} \right) + \overline{\left(\frac{1}{1+z} \right)} \right\} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{1+z} + \frac{1}{1+\bar{z}} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1+\bar{z}+1+z}{|1+z|^2} \right\} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{2(1+\operatorname{Re} z)}{|1+z|^2} \right\} \end{aligned}$$

veya

$$\operatorname{Re} \left\{ 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right\} = \frac{1+\operatorname{Re} z}{|1+z|^2}$$

bulunur. Her $z \in \mathbb{C}$ için $-|z| \leq \operatorname{Re} z \leq |z|$ ve $|z| < 1$ olduğundan

$$-1 < \operatorname{Re} z < 1, \quad z \in \mathbb{U}$$

elde edilir. Böylece, $1+\operatorname{Re} z > 0$ bulunur. Öte yandan, her zaman pozitif olan $|1+z|^2$ göz önünde bulundurulduğunda istenilen sonuca ulaşılır. Yani

$$\operatorname{Re} \left\{ 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right\} > 0$$

dir.

Önceki iki teorem konveks ve yıldızlı fonksiyonlar arasındaki 1915 yılında Alexander [1] tarafından verilen analitik bağlantıyı ortaya koyar.

Teorem 4.11 (Alexander Teoremi). $\mathbb{U}$ 'da analitik, $f(0) = 0$ ve $f'(0) = 1$ koşullarını sağlayan bir $f(z)$ fonksiyonu alınsın. O halde $f \in \mathcal{C}$ olması için gerek yeter koşul $zf'(z)$ fonksiyonunun $\mathcal{S}^*$ sınıfında yer almasıdır.

Kanıt. $g(z) = zf'(z)$ ise

$$\frac{zg'(z)}{g(z)} = 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}$$

sağlanır. Bu durumda, eşitliğin sol taraftaki fonksiyon $\mathbb{U}$ 'da analitik ve pozitif reel kısma sahipse sağ taraftaki fonksiyon da pozitif reel kısma sahip ve analiktir ve bunun tersi de geçerlidir. Dolayısıyla, iddianın Teorem 4.7 ve Teorem 4.9'dan doğru olduğu sonucu elde edilir. $\square$

Orijin civarındaki her $f \in \mathcal{S}$ fonksiyonu birim fonksiyonu ile benzeşir. Bu durumda olması beklenen f 'nin $|z| = \rho$ küçük çemberlerini konveks bir bölgeyi sınırlayan eğriler üzerine resmetmesidir. Aşağıdaki teorem, bu kavramı nicel terimlerle ifade eder.

Teorem 4.12 (Konvekslik Yarıçapı). Her $\rho \leq 2 - \sqrt{3}$ pozitif sayısı için $f \in \mathcal{S}$ fonksiyonu $|z| < \rho$ diskini bir konveks domaine resmeder. Bu sonuç eğer $\rho > 2 - \sqrt{3}$ ise yanlıştır.

Kanıt. Lemma 3.1'de verilen (3.6) denklemi dikkate alındığında $|z| = r < 1$ olmak üzere

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right\} \geq \frac{2r^2}{1-r^2} - \frac{4r}{1-r^2}$$

veya

$$\operatorname{Re} \left\{ 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right\} \geq \frac{1-4r+r^2}{1-r^2}$$

sonuçları elde edilir. Ancak $r < 2 - \sqrt{3}$ ise $1-4r+r^2 > 0$ olduğu için f fonksiyonunun $|z| < r$ diskini konveks bir domaine resmettiği sonucu elde edilir. $k(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$ Koebe

fonksiyonu için

$$1 + \frac{zk''(z)}{k'(z)} = \frac{1 + 4z + z^2}{1 - z^2}$$

sağlandığından $2 - \sqrt{3}$ sınırının kesin olduğu sonucuna ulaşılır. $\square$

$2 - \sqrt{3} = 0.267 \dots$ sayısı $\mathcal{S}$ sınıfı için *konvekslik yarıçapı* olarak adlandırılır. *Yıldızlılık yarıçapı* $\tanh(\pi/4) = 0.655 \dots$ olarak bilinir ancak bu sonuç daha sofistike bir ispata sahiptir. Löwner methoduna dayanan bir kanıt [8, sayfa 98] kitabında verilmiştir.

Yıldızlı fonksiyonlar sınıfı $\mathcal{S}^*$ için Bieberbach hipotezi R. Nevanlinna tarafından 1920 yılında kanıtlanmıştır [18].

Teorem 4.13. *Eğer $f \in \mathcal{S}^*$ ise $n = 2, 3, \dots$ için $|a_n| \leq n$ koşulu sağlanır. f Koebe fonksiyonunun bir dönüşümü değil ise kesin eşitsizlik her n için geçerlidir.*

Kanıt. Verilen bir $f \in \mathcal{S}^*$ için

$$p(z) = \frac{zf'(z)}{f(z)} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} p_n z^n$$

şeklinde tanımlanan $p(z)$ fonksiyonu için Teorem 4.7'ye göre $p \in \mathcal{P}$ 'dir ve ayrıca Carathéodory lemması (Lemma 4.5) gereği $|p_n| \leq 2$ sağlanır. Şimdi

$$zf'(z) = p(z)f(z)$$

formunda yazılırsa buradan

$$zf'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n z^n$$

ve

$$p(z)f(z) = \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} p_n z^n\right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n\right)$$

olduğu gözlemlenir. Daha sonra z^n terimlerinin katsayıları karşılaştırılarak $a_1 = 1$ olmak üzere

$$na_n = a_n + \sum_{k=1}^{n-1} p_{n-k}a_k, \quad n = 2, 3, \dots$$

elde edilir. Şimdi $n \geq 2$ için $|a_k| \leq k$, ($k = 1, 2, \dots, n-1$) eşitsizliğinin sağlandığını kabul edelim. O halde

$$(n-1)|a_n| \leq \sum_{k=1}^{n-1} |p_{n-k}| |a_k| \leq \sum_{k=1}^{n-1} 2k = n(n-1) \quad (4.3)$$

ifadesinden $|a_n| \leq n$ elde edilir. Bieberbach teoremine göre eğer f Koebe fonksiyonunun bir dönüşümü değilse $|a_2| < 2$ geçerlidir. Bu durumda (4.3) eşitsizliğinden $f \in \mathcal{S}^*$ ve f , Koebe fonksiyonunun bir dönüşümü değilse her $n \geq 2$ için $|a_n| < n$ sonucu ortaya çıkar. $\square$

Corollary 4.14. *$f \in \mathcal{C}$ ise $n = 2, 3, \dots$ için $|a_n| \leq 1$ katsayı eşitsizliği sağlanır. f fonksiyonu $l(z) = z(1-z)^{-1}$ olarak tanımlanan l Koebe fonksiyonunun bir dönüşümü değilse tüm n değerleri için kesin eşitsizlik geçerlidir.*

Kanıt. Bu sonuç Alexander teoremi (Teorem 4.11) kullanılarak kolayca elde edilebilir. Eğer $f \in \mathcal{C}$ ise $zf'(z) \in \mathcal{S}^*$ olur ve dolayısıyla $n|a_n| \leq n$ şartı $|a_n| \leq 1$ sonucunu verir. Diğer taraftan

$$l(z) = \frac{z}{1-z} = \sum_{n=1}^{\infty} z^n$$

fonksiyonu $zl'(z) = k(z)$ eşitliğini sağlar ve $\mathbb{U}$ birim diskini $\operatorname{Re} w > -\frac{1}{2}$ yarı düzlemine resmeder. Bu sonuç, ilk kez (doğrudan) Löwner tarafından kanıtlanmıştır [16]. $\square$

Koebe fonksiyonu yıldızlı ve $\mathcal{S}$ sınıfı için ekstremal fonksiyon olduğundan büyüme ve distorsiyon teoremleri gibi $\mathcal{S}$ sınıfı için bilinen çeşitli eşitsizlikler, $\mathcal{S}^*$ sınıfında ke-sindir. Bununla birlikte bu sınırlar Koebe fonksiyonunu içermeyen $\mathcal{C}$ sınıfı için gelişt-

rilebilir. Beklenebileceği gibi yukarıdaki l yarıdüzlem tasviri $\mathcal{C}$ için tipik bir ekstremal fonksiyondur. Örneğin, aşağıdaki teorem Koebe 1/4 teoreminin (Teorem 2.12) uyarlamasıdır .

Teorem 4.15. *Her $f \in \mathcal{C}$ fonksiyonunun değer kümesi $|w| < \frac{1}{2}$ diskini içerir.*

Kanıt. Eğer $f \in \mathcal{C}$ ve $f(z) \neq w$ ise $g(z) = [f(z) - w]^2$ fonksiyonunun yalnızkat olduğu geometrik olarak açıktır ve analitik olarak kanıtlanması kolaydır. Gerçekten, $g(z_1) = g(z_2)$ ise

$$g(z_1) - g(z_2) = [f(z_1) - w]^2 - [f(z_2) - w]^2 = [f(z_1) - f(z_2)][f(z_1) + f(z_2) - 2w]$$

olur. Bu da ya $f(z_1) = f(z_2)$ ya da $\frac{1}{2}[f(z_1) + f(z_2)] = w$ olduğu anlamına gelir. İkincisi ifade w değerini ihmal eden bir f konveks fonksiyonu için imkansızdır. Böylece

$$h(z) = \frac{w^2 - g(z)}{2w} \in \mathcal{S}$$

sonucu elde edilir. Ancak $g(z) \neq 0$ olduğundan $h(z) \neq \frac{w}{2}$ sağlanır. Dolayısıyla Koebe 1/4 teoreminden $|\frac{w}{2}| \geq \frac{1}{4}$ veya $|w| \geq \frac{1}{2}$ ifadesine ulaşılır. Bu da teoremi kanıtlar. l fonksiyonu $\frac{1}{2}$ yarıçapının mümkün olan en iyi sonuç olduğunu gösterir. $\square$

Teorem 4.16 ($\mathcal{S}^*$ için Büyüme ve Distorsiyon Teoremleri). *[9, sayfa 117] $f(z) \in \mathcal{S}^*$ olsun. O halde*

$$\frac{|z|}{(1 + |z|)^2} \leq |f(z)| \leq \frac{|z|}{(1 - |z|)^2}$$

ve

$$\frac{1 - |z|}{(1 + |z|)^3} \leq |f'(z)| \leq \frac{1 + |z|}{(1 - |z|)^3}$$

ifadeleri sağlanır. Bu eşitsizlikler kesindir. Eşitliğin sağlanması için gerek yeter koşul $f(z)$ fonksiyonunun Koebe fonksiyonunun bir dönüşümü olmasıdır.

