T.C.

ISTANBUL KÜLTÜR ÜNİVERSİTESİ

LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

LİNEER DENKLEM SİSTEMLERİNİN SONLU FARK METODU VE NON-POLYNOMIAL KÜBİK SPLİNE METODU YARDIMIYLA NÜMERİK ÇÖZÜMLERİNİN ELDE EDİLMESİ

YÜKSEK LİSANS TEZI

Marwan SWAID
1700005068

Anabilim Dalı: Matematik ve Bilgisayar Bilimleri

Program: Matematik ve Bilgisayar Bilimleri

Tez Danışmanı: Dr. Öğr Üyesi Canan AKKOYUNLU

ŞUBAT 2021

T.C.

ISTANBUL KÜLTÜR ÜNİVERSİTESİ

LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

LİNEER DENKLEM SİSTEMLERİN SONLU FARK METODU VE NON-POLYNOMIAL KÜBİK SPLİNE METODU YARDIMIYLA NÜMERİK ÇÖZÜMLERİNİN ELDE EDİLMESİ

YÜKSEK LİSANS TEZI

Marwan SWAID
1700005068

Anabilim Dalı: Matematik ve Bilgisayar Bilimleri

Program: Matematik ve Bilgisayar Bilimleri

Tez Danışmanı : **Dr. Öğr. Üyesi CANAN AKKOYUNLU**

Tez Jüri Üyeleri : **Doç. Dr. SÜLEYMAN HİKMET ÇAĞLAR**

Dr. Öğr. Üyesi NİLAY DURUK MUTLUBAŞ

ŞUBAT 2021

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın hazırlanmasının başından sonuna kadar,bir çok kişi tarafından desteklendim ve yol gösterildim. bütün bu kişilere şükranlarımı sunuyorum.

öncelikle en derin ve en içten şükranlarımı her aşamasında emeği olan, bana yol gösteren, rehberlik eden danışmanım Dr. Öğr Üyesi Canan AKKOYUNLU'a sunuyorum. Onun desteği ve önerileri bu tezin tamamlanmasında

Bir üyesi olmaktan övündüşüm istanbul Kültür Üniversitesi'nde üzerimde emeği olan herkese özellikle Matematik-Bilgisayar Bölümü hocalarıma ve arkadaşlarıma değerli yardımlar, katkılar ve destekleri için çok teşekkür ediyorum.

Son olarak, çalışmanın her aşamasında bitmez tükenmez destek ve fedakarlıkları için aileme, tüm sevdiklerime ne kadar teşekkür etsem azdır. Sizlere en derin sevgi ve şükranlarım sunuyorum. iyi ki varsınız...

ÖZET

LİNEER DENKLEM SİSTEMLERİNİN SONLU FARK METODU VE NON-POLYNOMIAL KÜBİK SPLİNE METODU YARDIMIYLA NÜMERİK ÇÖZÜMLERİNİN ELDE EDİLMESİ

Marwan SWAID

Yüksek lisans Tezi, Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr Üyesi CANAN AKKOYUNLU

ŞUBAT 2021, 37 sayfa

Çalışmada lineer denklem sistemlerinin nümerik çözümü ele alınmıştır. Bu lineer denklemlerin nümerik olarak çözümünde Kübik spline ve Sonlu fark metodlar uygulanmıştır.
Bu yöntemlerin uygulanabilmesi için özellikle kübik spline metodda M_i momentlerini elde etmek için Taylor açılımı geliştirilmiştir. Sonuç olarak da önemli nümerik sonuçlar elde edilmiştir.problemine sonlu fark ve kübik spline metodları uygulandıktan sonra metodun test edilmesi için nümerik dağılım analizi yapılmıştır ve olumlu sonuç alınmıştır. Çözülen tüm problemlerde elde edilen nümerik sonuçların analitik çözümlerine yakınsadığı görülmüştür. Bu metodların bu tür problemler üzerinde uygulanabilirliği ispatlanmıştr.

JÜRİ: **Dr. Öğr Üyesi CANAN AKKOYUNLU**

Doç. Dr. SÜLEYMAN HİKMET ÇAĞLAR

Dr. Öğr Üyesi NİLAY DURUK MUTLUBAŞ

ABSTRACT

Numerical Solutions of Linear Equation Systems with the Help of Finite Difference Method and Non-Polynomial Cubic Spline Method

Marwan SWAID

MSc. Thesis in Department of Mathematics and Computer Science.

Supervisor: Dr. Öğr Üyesi CANAN AKKOYUNLU

FEBREUARY 2021, 37 pages

In this thesis, numerical solutions of linear differential equation are considered. FDM and Cubic spline methods are applied for the equations above. Taylor expansion is used to obtain M_i moments in cubic spline method. In order to test accuracy of the cubic spline and fdm methods applied, numerical dispersion analysis is applied and useful results are obtained. It is concluded that in all the problems numerical results converge to the exact solutions. It yields results compatible with the exact solutions and consistent with other existing numerical methods. Use of cubic spline and fdm method have shown that they are applicable methods for this type of equations.

COMMITTEE: **Assist. Prof. Dr. CANAN AKKOYUNLU**

Assoc. Prof. Dr. SÜLEYMAN HIKMET ÇAGLAR

Assist. Prof. Dr. NILAY DURUK MUTLUBAŞ

İÇİNDEKİLER

AKADEMİK BEYAN

Yüksek lisans Tezi olarak sunduğum " LİNEER DENKLEM SİSTEMLERİNİN SONLU FARK METODU VE NON-POLYNOMIAL KÜBİK SPLİNE METODU YARDIMIYLA NÜMERİK ÇÖZÜMLERİNİN ELDE EDİLMESİ " adlı bu çalışmanın, akademik kurallar ve etik değerlere uygun olarak bulunduğunu belirtir, bu tez çalışmasında bana ait olmayan tüm bilgilerin kaynağını gösterdiğimi beyan ederim.