Teorem 4.17 ($\mathcal{C}$ için Büyüme ve Distorsiyon Teoremleri). [9, sayfa 118] $f(z) \in \mathcal{C}$ ise

$$\frac{|z|}{1+|z|} \leq |f(z)| \leq \frac{|z|}{1-|z|}$$

ve

$$\frac{1}{(1+|z|)^2} \leq |f'(z)| \leq \frac{1}{(1-|z|)^2}$$

ifadeleri sağlanır. Ayrıca $f(z)$ fonksiyonu $z/(1-z)$ fonksiyonunun bir dönüşümü ise bu eşitsizlikler için ekstremaldir.

1952’de Kaplan [13] konveks ve yıldızlı fonksiyonları genelleştirmiş ve aşağıda verilen konvekse yakın fonksiyonlar fikrini ortaya atmıştır.

Tanım 4.18 (Konvekse Yakın Fonksiyonlar ve $\mathcal{K}$ Sınıfı). Her $z \in \mathbb{U}$ için

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{f'(z)}{g'(z)} \right\} > 0$$

koşulunu sağlayan bir g konveks fonksiyonu varsa birim disk $\mathbb{U}$ ’da analitik f fonksiyona konvekse yakın adı verilir. $f(0) = 0$ ve $f'(0) = 1$ normalizasyon koşullarını sağlayan f konvekse yakın fonksiyonlarının sınıfı $\mathcal{K}$ ile gösterilir.

Yukarıdaki tanımda f fonksiyonu için yalınkatlık koşulu ve ayrıca ilişkili g fonksiyonu için normalizasyon şartı aranmadığına dikkat etmek gerekir. Bununla beraber konvekse yakın fonksiyonlar için elde edilen neticelerin pek çoğunda g fonksiyonunun normalizasyon koşullarını sağladığı varsayılmaktadır.

Alexander teoreminin bir sonucu olarak Kaplan’ın verdiği tanımın eşdeğer bir ifadesi

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{zf'(z)}{g'(z)} \right\} > 0 \quad (z \in \mathbb{U})$$

eşitsiliğini sağlayan bir $g \in \mathcal{S}^*$ fonksiyonunun olması yazılabilir. Bu tip konvekse yakın

fonksiyonların sınıfını $\mathcal{K}_0$ ile gösterelim.

Uyarı 4.19. *Her konveks fonksiyonun konvekse yakın olduğu açıktır. Bunu göstermek için f fonksiyonunun konveks olduğunu varsayalım. Eğer $g = f$ seçersek*

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{f'(z)}{g'(z)} \right\} = \operatorname{Re} \left\{ \frac{f'(z)}{f'(z)} \right\} = 1 > 0$$

elde edilir. Daha genel bir ifadeyle her yıldızl fonksiyon konvekse yakın fonksiyondur. Gerçekten, herhangi bir $f \in \mathcal{S}^*$ fonksiyonu $g \in \mathcal{C}$ olmak üzere Alexander Teoremi (Teorem 4.11) $f(z) = zg'(z)$ şeklinde yazılabilir ve buradan

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{f'(z)}{g'(z)} \right\} = \operatorname{Re} \left\{ \frac{zf'(z)}{f(z)} \right\} > 0$$

sağlanır.

Yukarıdaki açıklamalar ışığında $\mathcal{C} \subset \mathcal{S}^* \subset \mathcal{K}_0 \subset \mathcal{K}$ içermeye ilişkisinin mevcut olduğu gözlemlenir.

Konvekse yakın her fonksiyon yalınkattır. Bu sonuç Noshiro [19] ve Warschawski'ye [28] ait aşağıdaki yalınkatlık kriterinden çıkarılabilir.

Teorem 4.20 (Noshiro-Warschawski Teoremi). *Eğer f konveks bir $\mathcal{D}$ domaininde analitik ve $z \in \mathcal{D}$ için $\operatorname{Re}\{f'(z)\} > 0$ ise, o zaman f fonksiyonu $\mathcal{D}$ 'de yalınkattır.*

Kanıt. Farz edelim ki z_1 ve z_2 , $\mathcal{D}$ 'de iki farklı nokta olsun. Bu durumda f fonksiyonu z_1 ve z_2 noktalarını birleştiren doğru parçası üzerinde tanımlıdır. Dolayısıyla $0 \leq t \leq 1$ olmak üzere $z = tz_2 + (1-t)z_1$ için $\operatorname{Re}\{f'(z)\} > 0$ ifadesinden

$$\begin{aligned} f(z_2) - f(z_1) &= \int_{z_1}^{z_2} f'(z) dz \\ &= (z_2 - z_1) \int_0^1 f'(tz_2 + (1-t)z_1) dt \neq 0 \end{aligned}$$

sağlanır. Dolayısıyla $f(z_2) \neq f(z_1)$ eşitsizliği geçerlidir ve böylece f fonksiyonunun $\mathcal{D}$ 'de yalınkat olduğu sonucu elde edilir. $\square$

Şimdi, bir sonraki önemli sonucu verelim.

Teorem 4.21. *Konvekse yakın her fonksiyon yalınkattır.*

Kanıt. Eğer f konvekse yakın ise bir g konveks fonksiyonu için $\operatorname{Re} \{f'(z)/g'(z)\} > 0$ sağlanır. g fonksiyonunun değer bölgesi $\mathcal{D}$ olsun ve

$$h(w) = f(g^{-1}(w)), \quad w \in \mathcal{D}$$

fonksiyonu göz önüne alınsın. Buna göre

$$h'(w) = \frac{f'(g^{-1}(w))}{g'(g^{-1}(w))} = \frac{f'(z)}{g'(z)}$$

yani $\operatorname{Re} \{h'(z)\} > 0$ sağlanır. Böylece h fonksiyonu Teorem 4.20 gereği yalınkattır ve dolayısıyla f fonksiyonu da yalınkat olur. $\square$

Konvekse yakın fonksiyonlar da konveks ve yıldızlı fonksiyonlar gibi geometrik olarak karakterize edilebilirler. f fonksiyonu $\mathbb{U}$ 'da analitik ve $0 < |z| = r < 1$ çemberinin f altındaki görüntüsü C_r olsun. Kabaca söylemek gerekirse, f ancak ve ancak C_r eğrilerinden hiçbiri "iki ardışık ve ters yönlü keskin U dönüşü" yapmıyorsa (yani çok dar ve keskin bir S harfi gibi görünmüyorsa) konvekse yakındır. Daha açık bir ifadeyle, θ arttıkça C_r eğrisinin kendi üzerine π 'den daha fazla dönmemesi gerekir. Açıkçası C_r , π 'den daha fazla bir açı ile geri dönseydi kendisiyle kesişebilirdi ve bu da f 'nin yalınkat olmayacağı anlamına gelirdi. Konveks fonksiyonlar söz konusu olduğunda θ arttıkça C_r eğrisinin kendi üzerine dönmediğini akılda tutmak önemlidir. Analitik olarak bu θ arttıkça $\arg(\partial f(re^{i\theta})/\partial \theta)$ teğet yönünün önceki herhangi bir

değerden π kadar azalamadığı anlamına gelir. Bu gerçeği kullanarak $z = re^{i\theta}$ olmak üzere

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\arg \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} f(re^{i\theta}) \right\} \right) = \operatorname{Re} \left\{ 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right\}$$

Kaplan [13], $f \in \mathcal{K}$ için aşağıdaki gerek ve yeter koşulu vermiştir.

Teorem 4.22 (Kaplan Teoremi). [8, sayfa 48] f analitik ve $\mathbb{U}$ içinde yerel yalınkat olmak üzere $f(z)$ fonksiyonunun konvekse yakın olması için gerek yeter şart her $z = re^{i\theta} \in \mathbb{U}$ ($r \in (0, 1)$) ve $\theta_1 < \theta_2$ koşulunu sağlayan θ_1 ve θ_2 reel sayı çifti için

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \operatorname{Re} \left\{ 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right\} d\theta > -\pi$$

olmasıdır.

Bieberbach varsayımı, konvekse yakın fonksiyonların $\mathcal{K}$ sınıfı için de geçerlidir. Bu sonuç Reade tarafından verilmiştir [22].

Teorem 4.23.

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \quad (|z| < 1)$$

formunda verilen $f \in \mathcal{K}$ fonksiyonu göz önüne alınsın. Buna göre $n \geq 2$ için $|a_n| \leq n$ sağlanır ve eşitlik Koebe fonksiyonu $k(z) = z/(1-z)^2$ için geçerlidir.

Yalınkat fonksiyonların başka birçok alt sınıfı olmasına rağmen bu üç sınıf en temel olanlarıdır. Daha önce de belirttiğimiz gibi tüm bu sınıflar Bieberbach varsayımını kanıtlamak için geliştirilmiş ve teoremin ilerlemesine büyük katkılar sağlamıştır.

Yalınkat fonksiyonlar teorisi üzerine Hayman [12], Duren [8] ve Pommerenke [20] tarafından yazılan kitaplar başta olmak üzere birçok yararlı kaynak bulunmaktadır. Bunlardan bir diğeri Goodman'ın yazdığı kitaplar [9, 10] olup yalınkat fonksiyonların çok çeşitli alt sınıfları için bugüne kadar bilinen sonuçlarının bir özeti özelliği taşı-

maktadırlar. Goodman çok sayıda alt sınıfı ele almış ve önemli sonuçların birçoğuna kitaplarında yer vermiştir. Doğal olarak 1983 yılında yayınlanmasından bu yana çok daha fazla sonuç ortaya koyulmuştur. Nispeten yakın zamanda yazıldığı için en son gelişmeleri içeren bir kaynak olarak Thomas, Tuneski ve Vasudevarao'nun kitabı [26] tavsiye edilebilir.