.../.../2021
Marwan SWAID
İmza

ŞEKİLLER DİZİNİ

1. GİRİŞ

Günümüzde spline fonksiyonları interpolasyon, veri uydurma ve adi ve kısmi diferansiyel denklemlerin sayısal çözümü gibi birçok alanda kullanılmaktadır. Spline fonksiyonları pratik problemlerde aşağıdaki faydalı özelliklere sahiptir:

a) Kolay ve esnek,

b) Bilgisayarda kaydedilmesi ve işletilmesi kolay,

c) Türevleri ve integralleri ile değerlendirilmesi kolay,

d) Daha yüksek boyutlara genellemesi kolay.

Adi ve kısmi diferansiyel denklemlerin düzgün yaklaşık çözümleri için spline fonksiyonlarını kullanan en eski makalelerden bazıları [1-8]'dir. Bu makaleler, çeşitli derecelerde spline fonksiyonları kullanarak ikinci, üçüncü ve dördüncü dereceden doğrusal sınır değer problemleri (BVP) çözümünün yaklaşık yöntemlerini , eliptik ve parabolik denklemlerin çözümünü gösterir. Spline fonksiyonlarının hızlı bir şekilde gelişmesi, başlıca olarak uygulamalardaki yüksek kullanılabilirliğinden kaynaklanmaktadır. Spline fonksiyonlarının sınıfları, üstün yaklaşım güçlerinin yanı sıra birçok iyi yapısal özelliğe sahiptir. Splinelar uygulamalı matematikte ve mühendislikte çeşitli problemlerin sayısal çözümünde, farklı uygulamalarda yer almaktadır. Veri uydurma, fonksiyon yaklaştırma, integro-diferansiyel denklemler, optimal kontrol problemleri, bilgisayar destekli geometrik tasarım (CAGD), vb. bu uygulamaların bazılarıdır. Spline fonksiyonlarına dayalı programlar da bilgisayar uygulamaların çoğunda yer bulmuştur. Bu da binlerce araştırmanın konusu olmuştur ve aktif bir araştırma alanı olarak devam etmektedir. Son zamanlarda polinom olmayan spline yöntemleri adi ve kısmi diferansiyel denklemlerin çözümünde etkili bir araç haline gelmiştir. Birçok araştırmada, doğrusal ve doğrusal olmayan sınır değer problemlerinin sayısal çözümü için ikinci, üçüncü, dördüncü, beşinci, altıncı, yedinci ve daha yüksek dereceden polinom olmayan splinenin kullanıldığı birçok teknik ele alınmıştır Kübik, beşinci ve altıncı dereceden polinom ve polinom olmayan spline kullanarak adi ve kısmi diferansiyel denklemlerin çözümü için son spline fonksiyonların kullanımı üzerinde bir anket [9-14]de verilmiştir.[15-19] İkinci ve dördüncü dereceden ve kesirli sınır değer problemlerinin çözümünde farklı derecelerden polinom ve polinom olmayan spline kullanılmıştır.

1.1. Lineer Denklem Sistemi

$a_1x_2 + a_2x_2 + \cdots + a_1x_n = 0$
şeklindeki denkleme, doğrusal (lineer) denklem denir.
$a_1, a_2, \ldots, a_n$ reel sayılarına denklemin katsayıları,
$x_1, x_2, \ldots, x_n$ değişkenlerine denklemin bilinmeyenleri denir.
$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0$
$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0$
$\vdots$
$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0$
şeklindeki n bilinmeyenli n tane denklemden oluşan sisteme doğrusal (lineer) denklem

sistemi denir. Bu sistem aşağıdaki formda gösterebilir:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots & a_{1n} & \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \cdots & a_{2n} & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \cdots & a_{3n} & \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} & \cdots & a_{nn} & \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

veya $AX = B$ şeklinde yazılabilir
ve çözümü bulmak için $|A| \neq 0; \quad X = A^{-1}B$ formu kullanılır

1.2. Lineer Diferansiyel Denklem Sistemi

Tek bir serbest değişkenin birden çok fonksiyonunu birlikte ele alalım. Bu değişken ve buna bağlı değişken ve onun belirli bir mertebeye kadar türevleri arasında kurulmuş bu bağıntılar n tane olsun. Bu bağıntılar topluluğunu Adi Diferansiyel Denklem Sistemi denir. Ancak diferansiyel denklemlerde olduğu gibi, pratikte bu Diferansiyel Denklem Sistemi olarak anılır. Denklem sistemindeki bağıntılar birlikte ele alınacağı için bu tür sistemlere Simultane Diferansiyel Denklem Sistemi de denilmektedir. Sonuç olarak, Diferansiyel Denklem Sistemi denilince bu kavramlar bir bütün halinde böyle anlaşılacaktır. t serbest değişkeninin n tane farklı fonksiyonu $x_1 = x_1(t), x_2 = x_2(t), , x_n = x_n(t)$ dir. Serbest değişken, bu fonksiyonlar ve bunların belirli bir mertebeye kadar türevlerini içeren n tane bağıntı aşağıdaki gibi olsun :

$$\begin{aligned} &f_1(t, x_1, x_1', x_1'', ..., x_n, x_n', x_n'') = 0 \\ &f_2(t, x_1, x_1', x_1'', ..., x_n, x_n', x_n'') = 0 \\ &\vdots \\ &f_n(t, x_1, x_1', x_1'', ..., x_n, x_n', x_n'') = 0 \end{aligned} \tag{1.1}$$

Bu sistemde fonksiyonlar ve bütün türevleri 1.dereceden olduğu için ayrıca bu tür sistemlere Lineer Diferansiyel Denklem Sistemi ya da sadece Lineer Sistem denir[20].

1.3. Lineer Diferansiyel Operatör

İkinici mertebeden lineer diferansiyel operatör

$$L = a_0(x)\frac{d^2}{dx^2} + a_1(x)\frac{d}{dx} + a_2(x)$$

biçiminde tanımlanıyor.

$\varphi, \psi \in C^2(I) \quad$ ve $c_1, c_2 \in C$
olmak üzere

$$L(c_1\phi + c_2\psi) = c_1L\phi + c_2L\psi$$

eşitliği sağlanır. Yani L operatörü lineerdir[6].

1.4. Süperpozisyon ilkesi

Temel bir özellik olarak homojen lineer diferansiyel denklemlerin çözümlerinin lineer birleşimi de bir çözüm belirtir. Eğer ϕ ve ψ fonksiyonları için $L\phi = 0, L\psi = 0$, sağlanıyorsa , herhangi c_1 ve c_2 sabitleri için

$L(c_1\phi + c_2\psi) = c_1 L\phi + c_2 L\psi$=0
eşitliği elde edilir. Bu eşitlik süperpozisyon ilkesi olarak bilinir.

Not:

Eğer her x noktasında $a_0 \neq 0$ ise $a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = f$ bu denkleminin her iki tarafını sıfırdan farklı a_0'a bölerek,
$y'' + \dfrac{a_1}{a_0} y' + \dfrac{a_2}{a_0} y = \dfrac{f}{a_0}$, denklemini elde ederiz. Burada
$q = \dfrac{a_1}{a_0}, r = \dfrac{a_2}{a_0}, g = \dfrac{f}{a_0}$ olarak alınırsa
$y'' + q(x)y' + r(x)y = g(x)$
eşitliği elde edilir[21].

1.5. Başlangıç Değer Problemi

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x) \tag{1.2}$$

ikinci mertebeden lineer diferansiyel denklemi verilsin.

Eğer q,r ve g fonksiyonları I aralığında sürekli , x_0 , I aralığında keyfi bir nokta ise

$$y'' + q(x)y' + r(x)y = g(x) \tag{1.3}$$

denkleminin her γ, η sayıları ve her $x_0 \in I$ noktası için

$$\varphi(x_0) = \gamma, \varphi'(x_0) = \eta \tag{1.4}$$

şartlarını sağlayan çözümü vardır ve tekdir.
(1.4) şartlarına başlangıç koşulları ve (1.2)-(1.3) sistemine ise başlangıç değer problemi denir[AL-GWAIZ , 2008].

1.6. Yüksek Mertebeden Lineer Diferansiyel Denklemler

Tanım

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = f(x),\ a_n(x) \neq 0 \quad (1.5)$$

biçimindeki denkleme n. mertebeden homojen olmayan lineer diferansiyel denklem denir. Burada $a_0, a_1, \ldots, a_n$ katsayıları ve f fonksiyonu bir (a,b) aralığında tanımlı ve sürekli fonksiyonları göstermektedir.

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0 \quad (1.6)$$

denklemine ise n. mertebeden homojen lineer diferansiyel denklem denir[KANDEMIR ,2015].

Tanım

$$L(y) = f(x)$$

$$L(y) = a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1\frac{dy}{dx} + a_0(x)y \quad (1.7)$$

şeklinde yazılan ifadeye lineer diferansiyel ifade denir. L dönüşümüne ise diferansiyel operatör denir. Böylece (1.7) denklemi

$$L_y = f(x) \quad (1.8)$$

biçiminde gösterilir.

Teorem

(1.5) eşitliği ile tanımlanan L operatörü lineerdir.Yani $y_1, y_2, \ldots, y_n$ n. mertebeden türevlenebilir fonksiyonlar ve $c_1, c_2, \ldots, c_n$ herhangi keyfi sabitler olmak üzere

$$L(c_1y_1 + c_2y_2 + \cdots + c_ny_n) = c_1L(y_1) + c_2L(y_2) + \cdots + c_nL(y_n) \quad (1.9)$$

eşitliği sağlanır.

Tanım

$y_1, y_2, \ldots, y_n$ herhangi fonksiyonlar ve $c_1, c_2, \ldots$ keyfi sabitler olmak üzere

$$c_1y_1 + c_2y_2 + \cdots + c_ny_n \quad (1.10)$$

ifadesine $y_1, y_2, \ldots, y_n$ fonksiyonlarının lineer birleşimi denir.

1.7. Kesme Hatası

Tanım

Matematik işlemler yerine, yaklaşık olanlarının alınmasıyla ortaya çıkan hatalara kesme hatası denir. Örnek olarak Taylor serisi açılımıyla yapılan hatayı gösterebiliriz.
$x_{i+1} - x_i = h$ olmak üzere
$y(x_{i+1}) = y(x_i) + y'(x_i)h + \dfrac{y''(x_i)}{2!}h^2 + \cdots + \dfrac{y^{(n)}(x_i)}{n!}h^n + R_n$
açılımında
$R_n = \dfrac{y^{(n)}(\epsilon)}{(n+1)!}h^{(n+1)}$
eşitliği yapılan hatayı göstermektedir[6].