Bölüm 5

Bazilevič Fonksiyonları

Bazilevič 1955 yılında konvekse yakın fonksiyonlara önemli bir genişletme yapmış ve $\mathcal{S}$ kümesinin daha genel bir alt sınıfını tanımlamıştır [3]. Bu gelişme, sonrasında bu alana yönelik yoğun bir ilgiye neden olmuştur. Bazilevič fonksiyonlarının tanımında kullanmak üzere $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ koşullarıyla normalize edilmiş $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ birim diskinde analitik ve

$$f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k$$

formunda olan fonksiyonlardan oluşan sınıf $\mathcal{A}$ ile gösterilsin.

Tanım 5.1. $\alpha \geq 0$, β reel sabitler, $p \in \mathcal{P}$ ve $g \in \mathcal{S}^*$ olmak üzere

$$f(z) = \left\{ (\alpha + i\beta) \int_0^z [g(t)]^\alpha p(t) t^{i\beta-1} dt \right\}^{1/(\alpha+i\beta)} \quad (z \in \mathbb{U}) \quad (5.1)$$

formundaki bir $f(z) \in \mathcal{A}$ fonksiyonu (α, β) tipinde Bazilevič fonksiyonu olarak adlandırılır ve bu tip fonksiyonların sınıfı $\mathcal{B}(\alpha, \beta)$ ile gösterilir.

(5.1) denkleminde $\beta = 0$ seçildiğinde $\alpha > 0$, $p \in \mathcal{P}$ ve $g \in \mathcal{S}^*$ olmak üzere

$$f(z) = \left\{ \alpha \int_0^z \frac{p(t)[g(t)]^\alpha}{t} dt \right\}^{\frac{1}{\alpha}} \quad (z \in \mathbb{U}) \quad (5.2)$$

formundaki bir $f(z) \in \mathcal{A}$ fonksiyonu α tipinde Bazilevič fonksiyonu olarak adlandırılır ve bu tip fonksiyonların sınıfı $\mathcal{B}(\alpha)$ ile ifade edilir. (5.2) denkleminde verilen $f(z)$ fonksiyonunun türevi

$$zf'(z) = [f(z)]^{1-\alpha} [g(z)]^\alpha p(z)$$

olmak üzere $p(z)$ fonksiyonu

$$p(z) = \frac{z[f(z)]^{\alpha-1} f'(z)}{[g(z)]^\alpha}$$

olarak bulunur.

Tanım 5.2. $f \in \mathcal{A}$, $g \in \mathcal{S}^*$ ve $\alpha \geq 0$ olmak üzere $f \in \mathcal{B}(\alpha)$ olması için gerek yeter şart

$$\operatorname{Re} p(z) = \operatorname{Re} \left[\frac{zf'(z)}{[f(z)]^{1-\alpha} [g(z)]^\alpha} \right] > 0 \quad (z \in \mathbb{U}) \quad (5.3)$$

ifadesinin gerçekleşmesidir.

Burada açıkça $\mathcal{B}(1) = \mathcal{K}_0$ ve $\mathcal{B}(0) = \mathcal{S}^*$ ilişkisi mevcuttur. Bazilevič, (5.1) ve (5.3) ile tanımlanan fonksiyonların yalınkat ve böylece $\mathcal{S}$ sınıfının başka bir alt sınıfını oluşturduklarını göstermiştir [3].

$\alpha = 1$ için (5.3) eşitsizliği

$$\operatorname{Re} p(z) = \operatorname{Re} \left(\frac{zf'(z)}{g(z)} \right) > 0 \quad (z \in \mathbb{U}) \quad (5.4)$$

haline gelir. Bu durumda (5.4) eşitsizliğini sağladığından $f(z)$ fonksiyonları $\mathbb{U}$ birim diskinde konvekse yakın fonksiyonlardır.

(5.3) ile tanımlanan Bazilevič fonksiyonları için çok sayıda önemli sonuç elde edilmiş olup bu neticelerin pek çoğu [26] numaralı kaynakta mevcuttur. $\mathcal{B}(\alpha)$ sınıfına ait fonksiyonların görüntü bölgelerinin geometrik yorumunu yapmak kolay değildir ve bu konunun ayrıntıları bu tezin kapsamı dışında bırakılmıştır.

Bu tez çalışmasının orijinal kısmı olarak öncelikle Bazilevič fonksiyonlarının bir alt sınıfı olan $\mathcal{A}(\alpha, \beta, \gamma)$ sınıfı tanımlanmış ve bu sınıfa ait bazı özellikler ortaya konulmuştur. Daha sonra $\gamma \rightarrow \infty$ alınarak $\mathcal{A}(\alpha, \beta, \infty)$ sınıfı tanımlanmış ve bu fonksiyon sınıfındaki fonksiyonlar için katsayı eşitsizlikleri elde edilmiştir. Çalışmanın devamında p -valent Bazilevič fonksiyonlarına değinilmiş ve bu fonksiyonlar için $\mathcal{A}_p(\alpha, \beta, \gamma)$ sınıfı tanımlanmış, bu sınıfa ait fonksiyonların sağladığı bazı özellikler üzerinde durulmuş ve son olarak bu fonksiyon sınıfındaki fonksiyonlar için katsayı eşitsizlikleri sunulmuştur. Elde edilen tüm bu neticeler uluslararası dergilerde yayınlanmış olup ilgili makaleler referansta gösterilmektedir [30], [29].

Şimdi $\mathcal{A}(\alpha, \beta, \gamma)$ ve $\mathcal{A}_p(\alpha, \beta, \gamma)$ sınıflarına ait neticeleri elde ederken kullanılan Miller ve Mocanu'ya [17] (ve Sakaguchi [23]) ait aşağıdaki yardımcı teoremi verelim.

Lemma 5.3. *$M(z)$ ve $N(z)$ fonksiyonları $\mathbb{U}$ birim diskinde analitik, β bir reel sayı ve $M(0) = N(0) = 0$ olsun. $N(z)$ fonksiyonu $\mathbb{U}$ birim diskini orijine göre yıldızlı bir bölgeye resmediyorsa*

$$\operatorname{Re} \left(\frac{M'(z)}{N'(z)} \right) > \beta \quad (z \in \mathbb{U})$$

eşitsizliği

$$\operatorname{Re} \left(\frac{M(z)}{N(z)} \right) > \beta \quad (z \in \mathbb{U})$$

ifadesini gerektirir.

Yukarıdaki lemma kullanılarak aşağıdaki netice elde edilir [29].

Lemma 5.4. *$M(z)$ ve $N(z)$ fonksiyonları $\mathbb{U}$ birim diskinde analitik, $M(0) = N(0) =$*

0 ve γ bir reel sayı olsun. Eğer $N(z)$ fonksiyonu, $\mathbb{U}$ birim diskini orijine göre yıldızl bir bölgeye resmediyorsa

$$\operatorname{Re} \left(\frac{M'(z)}{N'(z)} \right) < \gamma \quad (z \in \mathbb{U}) \quad (5.5)$$

eşitsizliği

$$\operatorname{Re} \left(\frac{M(z)}{N(z)} \right) < \gamma \quad (z \in \mathbb{U})$$

ifadesini gerektirir.

Kanıt.

$$p(z) = \gamma - \frac{M(z)}{N(z)} \quad (z \in \mathbb{U}) \quad (5.6)$$

olarak tanımlanan $p(z)$ fonksiyonu $\mathbb{U}$ birim diskinde analitiktir ve (5.5) eşitsizliği kullanılarak

$$\operatorname{Re} p(0) = \operatorname{Re} \left(\gamma - \frac{M(0)}{N(0)} \right) = \operatorname{Re} \left(\gamma - \frac{M'(0)}{N'(0)} \right) > 0$$

bulunur. Buradan (5.6) eşitliği kullanılarak

$$\operatorname{Re} \left(p(z) + \frac{N(z)}{zN'(z)} zp'(z) \right) = \operatorname{Re} \left(\gamma - \frac{M'(z)}{N'(z)} \right) > 0 \quad (z \in \mathbb{U})$$

elde edilir ve Lemma 5.3 uygulandığında

$$\operatorname{Re} p(z) = \operatorname{Re} \left(\gamma - \frac{M(z)}{N(z)} \right) > 0 \quad (z \in \mathbb{U})$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanır. $\square$

Lemma 5.3 ve Lemma 5.4 bir arada düşünüldüğünde aşağıdaki lemma elde edilir [29].

Lemma 5.5. $M(z)$ ve $N(z)$ fonksiyonları $\mathbb{U}$ birim diskinde analitik, β ($0 \leq \beta < 1$),

γ ($\gamma > 1$) reel sayılar ve $M(0) = N(0) = 0$ olsun. Eğer $N(z)$ fonksiyonu $\mathbb{U}$ birim diskini orijine göre yıldızlı bir bölgeye resmediyorsa

$$\beta < \operatorname{Re} \left(\frac{M'(z)}{N'(z)} \right) < \gamma \quad (z \in \mathbb{U})$$

eşitsizliği

$$\beta < \operatorname{Re} \left(\frac{M(z)}{N(z)} \right) < \gamma \quad (z \in \mathbb{U})$$

ifadesini gerektirir.

$\mathcal{A}(\alpha, \beta, \gamma)$ ve $\mathcal{A}_p(\alpha, \beta, \gamma)$ sınıflarına ait katsayı eşitsizliklerini elde etmek için aşağıdaki sonuç kullanılır.

Lemma 5.6. [5], [8] $\mathbb{U}$ birim diskinde analitik $\varphi(z)$ fonksiyonu

$$\varphi(z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k \quad (5.7)$$

formunda tanımlasın. Eğer $\operatorname{Re} \varphi(z) > 0$ ($z \in \mathbb{U}$) ise

$$|c_k| \leq 2 \quad (k = 1, 2, 3, \dots) \quad (5.8)$$

sağlanır. Burada

$$\varphi(z) = \frac{1+z}{1-z} = 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} z^k \quad (5.9)$$

olarak tanımlanan $\varphi(z)$ fonksiyonu (5.8) eşitsizliği için ekstremaldır.