1.8. İkinci Mertebeden Sınır Değer Problemi

Klasik ikinci mertebeden lineer sınır değer problemi

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = \phi(x) \tag{1.11}$$

biçimindeki ikinci mertebeden lineer diferansiyel denkleminden ve

$$\alpha_1 y(a) + \beta_1 y(a) = \gamma_1 \qquad \alpha_2 y(b) + \beta_2 y(b) = \gamma_2 \tag{1.12}$$

biçimindeki sınır şartlarından oluşur. Burada $P(x), Q(x)$ ve $\phi(x)$, $[a, b]$ aralığında sürekli ve $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2 \in R$ ve $\alpha_1^2 + \beta_1^2 \neq 0$ ve $\alpha_2^2 + \beta_2^2 \neq 0$ dır [6].

Tanım

$\phi(x) = 0$, $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ ise (1.11)-(1.12) sınır değer problemine homojen sınır değer problemi, aksi halde ise homojen olamayan sınır değer problemi denir.
Böylece homojen sınır değer problemi

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \tag{1.13}$$

denklemi ve

$$\alpha_1 y(a) + \beta_1 y(a) = 0 \quad \alpha_2 y(b) + \beta_2 y(b) = 0 \tag{1.14}$$

sınır koşulları ile tanımlanır.
Sınır değer problemlerinin çözümünde önce ikinci mertebeden diferasiyel denklemin genel çözümü bulunur. Genel çözümdeki keyfi sabitler, sınır koşullarını sağlayacak şekilde belirlenir. Böylece sınır değer probleminin çözümü hem diferansiyel denklemi hem de sınır koşullarını sağlar.

Not:

Homojen sınır değer problemlerinin daima y(x)=0 çözümü vardır. Bu çözüme denklemlerin aşikar(trivial) çözümü denir. Denklemin eğer sıfırdan farklı $(y(x) \neq 0)$ çözümleri var ise bu çözümlere ise aşikar olmayan çözümler adı verilir.

Teorem

(1.11)-(1.12) homojen olmayan sınır değer probleminin bir tek çözüme sahip olması için gerek ve yeter koşul (1.13)-(1.14) homojen sınır değer probleminin sadece aşikar çözüme sahip olmasıdır.(Bronson,2000)
Başka bir deyişle, homojen olmayan problemin bir tek çözüme sahip olması için gerek ve yeter koşul homojen denklemin bir tek çözüme sahip olmasıdır [6].

Uygulamalı matematikte en sık karşılaşılan sınır koşulları aşağıda verilmiştir.

1. Periyodik sınır koşulları:

$y(-L) = y(L)$ $\qquad$ $y'(-L) = y'(L)$

2. Ayrılabilir sınır koşulları:

$\alpha_1 y(a) + \beta_1 y(a) = 0$ $\qquad$ $\alpha_2 y(b) + \beta_2 y(b) = 0$

3. Dirichlet sınır koşulları:

$y(a) = \gamma_1$ $\qquad$ $y(b) = \gamma_2$

4.Neumann sınır koşulları:

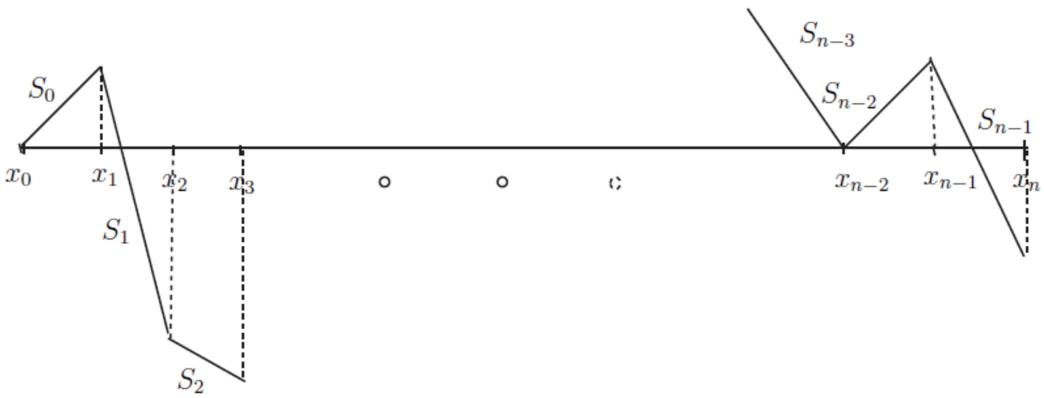
$y'(a) = \gamma_1$ $\qquad$ $y'(b) = \gamma_2$

1.9. Non-Polynomial Spline Metodu

Spline fonksiyonlarının ilk kullanımı önceki yüzyılın başlarına dayanır. Parçalı lineer fonksiyonlar başlangıç değer problemlerinin çözümünde Peanonun varlık ispatıyla bağlantılı olarak kullanılmıştı, ancak o zamanlar bu fonksiyonlara spline fonksiyonları denmezdi. Spline fonksiyonlar kavaramı ilk olarak Schoenberg , Sard ve diğerlerinin çalışmalarıyla ortaya çıkmıştır. Spline fonksiyon kabaca, belli koşullar altında kendisi ve türevleri sürekli olan bir parçalı fonksiyondur. Bu fonksiyonun yaklaştırma, enterpolasyon ve eğri uydurulması gibi uygulamalarda çok başarılıdır. Bundan dolayı bu tür problemlerin çözümünde en iyi yaklaştırma fonksiyonun spline fonksiyon olduğu kabul edilmiştir. Daha sonraları da hem pratik hem de teorek çalışmalarda spline fonksiyonları önemli ölçüde ilgi halinde gelmiştir. Bir çok araştırmacı diferansiyel denklemlerin çözümünde polinom ve polinom olmayan spline metodlarını kullanılmıştır. Kübik spline metodu ilk olarak iki noktalı lineer sınır değer problemlerinin çözümünde kullanılmıştır. Spline fonksiyoları belirli süreklilik koşulları ile birbirine bağlanan aralıklarda tanımlanmış polinom tipli fonksiyonlardır. $x_0, x_1, \cdots, x_n$ gibi $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ koşulunu sağlayacak şeklinde düğüm noktası denen n+1 nokta belirlenmiş olsun.$k \geq 0$ gibi bir k sayısı alınsın.

$$S(x) = a_i + b_i(x - x_i) + \cdots + d_i(x - x_i)^k (i = 0, 1, \ldots, n) \tag{1.15}$$

Görüldüğü üzere S fonksiyonu span={1,x,$x^2, \ldots, x^n$} biçimindedir. S fonksiyonu her bir $[x_{i-1}, x_i]$ aralığında k. ya da daha küçük dereceden bir polinom ise ve $[x_0, x_n]$ aralığında (k-1). dereceden sürekli türevlere sahipse bu fonksiyona $x_0, x_1, \ldots, x_n$ düğüm noktalarına sahip k. dereceden spline fonksiyon denir, yani S fonksiyonu derecesi en fazla k olabilen (k-1). dereceye kadar sürekli türevleri olan sürekli, parçalı bir fonksiyondur. Örneğin 0. dereceden spline fonksiyonları sabitlerdir, 1. dereceden spline fonksiyonları lineer fonksiyonlardır.



Şekil 1.1: 1. dereceden spline fonksiyonu

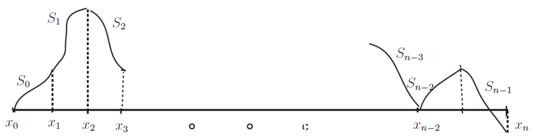
Polinom şeklindeki spline fonksiyonları içinde en çok kullanılan kübik spline fonksiyonlarıdır. Kübik spline fonksiyonları (1.1) deki k=3 halidir, yani span$\{1, x, x^2, x^3\}$ biçimindedir. Spline fonksiyonları yukarıda olduğu gibi polinom olamakla birlikte polinom olmayabilir de. Biz de çalışmamızda span$\{1, x, coskx, sinkx\}$ biçimindeki non-polynomial kübik spline fonksiyonlarını kullanacağız. Burada k parametresi, metodun doğruluğunu artırmak için kullanılan frekanstır. Şimdi kısaca non-polynomial kübik spline fonksiyonlarını ve metodunu inceleyelim:

n, keyfi bir pozitif tam sayı olmak üzere , [a,b] aralığı $x_i = a+ih$, (i=0,1,2,...,n) , $a = x_0$, $x_n = b$, $h = \left(\frac{b-a}{n}\right)$ grid noktalarını kullanarak n eşit alt aralığı bölelim.

U(x) analitik çözüm olsun ve u_i , (x_i, u_i) ve (x_{i+1}, u_{i+1}) noktalarından geçen non polynomial kübik $S_i(x)$ fonksiyonundan elde edilen $u(x_i)$nin bir yaklaşık noktası olsun. $S_i(x), x_i$ ve x_{i+1} noktalarında enterpolasyon koşullarını sağlamalıdır ve buna ek olarak ortak (x_i, u_i) noktalarında birinci türevi sürekli olmalıdır $S_i(x)$,

$$S_i(x) = a_i+b_i(x-x_i)+c_i sin\tau(x-x_i)+d_i cos\tau(x-x_i), i = 0, 1, 2, ..., n \quad (1.16)$$

şeklinde yazılır. Burada a_i, b_i, c_i ve d_i sabitler ve τ keyfli bir parameterdir.



Şekil 1.2: Non-polynomial kübik spline fonksiyonları

$$S_i(x_i) = u_i, S_i(x_{i+1}) = u_{i+1}, S''(x_i) = M_i, S''(x_{i+1}) = M_{i+1} \quad (1.17)$$

eşitlikleri kullanılarak bu sabitler $u_i, u_{i+1}, M_i, M_{i+1}$ cinsinden bulanabilir.

$$S_i(x_i) = a_i + d_i = u_i \quad (1.18)$$

$$S_i(x_{i+1}) = a_i + b_i h + c_i sin\theta + d_i cos\theta = u_{i+1} \quad (1.19)$$

$$S_i'(x) = b_i + \tau c_i cos\tau(x - x_i) - \tau d_i sin\tau(x - x_i) \quad (1.20)$$

$$S_i''(x) = -\tau^2 c_i sin\tau(x - x_i) - \tau^2 d_i cos\tau(x - x_i) \quad (1.21)$$

$$S_i''(x_i) = -\tau^2 d_i = M_i \implies d_i = -\left(\frac{M_i}{\tau^2}\right) \quad (1.22)$$

$$S_i''(x_{i+1}) = -\tau^2(c_i sin\theta - d_i cos\theta) = M_{i+1} \quad (1.23)$$

(1.18) de (1.22) ve (1.23) de (1.22) yazılırsa

$$a_i = u_i + \left(\frac{M_i}{\tau^2}\right) \tag{1.24}$$

$$c_i = \left(\frac{M_i cos\theta - M_{i+1}}{\tau^2 son\theta}\right) \tag{1.25}$$

eşitlikleri elde edilir.