5.1 $\mathcal{A}(\alpha, \beta, \gamma)$ Sınıfı ve Özellikleri

(5.3) ifadesinde $g(z) = z$ alınırsa

$$\operatorname{Re} p(z) = \operatorname{Re} \left(\frac{[f(z)]^{\alpha-1} f'(z)}{z^{\alpha-1}} \right) > 0 \quad (z \in \mathbb{U}) \quad (5.10)$$

olarak yazılır. Bu kısımda α ($\alpha \geq 0$), β ($0 \leq \beta < 1$) ve γ ($\gamma > 1$) reel sayılar olmak üzere

$$\beta < \operatorname{Re} \left(\frac{[f(z)]^{\alpha-1} f'(z)}{z^{\alpha-1}} \right) < \gamma \quad (z \in \mathbb{U}) \quad (5.11)$$

eşitsizliğini sağlayan $f(z) \in \mathcal{A}$ fonksiyonları ve bu fonksiyonların ait olduğu $\mathcal{A}(\alpha, \beta, \gamma)$ sınıfı tanımlanmış ve incelenmiştir. (5.11) eşitsizliğinde $\gamma \rightarrow \infty$ için $f(z) \in \mathcal{A}(\alpha, \beta, \infty)$ fonksiyonları

$$\operatorname{Re} \left(\frac{[f(z)]^{\alpha-1} f'(z)}{z^{\alpha-1}} \right) > \beta \quad (z \in \mathbb{U})$$

ifadesini sağlar.

Singh [24] tarafından (5.10) denklemi ile tanımlanan $\mathcal{A}(\alpha, 0, \infty)$ sınıfı üzerine yapılan çalışmaların [2], [24] bir genelleştirilmesi olarak bu tezde $\mathcal{A}(\alpha, \beta, \gamma)$ sınıfına ait elde edilen ilk netice aşağıdaki gibidir.

Teorem 5.7. [29] $f(z) \in \mathcal{A}(\alpha, \beta, \gamma)$ ise

$$\beta < \operatorname{Re} \left(\frac{f(z)}{z} \right)^\alpha < \gamma \quad (z \in \mathbb{U})$$

eşitsizliği sağlanır.

Kanıt. Lemma 5.5'de yer alan fonksiyonlar $M(z) = [f(z)]^\alpha$ ve $N(z) = z^\alpha$ olsun. Buna göre $N(z)$ fonksiyonu $\mathbb{U}$ birim diskinde orijine göre yıldızıldır ve bu fonksiyonların

türevleri

$$M'(z) = \alpha[f(z)]^{\alpha-1}f'(z) \quad \text{ve} \quad N'(z) = \alpha z^{\alpha-1}$$

olarak hesaplanır. Türevlere ait elde edilen neticeler kullanılarak

$$\frac{M'(z)}{N'(z)} = \frac{[f(z)]^{\alpha-1}f'(z)}{z^{\alpha-1}} \quad (z \in \mathbb{U})$$

eşitliğine ulaşılır. Bu durumda $f(z) \in \mathcal{A}(\alpha, \beta, \gamma)$ için

$$\beta < \operatorname{Re} \left(\frac{M'(z)}{N'(z)} \right) < \gamma \quad (z \in \mathbb{U})$$

ifadesi sağlanır ve Lemma 5.5 uygulanarak

$$\beta < \operatorname{Re} \left(\frac{M(z)}{N(z)} \right) < \operatorname{Re} \left(\frac{f(z)}{z} \right)^\alpha < \gamma \quad (z \in \mathbb{U})$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanır. □

Teorem 5.8. [29] $f(z) \in \mathcal{A}(\alpha, \beta, \gamma)$ olmak üzere

$$[F(z)]^\alpha = \frac{\alpha+1}{z} \int_0^z [f(t)]^\alpha dt \quad (z \in \mathbb{U})$$

şeklinde tanımlanan $F(z)$ fonksiyonu $\mathcal{A}(\alpha, \beta, \gamma)$ sınıfına aittir.

Kanıt. $f(z) \in \mathcal{A}(\alpha, \beta, \gamma)$ olmak üzere $F(z)$ fonksiyonu

$$\frac{zF'(z)}{F(z)} = \left(\frac{1}{\alpha} \right) \frac{zf(z)^\alpha - \int_0^z [f(t)]^\alpha dt}{\int_0^z [f(t)]^\alpha dt}$$

eşitliğini sağlar. Bu eşitlik düzenlendiğinde

$$\alpha \frac{[F(z)]^{\alpha-1}F'(z)}{z^{\alpha-1}} = (\alpha+1) \frac{z[f(z)]^\alpha - \int_0^z [f(t)]^\alpha dt}{z^{\alpha+1}}$$

elde edilir. Şimdi $M(z)$ ve $N(z)$ fonksiyonları

$$M(z) = (\alpha + 1) \left(z[f(z)]^\alpha - \int_0^z [f(t)]^\alpha dt \right) \quad \text{ve} \quad N(z) = \alpha z^{\alpha+1}$$

olarak tanımlansın. Buradan fonksiyonların türevleri hesaplandığında

$$M'(z) = \alpha(\alpha + 1)z[f(z)]^{\alpha-1}f'(z)$$

ve

$$N'(z) = \alpha(\alpha + 1)z^\alpha$$

elde edilir. $N(z)$ fonksiyonu $\mathbb{U}$ birim diskinde yıldızlır ve $f(z) \in \mathcal{A}(\alpha, \beta, \gamma)$ için

$$\operatorname{Re} \left(\frac{M'(z)}{N'(z)} \right) = \operatorname{Re} \left(\frac{[f(z)]^{\alpha-1}f'(z)}{z^{\alpha-1}} \right)$$

olduğundan

$$\beta < \operatorname{Re} \left(\frac{M'(z)}{N'(z)} \right) < \gamma \quad (z \in \mathbb{U})$$

eşitsizliği sağlanır. $M(z)$ ve $N(z)$ fonksiyonları için Lemma 5.5 uygulanırsa

$$\begin{aligned} \beta < \operatorname{Re} \left(\frac{M(z)}{N(z)} \right) &= \frac{\alpha + 1}{\alpha} \operatorname{Re} \left(\frac{z[f(z)]^\alpha - \int_0^z [f(t)]^\alpha dt}{z^{\alpha+1}} \right) \\ &= \operatorname{Re} \left(\frac{[F(z)]^{\alpha-1}F'(z)}{z^{\alpha-1}} \right) < \gamma \quad (z \in \mathbb{U}) \end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. □

Teorem 5.9. *[29] $f(z) \in \mathcal{A}(\alpha, \beta, \gamma)$ ve $\delta \geq 0$ için*

$$[G(z)]^{\alpha+\delta} = z^\delta [f(z)]^\alpha \tag{5.12}$$

olarak tanımlanan $G(z)$ fonksiyonu $\mathcal{A}(\alpha, \beta, \gamma)$ sınıfına aittir.

Kanıt. (5.12) denkleminin her iki yanının türevi alındığında

$$(\alpha + \delta) \frac{G'(z)}{G(z)} = \delta \frac{1}{z} + \alpha \frac{f'(z)}{f(z)}$$

ve

$$(\alpha + \delta) \frac{[G(z)]^{\alpha+\delta-1} G'(z)}{z^{\alpha+\delta-1}} = \frac{z^\delta [f(z)]^\alpha}{z^{\alpha+\delta-1}} \left(\delta \frac{1}{z} + \alpha \frac{f'(z)}{f(z)} \right) = \delta \left(\frac{f(z)}{z} \right)^\alpha + \alpha \frac{[f(z)]^{\alpha-1} f'(z)}{z^{\alpha-1}}$$

eşitlikleri elde edilir. Bu durumda Lemma 5.5 kullanıldığında

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left(\frac{[G(z)]^{\alpha+\delta-1} G'(z)}{z^{\alpha+\delta-1}} \right) &= \frac{1}{\alpha + \delta} \left\{ \delta \operatorname{Re} \left(\frac{f(z)}{z} \right)^\alpha + \alpha \operatorname{Re} \left(\frac{[f(z)]^{\alpha-1} f'(z)}{z^{\alpha-1}} \right) \right\} \\ &> \frac{1}{\alpha + \delta} (\delta\beta + \alpha\beta) = \beta \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left(\frac{[G(z)]^{\alpha+\delta-1} G'(z)}{z^{\alpha+\delta-1}} \right) &= \frac{1}{\alpha + \delta} \left\{ \delta \operatorname{Re} \left(\frac{f(z)}{z} \right)^\alpha + \alpha \operatorname{Re} \left(\frac{[f(z)]^{\alpha-1} f'(z)}{z^{\alpha-1}} \right) \right\} \\ &< \frac{1}{\alpha + \delta} (\delta\gamma + \alpha\gamma) = \gamma \end{aligned}$$

sağlanır böylece ispat tamamlanır. □

5.2 $\mathcal{A}(\alpha, \beta, \infty)$ Sınıfı için Katsayı Eşitsizlikleri

Bu kısımda $\mathcal{A}(\alpha, \beta, \gamma)$ sınıfı $\gamma \rightarrow \infty$ olacak şekilde ele alınır ve $f(z)$ fonksiyonlarının $\mathcal{A}(\alpha, \beta, \infty)$ sınıfındaki katsayı eşitsizlikleri incelenmektedir.

Teorem 5.10. [29] $f(z) \in \mathcal{A}(\alpha, \beta, \infty)$ ise $0 \leq \alpha \leq 1$ için

$$|a_2| \leq \frac{2(1-\beta)}{\alpha+1}, \quad (5.13)$$

$$|a_3| \leq \frac{2(1-\beta)((\alpha+1)^2 + (1-\alpha)(\alpha+2)(1-\beta))}{(\alpha+1)^2(\alpha+2)} \quad (5.14)$$

ve $\alpha \geq 1$ için

$$|a_3| \leq \frac{2(1-\beta)}{\alpha+2} \quad (5.15)$$

elde edilir.

$$\frac{[f(z)]^{\alpha-1} f'(z)}{z^{\alpha-1}} = \frac{1 + (1-2\beta)z}{1-z} \quad (5.16)$$

eşitliğini sağlayan $f(z)$ fonksiyonu için (5.13) eşitsizliği kesindir. Diğer taraftan

$$\frac{[f(z)]^{\alpha-1} f'(z)}{z^{\alpha-1}} = \frac{1 + (1-2\beta)z^2}{1-z^2} \quad (5.17)$$

ifadesini gerçekleyen $f(z)$ fonksiyonu (5.14) ve (5.15) eşitsizlikleri için ekstremaldir.