(1.22),(1.24) ve (1.25) (1.19) da yerine yazılırsa

$$b_i = \left(\frac{u_{i+1} - u_i}{h}\right) + \left(\frac{M_{i+1} - M_i}{\tau\theta}\right), (\theta = \tau h) \tag{1.26}$$

eşitliği elde edilir. (x_i, u_i) noktasında birinci türevin sürekliği , yani $S'_{i-1}(x_i) = S'_i(x_i), (i = 1, 2, 3, ..., n-1)$ eşitliği kullanılarak.

$$\alpha M_{i+1} + 2\beta M_i + \alpha M_{i-1} = \left(\frac{1}{h^2}\right)(u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}) \tag{1.27}$$

bağıntısı elde edilir. Burada , $\alpha = \left(\frac{-1}{\theta^2}\right) + \left(\frac{1}{\theta sin\theta}\right)$, $\beta = \left(\frac{1}{\theta^2}\right) - \left(\frac{cos\theta}{\theta sin\theta}\right)$, ve $\theta = \tau h.$ dır[22].

1.10. B-Spline Metodu

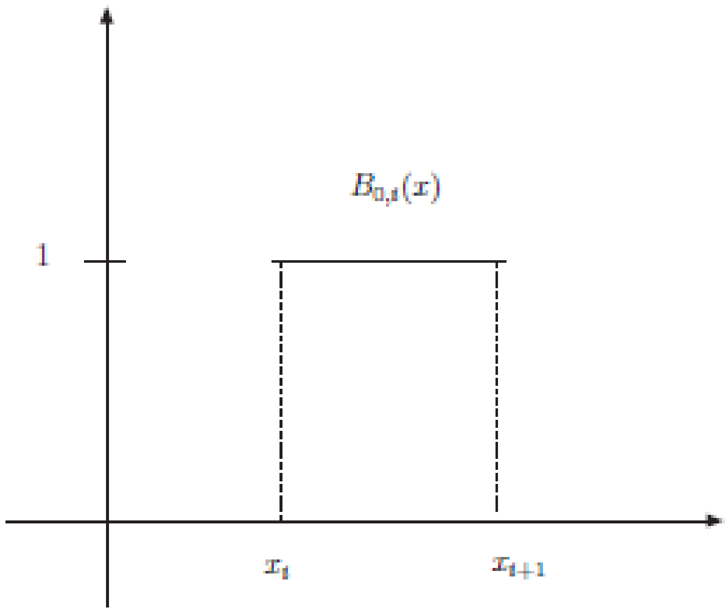
Isaac Jacob Schoenberg tarafından bulunmuştur ve splineların bazı fonksiyonlar olarak kullanılmasından dolayı (basis spline) ın kısaltlmışı olarak B-spline denmiştir. Enterpolasyon teorisi, özellikle kimyasal reaktör teori, aerodinamik, kuantum mekaniği, optimal kontrol, difüzyon işlemi ve geofizik gibi mühendisliğin bir çok alanında çok öneme sahiptir. Bu teoride B-spline ın kullanılma nedenleri: i. karmaşık bir fonksiyonu daha basit bir polinomun lineer kombinasyonua dönüştürebilir. ii. polinom enterpolasyonu,türevinin kolay alınması ve köklerinin kolay bulunabilmesinden dolayı pratikte kullanılan metodların en iyilerinden biridir. iii. B-spline polinomu, her bir parçası, kolayca oluşturulabilen ve birbirlerine tek tek düzgün bir şekilde bağlanmış düşük dereceli bir polinomdur. iv. Sınır koşullarının kullanılmasından dolayı B-spline fonksiyonları, yaklaşım teorisinde çok aktif rol alırlar.

Belli bir tanım aralığı üzerinde tanımlanmış keyfi dereceden her spline fonksiyonu, aynı derece ve tanım aralığı üzerinde B-spline fonksiyonlarnn bir lineer

kombinasyonu olarak gösterilebilir.Aynı zamanda söz konusu bu eğriler,spline yaklaşımı ile tutarlıdır yani düğüm noktalarında derceseninden daha küçük mertebeden türevleri süreklidir. $[a, b] \subset R$ sonlu bir aralık ve $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ ler düğüm noktaları olmak üzere $\Omega_n = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}, [a, b]$ nin bir parçalanışı olsun. $B_{k,i}(x), (i \in Z)$ k. mertebeden bir B-spline olsun.Bu durumda;
i. $SuppB_{i,K} = [x_i, x_{i+1}]$
ii. $B_{i,K}0, \quad her \quad x \in R$ için
iii. $\sum\limits_{-\infty}^{+\infty} B_{i,K} = 1 \quad her \quad x \in R$ için dır[7-8].

Örneğin 0. dereceden B-spline tabanı

$$B_{0,i} = \begin{cases} 1 \ , & x \in [x_i, x_{i+1}] \\ 0 \ , & \text{diğer durumlar} \end{cases} \tag{1.28}$$



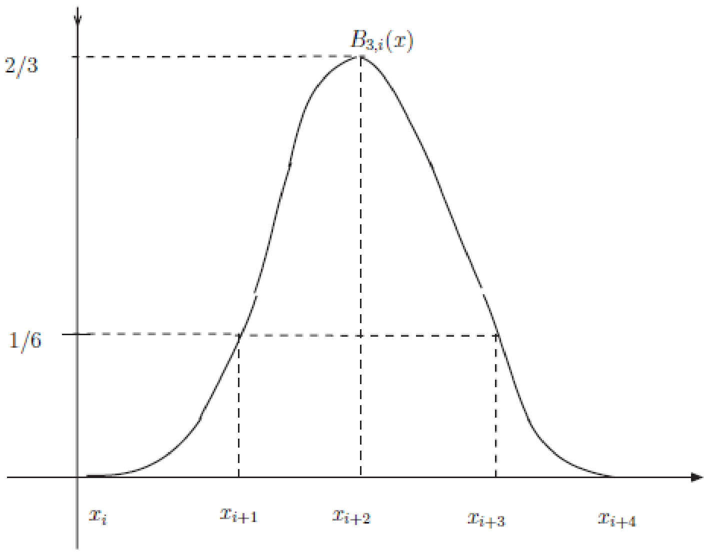
Şekil 1.3: $B_{0,i}$ tabanı

şekline tanımlanmıştır. k>0 mertebeli B-spline tabanları ise, De Boor tarafından tanımlanan aşağıdaki De Boor rekürsiyon formülünden belirlenebilir:

$$B_{k,i}(x) = \frac{x - x_i}{x_{i+k} - x_i} B_{k-1,i}(x) + \frac{x_{i+k+1} - x}{x_{i+k+1} - x_{i+1}} B_{k-1,i+1}(x) \tag{1.29}$$

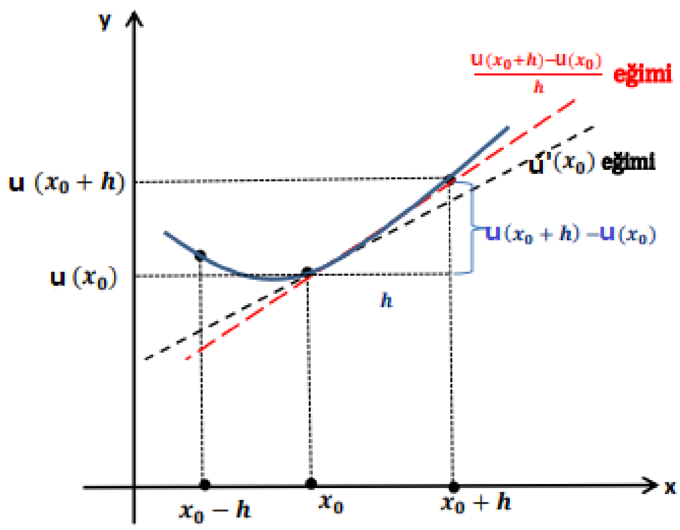
Bu halde (1.28) ve (1.29) rekürsiyoundan üçüncü dereceden B-spline tabanları oluşturabilir:

$$B_{3,i}(x) = \frac{1}{6h^3} \begin{cases} (x - x_i)^3 \ , & x \in [x_i, x_{i+1}] \\ h^3 + 3h^2(x - x_{i+1}) + 3h(x - x_{i+1})^2 - 3(x - x_{i+1})^3 \ , & x \in [x_{i+1}, x_{i+2}] \\ h^3 + 3h^2(x_{i+3} - x) + 3h(x_{i+3} - x)^2 - 3(x_{i+3} - x)^3 \ , & x \in [x_{i+2}, x_{i+3}] \\ (x_{i+3} - 3)^2 \ , & x \in [x_{i+3}, x_{i+4}] \\ 0 \ , & \text{diğer durumlar} \end{cases} \tag{1.30}$$



Şekil 1.4: $B_{3,i}(x)$ tabanı

1.11. Sonlu farklar yönetimi



Şekil 1.5: Türev tanımı

$$u'(x) = \frac{du(x)}{dx} = \lim_{x_2-x_1\to 0} \frac{u(x_2)-u(x_1)}{x_2-x_1}$$

Sonlu faklar metodunu temeli, bir diferensiyel denklemin tanım aralığı, sonlu sayıda bölünme noktalarında ayrılarak, her bir bölünme noktasındaki türev değerleri yerine, sonlu farklar yaklaşımlarının yazılması olarak özetlenebilir. Böylece diferensiyel denklem bir cebirsel denkleme dönüşür.

Bir değişken içeren ifadeler için sonlu fark yaklaşımları,Taylor serisi yardımıyla elde edilir.

$[a, b]$ tanım aralığı için, N bir pozitif tamsayı, $h = \dfrac{b-a}{N}$ ve parçalanma noktaları

$$x_i = a + ih, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, N \tag{1.31}$$

olsun.Bu durumda, U(x) fonksiyonu ve türevleri tanım aralığı üzerinde sürekli olmak üzere, $U(x_i + h)$ ve $U(x_i - h)$ ifadelerinin x_i nokatasındaki Taylor seri açılımları

$$U(x_i + h) = U(x_i) + hU_x(x_i) + \frac{h^2}{2!}U_{xx}(x_i) + \frac{h^3}{3!}U_{xxx}(x_i), \ldots \tag{1.32}$$

$$U(x_i - h) = U(x_i) - hU_x(x_i) + \frac{h^2}{2!}U_{xx}(x_i) - \frac{h^3}{3!}U_{xxx}(x_i), \ldots \tag{1.33}$$

olarak bulunabilir. Sırasıyla , (1.32 - 1.33) eşitlikleri

$$U_x(x_i) = \frac{U(x_i + h) - U(x_i)}{h} + O(h) = \frac{U_{i+1} - U_i}{h} + O(h), \tag{1.34}$$

$$U_x(x_i) = \frac{U(x_i) - U(x_i - h)}{h} + O(h) = \frac{U_i - U_{i-1}}{h} + O(h), \tag{1.35}$$

formunda yaklaşık olarak bulunabilir. (1.34),(1.35) ile bulunan yaklaşımlar sırasıyla ileri ve geri olarak adlandırılır. Her iki yaklaşımda da görüldüğü gibi, seri belli bir yerden kesilmiştir. Dolayısıyla bu kesme işlemi sebebiyle bir hata oluşacaktır. Oluşan hatalar, serinin kesildiği yerden sonraki ilk terime göre değerlendirilir ve O(h) ile gösterilir.