Kanıt. $f(z) \in \mathcal{A}(\alpha, \beta, \infty)$ için

$$g(z) = \frac{1}{1-\beta} \left(\frac{[f(z)]^{\alpha-1} f'(z)}{z^{\alpha-1}} - \beta \right) \quad (5.18)$$

şeklinde tanımlanan $g(z)$ fonksiyonu $g(0) = 1$ ve $\operatorname{Re} g(z) > 0$ ($z \in \mathbb{U}$) olmak üzere $\mathbb{U}$ birim diskinde analitiktir. Ayrıca

$$g(z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k \quad (5.19)$$

için

$$|c_k| \leq 2 \quad (k = 1, 2, 3, \dots) \quad (5.20)$$

sağlanır. Diğer taraftan

$$g(z) = \frac{1+z}{1-z}$$

olarak tanımlanan $g(z)$ fonksiyonu için (5.20) eşitsizliği kesindir. (5.18) eşitliğinin her

iki yanı karşılaştırılırsa

$$c_1 = \frac{\alpha + 1}{1 - \beta} a_2$$

ve

$$c_2 = \frac{\alpha + 2}{1 - \beta} \left(a_3 + \frac{\alpha - 1}{2} a_2^2 \right) \quad (5.21)$$

bulunur. Burada (5.20) ifadesi kullanılarak

$$|c_1| = \left| \frac{\alpha + 1}{1 - \beta} a_2 \right| \leq 2$$

elde edilir ki bu denklem (5.13) ile aynıdır. Şimdi (5.16) ile tanımlanan $f(z)$ fonksiyonu göz önüne alınırsa

$$g(z) = \frac{1}{1 - \beta} \left(\frac{1 + (1 - 2\beta)z}{1 - z} - \beta \right) = \frac{1 + z}{1 - z},$$

yani $c_k = 2$ ($k = 1, 2, 3, \dots$) neticesine ulaşılır. Böylece

$$a_2 = \frac{2(1 - \beta)}{\alpha + 1}$$

katsayısı elde edilir. (5.16) eşitsizliğini sağlayan $f(z)$ fonksiyonu (5.13) eşitsizliğinin ekstremal fonksiyondur. Yani kesin eşitlik bu $f(z)$ fonksiyonu için elde edilir. Denklem (5.21) kullanılarak

$$|a_3| = \left| \frac{1 - \beta}{\alpha + 2} c_2 - \frac{\alpha - 1}{2} a_2^2 \right|$$

olduğu görülür. Diğer taraftan $0 \leq \alpha \leq 1$ için

$$|a_3| \leq \frac{1 - \beta}{\alpha + 2} |c_2| + \frac{1 - \alpha}{2} |a_2|^2 \leq \frac{2(1 - \beta)}{\alpha + 2} \left(1 + \frac{2(1 - \beta)(1 - \alpha)(\alpha + 2)}{(\alpha + 1)^2} \right)$$

elde edilir ve bulunan bu ifade (5.14) eşitsizliği ile eşdeğerdir. Eğer $\alpha \geq 1$ ise

$$|a_3| \leq \frac{2(1-\beta)}{\alpha+2}$$

olur. Ayrıca (5.17) denkleminde verilen $f(z)$ fonksiyonu (5.14) ve (5.15) eşitsizlikleri için ekstremaldir. $\square$

Teorem 5.10'da $\beta = 0$ alındığında aşağıdaki sonuç elde edilir.

Corollary 5.11. [29] $f(z) \in \mathcal{A}(\alpha, 0, \infty)$ ise $0 \leq \alpha \leq 1$ için

$$|a_2| \leq \frac{2}{\alpha+1}, \quad (5.22)$$

$$|a_3| \leq \frac{2(\alpha+3)}{(\alpha+1)^2(\alpha+2)} \quad (5.23)$$

ve $\alpha \geq 1$ için

$$|a_3| \leq \frac{2}{\alpha+2} \quad (5.24)$$

eşitsizlikleri sağlanır. Ayrıca

$$\frac{[f(z)]^{\alpha-1} f'(z)}{z^{\alpha-1}} = \frac{1+z}{1-z}$$

ifadesini sağlayan $f(z)$ fonksiyonu için (5.22) eşitsizliği kesindir. Diğer taraftan

$$\frac{[f(z)]^{\alpha-1} f'(z)}{z^{\alpha-1}} = \frac{1+z^2}{1-z^2}$$

eşitliğini gerçekleyen $f(z)$ fonksiyonu (5.23) ve (5.24) denklemlerinin ekstremal fonksiyonudur.

$|a_4|$ için Singh [24] tarafından kullanılan yöntem uygulanarak aşağıdaki sonuç elde edilir.

Teorem 5.12. [29] $f(z) \in \mathcal{A}(\alpha, \beta, \infty)$ ise $0 \leq \alpha \leq 1$ için

$$|a_4| \leq \frac{1-\beta}{3+\alpha} \left\{ 2 + \frac{4(1-\alpha)(3+\alpha)(1-\beta)}{(1+\alpha)(3+\alpha)} + \frac{4(1-\alpha)(3+\alpha)(\alpha-2)(1-\beta)^2}{3(1+\alpha)^3} \right\} \quad (5.25)$$

ve $\alpha \geq 1$ için

$$|a_4| \leq \frac{2(1-\beta)}{3+\alpha} \quad (5.26)$$

eşitsizlikleri gerçekleşir. Burada

$$\frac{[f(z)]^{\alpha-1} f'(z)}{z^{\alpha-1}} = \frac{1 + (1-2\beta)z^3}{1-z^3} \quad (5.27)$$

ifadesini sağlayan $f(z)$ fonksiyonu (5.25) ve (5.26) denklemlerinin ekstremal fonksiyonudur.

Kanıt. $f(z) \in \mathcal{A}(\alpha, \beta, \infty)$ olmak üzere

$$g(z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k$$

olarak tanımlanan $g(z)$ fonksiyonu kullanılarak

$$\begin{aligned} (3+\alpha)a_4 &= \left\{ (1-\beta)c_3 + (1-\alpha)(3+\alpha)a_2a_3 + \frac{(1-\alpha)(2-\alpha)(3+\alpha)}{6}a_2^3 \right\} \\ &= (1-\beta) \left\{ c_3 + \frac{(1-\alpha)(3+\alpha)(1-\beta)}{(1+\alpha)(2+\alpha)}c_1c_2 + \frac{(1-\alpha)(3+\alpha)(\alpha-2)(1-\beta)^2}{6(1+\alpha)^3}c_1^3 \right\} \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Burada Singh [24] tarafından kullanılan yöntem uygulanarak $0 \leq \alpha \leq 1$ için

$$|a_4| \leq \frac{1-\beta}{3+\alpha} \left\{ 2 + \frac{4(1-\alpha)(3+\alpha)(1-\beta)}{(1+\alpha)(2+\alpha)} + \frac{4(1-\alpha)(3+\alpha)(\alpha-2)(1-\beta)^2}{3(1+\alpha)^3} \right\}$$

sağlanır. Diğer taraftan $\alpha \geq 1$ ise

$$|a_4| \leq \frac{2(1-\beta)}{3+\alpha}$$

olur. Son olarak (5.27) ifadesini sağlayan $f(z)$ fonksiyonu yukarıda verilen katsayı eşitsizlikleri için ekstremaldir. $\square$

Corollary 5.13. [29] $f(z) \in \mathcal{A}(\alpha, 0, \infty)$ ise $0 \leq \alpha \leq 1$ için

$$|a_4| \leq \frac{2}{3+\alpha} + \frac{4(1-\alpha)(5+3\alpha+\alpha^2)}{3(2+\alpha)(1+\alpha)^3}$$

ve $\alpha \geq 1$ için

$$|a_4| \leq \frac{2}{3+\alpha}$$

eşitsizlikleri sağlanır. Burada

$$\frac{[f(z)]^{\alpha-1} f'(z)}{z^{\alpha-1}} = \frac{1+z^3}{1-z^3}$$

denklemini gerçekleyen $f(z)$ fonksiyonu yukarıdaki katsayı eşitsizliklerinin ekstremal fonksiyonudur.

5.3 p -valent Bazilevič Fonksiyonları

$f(z)$ fonksiyonu $\mathbb{U}$ birim diskinde tanımlı ve analitik olsun. Eğer her $w \in f(\mathbb{U})$ için $f(z) = w$ fonksiyonunun en fazla p tane çözümü varsa $f(z)$ fonksiyonu p -valent fonksiyon olarak adlandırılır. Ayrıca $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ birim diskinde analitik ve

$$f(z) = z^p + \sum_{k=p+1}^{\infty} a_k z^k \quad (p \in \mathbb{N} = 1, 2, 3, \dots) \quad (5.28)$$

formunda ifade edilen p -valent fonksiyonlardan oluşan sınıf $\mathcal{A}_p$ ile gösterilsin.

Burada

$$\operatorname{Re} \left(\frac{zg'(z)}{g(z)} \right) > 0 \quad (z \in \mathbb{U}) \quad (5.29)$$

koşulunu sağlayan $g(z) \in \mathcal{A}_p$ fonksiyonları $\mathbb{U}$ birim diskinde *orijine göre yıldızlı p -valent fonksiyonlar* olarak adlandırılır. Diğer taraftan $p(z)$ fonksiyonu $\mathbb{U}$ birim diskinde analitik, $p(0) = 1$ ve $\operatorname{Re} p(z) > 0$ koşullarını sağlasın. Bu durumda $\alpha > 0$ reel sayı olmak üzere

$$f(z) = \left\{ p\alpha \int_0^z \frac{p(t)[g(t)]^\alpha}{t} dt \right\}^{\frac{1}{\alpha}} \quad (z \in \mathbb{U}) \quad (5.30)$$

formunda ifade edilen $f(z)$ fonksiyonuna $\mathbb{U}$ birim diskinde α tipinde *p -valent Bazilevič fonksiyonu* denir [3], [24]. (5.30) denkleminde verilen $f(z)$ fonksiyonunun türevi

$$zf'(z) = p[f(z)]^{1-\alpha}[g(z)]^\alpha p(z) \quad (5.31)$$

olarak hesaplanır. Buradan

$$\operatorname{Re} p(z) = \frac{1}{p} \operatorname{Re} \left(\frac{z[f(z)]^{\alpha-1} f'(z)}{[g(z)]^\alpha} \right) > 0 \quad (z \in \mathbb{U}) \quad (5.32)$$

bulunur. (5.32) ifadesinde $\alpha = 1$ alındığında

$$\frac{1}{p} \operatorname{Re} \left(\frac{zf'(z)}{g(z)} \right) > 0 \quad (z \in \mathbb{U}) \quad (5.33)$$

eşitsizliği sağlanır ve bu formdaki $f(z)$ fonksiyonuna $\mathbb{U}$ birim diskinde *konvekse yakın p -valent* fonksiyon adı verilir. Ayrıca (5.32) eşitsizliğinde $g(z) = z^p$ ise

$$\frac{1}{p} \operatorname{Re} \left(\frac{[f(z)]^{\alpha-1} f'(z)}{z^{p\alpha-1}} \right) > 0 \quad (z \in \mathbb{U}) \quad (5.34)$$

ifadesi gerçekleşir. Bu durumda $\alpha \geq 0$, β ($0 \leq \beta < p$) ve $\gamma > p$ reel sayılar olmak

üzere

$$\beta < \operatorname{Re} \left(\frac{[f(z)]^{\alpha-1} f'(z)}{z^{p\alpha-1}} \right) < \gamma \quad (z \in \mathbb{U}) \quad (5.35)$$

eşitsizliğini sağlayan $f(z) \in \mathcal{A}_p$ fonksiyonu $\mathcal{A}_p(\alpha, \beta, \gamma)$ sınıfında yer alır. Ayrıca (5.35) eşitsizliğinde $\gamma \rightarrow \infty$ alınırsa $f(z) \in \mathcal{A}_p(\alpha, \beta, \infty)$ fonksiyonu

$$\operatorname{Re} \left(\frac{[f(z)]^{\alpha-1} f'(z)}{z^{p\alpha-1}} \right) > \beta \quad (z \in \mathbb{U}) \quad (5.36)$$

koşulunu sağlar.

Bu çalışmada (5.35) eşitsizliğini sağlayan tüm $f(z) \in \mathcal{A}_p$ fonksiyonlarından oluşan $\mathcal{A}_p(\alpha, \beta, \gamma)$ sınıfının özel halleri daha önce literatürde çeşitli yazarlar tarafından incelenmiştir. (5.35) ifadesinde $p = 1$ alındığında Kısım 5.2 'de tanımlanan $\mathcal{A}_1(\alpha, \beta, \gamma) = \mathcal{A}(\alpha, \beta, \gamma)$ sınıfı elde edilir. Aynı kısımda, $\gamma \rightarrow \infty$ durumuna karşılık gelen $\mathcal{A}_1(\alpha, \beta, \infty) = \mathcal{A}(\alpha, \beta, \infty)$ sınıfı da ele alınmıştır. Ayrıca $p = 1, \beta = 0$ ve $\gamma \rightarrow \infty$ koşulları altında elde edilen $\mathcal{A}_1(\alpha, 0, \infty)$ sınıfı Singh [24] tarafından incelenmiştir. Bu nedenle $\mathcal{A}_p(\alpha, \beta, \gamma)$ sınıfı yukarıda çalışıldığı belirtilen sınıfların bir genelleştirilmesidir.

5.4 $\mathcal{A}_p(\alpha, \beta, \gamma)$ Sınıfının Özellikleri

Teorem 5.14. [30] $f(z) \in \mathcal{A}_p(\alpha, \beta, \gamma)$ ise

$$\beta < \operatorname{Re} \left(\frac{f(z)}{z^p} \right)^\alpha < \gamma \quad (z \in \mathbb{U}) \quad (5.37)$$

eşitsizliği sağlanır.

Kanıt. $f(z) \in \mathcal{A}_p(\alpha, \beta, \gamma)$ olmak üzere Lemma 5.5 'deki fonksiyonlar $M(z) = [f(z)]^\alpha$ ve $N(z) = z^{p\alpha}$ olsun. O halde $N(z)$ fonksiyonu $\mathbb{U}$ birim diskinde orijine göre yıldızlı

p -valent bir fonksiyondur ve bu fonksiyonların türevleri

$$M'(z) = \alpha[f(z)]^{\alpha-1}f'(z) \quad \text{ve} \quad N'(z) = p\alpha z^{p\alpha-1} \quad (5.38)$$

olarak hesaplanır. Türevlere ait elde edilen neticeler kullanılarak

$$\frac{M'(z)}{N'(z)} = \frac{1}{p} \left(\frac{[f(z)]^{\alpha-1}f'(z)}{z^{p\alpha-1}} \right) \quad (5.39)$$

eşitliğine ulaşılır. Bu durumda $f(z) \in \mathcal{A}_p(\alpha, \beta, \gamma)$ fonksiyonları için

$$\frac{\beta}{p} < \operatorname{Re} \left(\frac{M'(z)}{N'(z)} \right) = \frac{1}{p} \operatorname{Re} \left(\frac{[f(z)]^{\alpha-1}f'(z)}{z^{p\alpha-1}} \right) < \frac{\gamma}{p} \quad (z \in \mathbb{U}) \quad (5.40)$$

ifadesi sağlanır ve Lemma 5.5 kullanılarak

$$\beta < \operatorname{Re} \left(\frac{M(z)}{N(z)} \right) = \operatorname{Re} \left(\frac{f(z)}{z^p} \right) < \gamma \quad (z \in \mathbb{U}) \quad (5.41)$$

denklemi elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. $\square$

Teorem 5.14'te $p = 1$ alındığında Teorem 5.7'da ispatlanan aşağıdaki sonuç elde edilir.

Corollary 5.15. *[30] $f(z) \in \mathcal{A}_1(\alpha, \beta, \gamma)$ ise*

$$\beta < \operatorname{Re} \left(\frac{f(z)}{z} \right)^\alpha < \gamma \quad (z \in \mathbb{U}) \quad (5.42)$$

eşitsizliği sağlanır.

Teorem 5.16. *[30] $f(z) \in \mathcal{A}_p(\alpha, \beta, \gamma)$ olmak üzere*

$$[F(z)]^\alpha = \frac{p\alpha + 1}{z} \int_0^z [f(t)]^\alpha dt \quad (z \in \mathbb{U}) \quad (5.43)$$

şeklinde tanımlanan $F(z)$ fonksiyonu $\mathcal{A}_p(\alpha, \beta, \gamma)$ sınıfına aittir.

Kanıt. $f(z) \in \mathcal{A}_p(\alpha, \beta, \gamma)$ olmak üzere (5.43) denklemi ile tanımlanan $F(z)$ fonksiyonu

$$\frac{zF'(z)}{F(z)} = \left(\frac{1}{\alpha}\right) \frac{z[f(z)]^\alpha - \int_0^z [f(t)]^\alpha dt}{\int_0^z [f(t)]^\alpha dt} \quad (5.44)$$

eşitliğini sağlar. Bu eşitlik düzenlendiğinde

$$\frac{[F(z)]^{\alpha-1} F'(z)}{z^{p\alpha-1}} = \left(\frac{p\alpha+1}{\alpha}\right) \frac{z[f(z)]^\alpha - \int_0^z [f(t)]^\alpha dt}{z^{p\alpha+1}} \quad (5.45)$$

elde edilir. Şimdi $M(z)$ ve $N(z)$ fonksiyonları

$$M(z) = \frac{p\alpha+1}{\alpha} \left(z[f(z)]^\alpha - \int_0^z [f(t)]^\alpha dt \right) \quad \text{ve} \quad N(z) = z^{p\alpha+1} \quad (5.46)$$

olarak tanımlansın. Buradan fonksiyonların türevleri

$$M'(z) = (p\alpha+1) (z[f(z)]^{\alpha-1} f'(z)) \quad \text{ve} \quad N'(z) = (p\alpha+1) z^{p\alpha} \quad (5.47)$$

olarak hesaplanır. Bulunan türevler kullanılarak

$$\frac{M'(z)}{N'(z)} = \frac{[f(z)]^{\alpha-1} f'(z)}{z^{p\alpha-1}} \quad (5.48)$$

eşitliğine ulaşılır. $f(z) \in \mathcal{A}_p(\alpha, \beta, \gamma)$ olduğundan

$$\beta < \operatorname{Re} \left(\frac{M'(z)}{N'(z)} \right) < \gamma \quad (z \in \mathbb{U}) \quad (5.49)$$

sağlanır ve Lemma 5.5 kullanılarak

$$\beta < \operatorname{Re} \left(\frac{M(z)}{N(z)} \right) = \operatorname{Re} \left(\frac{[F(z)]^{\alpha-1} F'(z)}{z^{p\alpha-1}} \right) < \gamma \quad (z \in \mathbb{U}) \quad (5.50)$$

eşitsizliği elde edilir. O halde $F(z)$ fonksiyonu da $\mathcal{A}_p(\alpha, \beta, \gamma)$ sınıfına aittir. $\square$

Teorem 5.16'te $p = 1$ alındığında Teorem 5.8'de ispatlanan aşağıdaki sonuç elde edilir.

Corollary 5.17. [30] $f(z) \in \mathcal{A}_1(\alpha, \beta, \gamma)$

$$[F(z)]^\alpha = \frac{\alpha + 1}{z} \int_0^z [f(t)]^\alpha dt \quad (5.51)$$

olmak üzere $F(z) \in \mathcal{A}_1(\alpha, \beta, \gamma)$ 'dir.

Teorem 5.18. [30] $f(z) \in \mathcal{A}_p(\alpha, \beta, \gamma)$ ve $\delta \geq 0$ ise

$$[G(z)]^{p\alpha+\delta} = z^\delta [f(z)]^\alpha \quad (5.52)$$

şeklinde tanımlanan $G(z)$ fonksiyonu $\beta_1 = \frac{\alpha + \delta}{p\alpha + \delta} \beta$ ve $\gamma_1 = \frac{\alpha + \delta}{p\alpha + \delta} \gamma$ olmak üzere $\mathcal{A}_p(\alpha, \beta_1, \gamma_1)$ sınıfına aittir.

Kanıt. Denklem (5.52)'in her iki yanının türevi alındığında

$$(p\alpha + \delta) \frac{G'(z)}{G(z)} = \delta \frac{1}{z} + \alpha \frac{f'(z)}{f(z)} \quad (5.53)$$

ve

$$(p\alpha + \delta) \frac{[G(z)]^{p\alpha+\delta-1} G'(z)}{z^{p\alpha+\delta-1}} = \delta \left(\frac{f(z)}{z^p} \right)^\alpha + \alpha \frac{f(z)^{\alpha-1} f'(z)}{z^{p\alpha-1}}$$

eşitlikleri elde edilir. Burada Teorem 5.14 ve $f(z) \in \mathcal{A}_p(\alpha, \beta, \gamma)$ olduğu kullanılarak

$$(\alpha + \delta)\beta < (p\alpha + \delta) \operatorname{Re} \left(\frac{[G(z)]^{p\alpha+\delta-1} G'(z)}{z^{p\alpha+\delta-1}} \right) < (\alpha + \delta)\gamma \quad (z \in \mathbb{U})$$

bulunur. Bu ifade düzenlendiğinde

$$\beta_1 = \frac{\alpha + \delta}{p\alpha + \delta} \beta < \operatorname{Re} \left(\frac{[G(z)]^{p\alpha + \delta - 1} G'(z)}{z^{p\alpha + \delta - 1}} \right) < \frac{\alpha + \delta}{p\alpha + \delta} \gamma = \gamma_1 \quad (z \in \mathbb{U})$$

elde edilir. Böylece $G(z) \in \mathcal{A}_p(\alpha, \beta_1, \gamma_1)$ sonucuna ulaşılır. $\square$

Teorem 5.18'de $p = 1$ alındığında Teorem 5.9'de ispatlanan aşağıdaki sonuç elde edilir.

Corollary 5.19. *[30] $f(z) \in \mathcal{A}_1(\alpha, \beta, \gamma)$ ve $\delta \geq 0$ olmak üzere*

$$[G(z)]^{\alpha + \delta} = z^\delta [f(z)]^\alpha$$

ifadesini sağlayan $G(z)$ fonksiyonu $\mathcal{A}_1(\alpha, \beta, \gamma)$ sınıfına aittir.

5.5 $\mathcal{A}_p(\alpha, \beta, \gamma)$ Sınıfındaki Fonksiyonlar için Katsayı Eşitsizlikleri

$\alpha \geq 0$, $0 \leq \beta < p$ ve $\gamma > p$ olmak üzere

$$\left| \frac{[f(z)]^{\alpha-1} f'(z)}{z^{p\alpha-1}} - \frac{\beta + \gamma}{2} \right| < \frac{\gamma - \beta}{2} \quad (z \in \mathbb{U}) \quad (5.54)$$

eşitsizliğini sağlayan $f(z) \in \mathcal{A}_p$ fonksiyonları aynı zamanda

$$\beta < \operatorname{Re} \left(\frac{[f(z)]^{\alpha-1} f'(z)}{z^{p\alpha-1}} \right) < \gamma \quad (z \in \mathbb{U})$$

koşulunu da sağlar. Dolayısıyla yukarıdaki ifadeleri gerçekleyen $f(z)$ fonksiyonları $\mathcal{A}_p(\alpha, \beta, \gamma)$ sınıfına aittir. Şimdi (5.54) eşitsizliğini sağlayan $f(z) \in \mathcal{A}_p$ fonksiyonla-

rının oluşturduğu sınıf $\mathcal{B}_p(\alpha, \beta, \gamma)$ ile gösterilsin. Burada katsayı eşitsizliklerini elde etmek için Lemma 5.6 kullanılmaktadır.

Teorem 5.20. [30] $\varphi(z)$ fonksiyonu $\mathbb{U}$ birim diskinde analitik olsun ve

$$\varphi(z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k$$

formunda tanımlasın. β ($0 \leq \beta < 1$) ve $\gamma > 1$ reel sayılar olmak üzere eğer $\varphi(z)$ fonksiyonu

$$\beta < \operatorname{Re} \varphi(z) < \gamma \quad (z \in \mathbb{U}) \quad (5.55)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa $k = 1, 2, 3, \dots$ değerleri için

$$|c_k| \leq \begin{cases} 2(1 - \beta), & \beta + \gamma \geq 2, \\ 2(\gamma - 1), & \beta + \gamma \leq 2, \end{cases} \quad (5.56)$$

ifadesi gerçekleşir.

Kanıt.

$$F(z) = \frac{\varphi(z) - \beta}{1 - \beta} \quad (z \in \mathbb{U}) \quad (5.57)$$

şeklinde tanımlanan bir $F(z)$ fonksiyonu ele alınsın. Bu durumda fonksiyon $\mathbb{U}$ birim diskinde analitiktir. Ayrıca $F(0) = 1$, $\operatorname{Re} F(z) > 0$ ve

$$F(z) = 1 + \frac{1}{1 - \beta} \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k \quad (5.58)$$

ifadeleri sağlanır. Dolayısıyla Lemma 5.6

$$|c_k| \leq 2(1 - \beta) \quad (5.59)$$

eşitsizliğinin gerçekleştiğini gösterir. Öte yandan

$$G(z) = \frac{\gamma - \varphi(z)}{\gamma - 1} \quad (z \in \mathbb{U}) \quad (5.60)$$

olarak tanımlanan $G(z)$ fonksiyonu $\mathbb{U}$ birim diskinde analitik, $G(0) = 1$ ve $\operatorname{Re} G(z) > 0$ olmak üzere

$$G(z) = 1 - \frac{1}{\gamma - 1} \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k$$

şeklinde gösterilebilir. Burada Lemma 5.6 kullanılarak

$$|c_k| \leq 2(\gamma - 1)$$

elde edilir. O halde $\varphi(z)$ fonksiyonu için $k = 1, 2, 3, \dots$ olmak üzere

$$|c_k| \leq \min(2(1 - \beta), 2(\gamma - 1)) = \begin{cases} 2(1 - \beta), & \beta + \gamma \geq 2, \\ 2(\gamma - 1), & \beta + \gamma \leq 2, \end{cases}$$

katsayı eşitsizliği sağlanır. □

Teorem 5.21. [30] $f(z) \in \mathcal{A}_p(\alpha, \beta, \gamma)$ ise

$$|a_{p+1}| \leq \begin{cases} \frac{2(p - \beta)}{p(p\alpha + 1)}, & \beta + \gamma \geq 2p, \\ \frac{2(\gamma - p)}{p(p\alpha + 1)}, & \beta + \gamma \leq 2p, \end{cases} \quad (5.61)$$

eşitsizliği sağlanır.

Kanıt.

$$\varphi(z) = \frac{[f(z)]^{\alpha-1} f'(z)}{pz^{p\alpha-1}} = 1 + (p\alpha + 1)a_{p+1}z + \dots \quad (5.62)$$

formunda tanımlanan $\varphi(z)$ fonksiyonu $\mathbb{U}$ birim diskinde analitik, $\varphi(0) = 1$ ve $\beta_0 = \frac{\beta}{p}$, $\gamma_0 = \frac{\gamma}{p}$ olmak üzere

$$\beta_0 < \operatorname{Re} \varphi(z) < \gamma_0 \quad (z \in \mathbb{U}) \quad (5.63)$$

eşitsizliğini sağlar. Teorem 5.20 kullanılarak

$$|a_{p+1}| \leq \begin{cases} \frac{2(1-\beta_0)}{(p\alpha+1)}, & \beta_0 + \gamma_0 \geq 2, \\ \frac{2(\gamma_0-1)}{(p\alpha+1)}, & \beta_0 + \gamma_0 \leq 2, \end{cases} \quad (5.64)$$

ifadesine ulaşılır. Burada $\beta_0 = \frac{\beta}{p}$ ve $\gamma_0 = \frac{\gamma}{p}$ olarak belirlendiğinde (5.61) katsayı eşitsizliği elde edilir. $\square$

Corollary 5.22. [30] $f(z) \in \mathcal{A}_1(\alpha, \beta, \gamma)$ ise

$$|a_2| \leq \begin{cases} \frac{2(1-\beta)}{\alpha+1}, & \beta + \gamma \geq 2, \\ \frac{2(\gamma-1)}{\alpha+1}, & \beta + \gamma \leq 2, \end{cases} \quad (5.65)$$

eşitsizliği sağlanır.

Teorem 5.23. [30] $f(z) \in \mathcal{A}_p(\alpha, \beta, \infty)$ ise

$$|a_{p+1}| \leq \frac{2(p-\beta)}{p\alpha+1} \quad (5.66)$$

ve

$$|a_{p+2}| \leq \begin{cases} 2(p-\beta) \left(\frac{1}{p\alpha+2} + \frac{(1-\alpha)(p-\beta)}{(p\alpha+1)^2} \right), & (0 \leq \alpha \leq 1) \\ 2(p-\beta) \left(\frac{1}{p\alpha+2} + \frac{(\alpha-1)(p-\beta)}{(p\alpha+1)^2} \right), & (\alpha \geq 1) \end{cases} \quad (5.67)$$

eşitsizlikleri sağlanır.

Kanıt. $f(z) \in \mathcal{A}_p(\alpha, \beta, \infty)$, $g(0) = 1$ ve $\operatorname{Re} g(z) > 0$ olmak üzere

$$g(z) = \frac{1}{p - \beta} \left(\frac{[f(z)]^{\alpha-1} f'(z)}{z^{p\alpha-1}} - \beta \right) \quad (z \in \mathbb{U}) \quad (5.68)$$

formunda tanımlanan $g(z)$ fonksiyonu $\mathbb{U}$ birim diskinde analitiktir. Ayrıca

$$g(z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k \quad (5.69)$$

için

$$|c_k| \leq 2 \quad (k = 1, 2, 3, \dots) \quad (5.70)$$

sağlanır. Burada

$$g(z) = \frac{1+z}{1-z} \quad (5.71)$$

fonksiyonu (5.70) eşitsizliğinin ekstremal fonksiyonudur. Diğer taraftan (5.68) denklemiyle tanımlanan $g(z)$ fonksiyonu kullanılarak

$$c_1 = \frac{p\alpha + 1}{p - \beta} a_{p+1} \quad (5.72)$$

ve

$$c_2 = \frac{p\alpha + 2}{p - \beta} \left(a_{p+2} + \frac{\alpha - 1}{2} a_{p+1}^2 \right) \quad (5.73)$$

katsayıları elde edilir. Buradan

$$|a_{p+1}| = \frac{p - \beta}{p\alpha + 1} |c_1| \leq \frac{2(p - \beta)}{p\alpha + 1} \quad (5.74)$$

sonucuna ulaşılır.

$$\frac{[f(z)]^{\alpha-1} f'(z)}{z^{p\alpha-1}} = \frac{p + (p - 2\beta)z}{1 - z} \quad (5.75)$$

ifadesini sağlayan $f(z)$ fonksiyonu (5.74) eşitsizliğinin ekstremal fonksiyonudur. Öte

yandan (5.73) eşitliği göz önüne alındığında $0 \leq \alpha \leq 1$ için

$$|a_{p+2}| \leq \frac{2(p-\beta)}{p\alpha+2} + \frac{2(1-\alpha)(p-\beta)^2}{(p\alpha+1)^2} = 2(p-\beta) \left(\frac{1}{p\alpha+2} + \frac{(1-\alpha)(p-\beta)}{(p\alpha+1)^2} \right) \quad (5.76)$$

ve $\alpha \geq 1$ için

$$|a_{p+2}| \leq 2(p-\beta) \left(\frac{1}{p\alpha+2} + \frac{(\alpha-1)(p-\beta)}{(p\alpha+1)^2} \right) \quad (5.77)$$

eşitsizlikleri elde edilir. Burada

$$\frac{[f(z)]^{\alpha-1} f'(z)}{z^{p\alpha-1}} = \frac{p + (p-2\beta)z^2}{1-z^2} \quad (5.78)$$

ifadesini sağlayan $f(z)$ fonksiyonu (5.76) ve (5.77) denklemleri için ekstremaldir. $\square$

Teorem 5.23'te $p = 1$ alındığında aşağıdaki sonuç elde edilir.

Corollary 5.24. *[30] $f(z) \in \mathcal{A}_1(\alpha, \beta, \infty)$ ise*

$$|a_2| \leq \frac{2(1-\beta)}{\alpha+1} \quad (5.79)$$

ve

$$|a_3| \leq \begin{cases} 2(1-\beta) \left(\frac{1}{\alpha+2} + \frac{(1-\alpha)(1-\beta)}{(\alpha+1)^2} \right) & (0 \leq \alpha \leq 1) \\ 2(1-\beta) \left(\frac{1}{\alpha+2} + \frac{(\alpha-1)(1-\beta)}{(\alpha+1)^2} \right) & (\alpha \geq 1) \end{cases} \quad (5.80)$$

eşitsizlikleri gerçekleşir. Burada

$$\frac{[f(z)]^{\alpha-1} f'(z)}{z^{\alpha-1}} = \frac{1 + (1-2\beta)z}{1-z} \quad (z \in \mathbb{U})$$

ifadesini sağlayan $f(z)$ fonksiyonu (5.79) için ekstremaldir. Diğer taraftan

$$\frac{[f(z)]^{\alpha-1} f'(z)}{z^{\alpha-1}} = \frac{1 + (1-2\beta)z^2}{1-z^2} \quad (z \in \mathbb{U})$$

eşitliğini gerçekleyen $f(z)$ fonksiyonu (5.80) eşitsizliğinin ekstremal fonksiyonudur.

Son olarak (5.54) denklemiyle tanımlanan $f(z) \in \mathcal{B}_p(\alpha, \beta, \gamma)$ fonksiyonları ele alınacaktır.

Teorem 5.25. [30] $f(z) \in \mathcal{B}_p(\alpha, \beta, \gamma)$ ise

$$\left| \arg \left(\frac{[f(z)]^{\alpha-1} f'(z)}{z^{p\alpha-1}} \right) \right| < \sin^{-1} \left(\frac{\gamma - \beta}{\gamma + \beta} \right) \quad (z \in \mathbb{U}) \quad (5.81)$$

eşitsizliği sağlanır.

Kanıt. Denklem (5.54) göz önüne alındığında

$$-\frac{\gamma - \beta}{\gamma + \beta} < \sin \left\{ \arg \left(\frac{[f(z)]^{\alpha-1} f'(z)}{z^{p\alpha-1}} \right) \right\} < \frac{\gamma - \beta}{\gamma + \beta} \quad (z \in \mathbb{U}) \quad (5.82)$$

eşitsizliği bulunur. Böylece (5.81) ifadesinin sağlandığı sonucu elde edilir. $\square$

Corollary 5.26. [30] $f(z) \in \mathcal{B}_p(\alpha, \beta, \gamma)$ ise $\gamma = (3 + 2\sqrt{2})\beta > p$ için

$$\left| \arg \left(\frac{[f(z)]^{\alpha-1} f'(z)}{z^{p\alpha-1}} \right) \right| < \frac{\pi}{4} \quad (z \in \mathbb{U}) \quad (5.83)$$

eşitsizliği sağlanır. $\gamma = 3\beta > p$ ise

$$\left| \arg \left(\frac{[f(z)]^{\alpha-1} f'(z)}{z^{p\alpha-1}} \right) \right| < \frac{\pi}{6} \quad (z \in \mathbb{U}) \quad (5.84)$$

ifadesi gerçekleşir ve $\gamma = (7 + 4\sqrt{3})\beta > p$ olmak üzere

$$\left| \arg \left(\frac{[f(z)]^{\alpha-1} f'(z)}{z^{p\alpha-1}} \right) \right| < \frac{\pi}{3} \quad (z \in \mathbb{U})$$

elde edilir.

Kaynakça

- [1] Alexander, James W. "Functions Which Map the Interior of the Unit Circle Upon Simple Regions". *Annals of Mathematics* 17 (1915-1916): 12–22.
- [2] Ali, Rosihan M. and Ravichandran, V. and Khan, M. Hussain and Subramanian, K. G. "Applications of First Order Differential Superordinations to Certain Linear Operators" *Southeast Asian Bulletin of Mathematics* 30 (5) (2006): 799–810.
- [3] Bazilevič, Igor E. "On a Case of Integrability in Quadratures of the Loewner-Kufarev Equation" *Matematicheskii Sbornik. Novaya Seriya* 37(79) (1955): 471–476.
- [4] Bieberbach, Ludwig. "Über die Koeffizienten Derjenigen Potenzreihen, Welche Eine Schlichte Abbildung Des Einheitskreises Vermitteln". *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften* 1 (1916): 940–955.
- [5] Carathéodory, Constantin "Über Den Variabilitätsbereich Der Fourier'schen Konstanten Von Positiven Harmonischen Funktionen" *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo* 32 (1911): 193-217.
- [6] Conway, John Brian. *Functions of One Complex Variable*. (New York: Springer-Verlag, 1978).
- [7] De Branges, Louis. "A Proof of the Bieberbach Conjecture". *Acta Mathematica* 154 (1985): 137–152.

- [8] Duren, Peter L. *Univalent Functions* (New York: Springer-Verlag, 1983).
- [9] Goodman, Adolph W. *Univalent Functions. Vol. I.* (Tampa, Florida: Mariner Publishing Company, Inc., 1983).
- [10] Goodman, Adolph W. *Univalent Functions. Vol. II.* (Tampa, Florida: Mariner Publishing Company, Inc., 1983).
- [11] Grönwall, Thomas H. "Some Remarks on Conformal Representation". *Annals of Mathematics. Second Series* 16 (1914-1915): 72–76.
- [12] Hayman, W. K. *Multivalent Functions.* (Cambridge: Cambridge University Press, 1994).
- [13] Kaplan, Wilfred. "Close-to-Convex Schlicht Functions". *Michigan Mathematical Journal* 1 (1952): 169–185(1953).
- [14] Keogh, Frank R. and Merkes, Edward P. "A Coefficient Inequality for Certain Classes of Analytic Functions". *Proceedings of the American Mathematical Society* 20 (1969): 8–12.
- [15] Koebe, Paul. "Ueber die Uniformisierung Beliebiger Analytischer Kurven" *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse* 1907 (1907): 191-210.
- [16] Löwner, Karl. "Untersuchungen über Schlichte Konforme Abbildungen des Einheitskreises. I" *Mathematische Annalen* 89 (1923): 103–121.
- [17] Miller, Sanford S. and Mocanu, Petru T. *Differential Subordinations: Theory and Applications.* (New York: Marcel Dekker Inc., 2000).
- [18] Nevanlinna, Rolf H. "Über die Konforme Abbildung von Sterngebieten". *Översikt av Vetenskaps-Societetens förhandlingar / A* 63 (2008): 1–21.

- [19] Noshiro, Kiyoshi. "On the Theory of Schlicht Functions". *Journal of the Faculty of Science Hokkaido Imperial University. Ser. 1 Mathematics* 2 (1934): 129–155.
- [20] Pommerenke, Christian. *Univalent Functions with a Chapter on Quadratic Differentials by Gerd Jensen*. (Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht, 1975) 376.
- [21] Pommerenke, Christian. "On the Coefficients of Close-to-Convex Univalent Functions". *Journal of the London Mathematical Society* 41 (1966): 161–165.
- [22] Reade, Maxwell O. "On Close-to-Convex Univalent Functions". *Michigan Mathematical Journal* 3 (1955): 59–62.
- [23] Sakaguchi, K oichi "On a Certain Univalent Mapping" *Journal of the Mathematical Society of Japan* 11 (1959): 72–75.
- [24] Singh, Ram "On Bazilevič Functions" *Proceeding of the American Mathematical Society* 38 (1973): 261–271.
- [25] Study, Eduard *Vorlesungen Über Ausgewählte Gegenstände der Geometrie, 2. Heft: Konforme Abbildung Einfach-Zusammenhängender Bereiche* (Leipzig-Berlin: Teubner-Verlag, 1913)
- [26] Thomas, Derek K. and Tuneski, Nikola and Vasudevarao, Allu *Univalent Functions*. (Berlin: De Gruyter, 2018).
- [27] Titchmarsh, E. C. *The Theory of Functions*. (Oxford: Oxford University Press, 1958).
- [28] Warschawski, Stefan E. "On the Higher Derivatives at the Boundary in Conformal Mapping". *Transactions of the American Mathematical Society* 38 (1935): 310–340.

- [29] Yavuz E., Daymaz T., Owa S., "Generalizations for Certain Bazilevič Functions".
Southeast Asian Bulletin of Mathematics 45 (2021) : 133-142.
- [30] Yavuz E., Daymaz T., Owa S., "Notes on p -Valently Bazilevič Functions". *Far East Journal of Mathematical Sciences* 121 (2019) : 147-160.