Eğer (1.35) eşitliği, (1.34) eşitliğinden çıkarılır ve düzenlenirse

$$U_x(x_i) = \frac{U(x_i + h) - U(x_i - h)}{2h} + O(h^2)$$

$$\mathrm{U}_x(x_i) = \frac{U(x_{i+1}) - U(x_{i-1})}{2h} + O(h^2) \tag{1.36}$$

formunda birinci türev için merkezi fark yaklaşımı da bulunabilir. Ayrıca (1.34) ve (1.35) eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa

$$U_{xx}(x_i) = \frac{U(x_i+h) - 2U(x_i) + U(x_i-h)}{h^2} + O(h^2)$$

$$\mathrm{U}_{xx}(x_i) = \frac{U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1}}{h^2} + O(h^2) \tag{1.37}$$

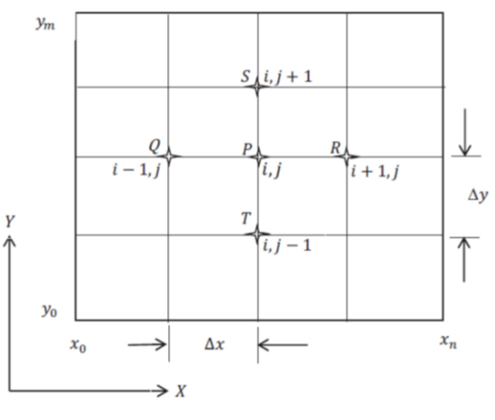
formunda ikinci türev için sonlu fark yaklaşımı da bulunabilir.
Benzer şekilde, iki değişkenli fonksiyonlar için sonlu fark yaklaşımları da Taylor serisi kullanılarak bulunabilir. N,M pozitif tamsayılar, $a \leqslant x \leqslant b$, $a' \leqslant y \leqslant b'$, $h = \dfrac{b-a}{h}$, $\dfrac{b'-a'}{M}$ ve parçalanma noktaları
$x_i = a + ih, \quad i = 0, 1, \ldots, N$ ve $y_i = a' + jk, \quad j = 0, 1, \ldots, M$
olsun. Bu durumda x ve y değişkenlerine göre birinci türev için ileri , geri ve merkezi sonlu fark yaklaşımları sırasıyla

$$U_x(x_i, y_i) = \frac{U_{i+1,j} - U_{i,j}}{h} + O(h), \tag{1.38}$$

$$U_x(x_i, y_i) = \frac{U_{i,j} - U_{i-1,j}}{h} + O(h), \tag{1.39}$$

$$U_x(x_i, y_i) = \frac{U_{i+1,j} - U_{i-1,j}}{2h} + O(h^2), \tag{1.40}$$

elde edebilir.



Şekil 1.6: Düğümlerin tablo şeklinde gösterimi

2. KÜBİK SPLİNE VE SONLU FARK METODU

2.1. Problem 1.

$$u''(x) + xu(x) + xv(x) = f_1(x), \tag{2.1}$$

$$v''(x) + 2xv(x) + 2xu(x) = f_2(x). \tag{2.2}$$

$f_1(x) = 2$ ve $f_2(x) = -2$ olmak üzere 0<x<1 başlangıç koşulları ve u(0)=u(1)=0 , v(0)=v(1)=0 sınır koşulları ile verilen sistemi ele alalım, Bu problemi önce Sonlu Farklar ile sonra Kübik Spline ile çözelim[23-24-25].

2.1.1. Sonlu fark metodu(FDM) çözümü:

$$u'(x) = \left(\frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h}\right) \qquad v'(x) = \left(\frac{v_{i+1} - v_{i-1}}{2h}\right) \tag{2.3}$$

$$u''(x) = \left(\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2}\right) \qquad v''(x) = \left(\frac{v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1}}{h^2}\right) \tag{2.4}$$

(2.1)'de (2.3) ve (2.4) formülleri yazılırsa

$$\left(\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2}\right) + x_i u_i + x_i v_i = 2 \tag{2.5}$$

elde edilir , buradan

$$\frac{1}{h^2}u_{i+1} + (x_i - \frac{2}{h^2})u_i + \frac{1}{h^2}u_{i-1} + x_i v_i = 2 \tag{2.6}$$

elde edilir.
$A_i = \dfrac{1}{h^2}$, $B_i = x_i - \dfrac{2}{h^2}$, $C_i = \dfrac{1}{h^2}$.

olmak üzere aşağıdakı matrisler elde edilmiş olur:

$$K_1 = \begin{bmatrix} B_1 & A_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ C_2 & B_2 & A_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_3 & B_3 & A_3 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & C_{n-2} & B_{n-2} & A_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & C_{n-1} & B_{n-1} \end{bmatrix} \tag{2.7}$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} x_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_2 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & x_{n-1} \end{bmatrix} \tag{2.8}$$

(2.2)'de (2.3) ve (2.4) formülleri yazılırsa

$$\left(\frac{v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1}}{h^2}\right) + 2x_i v_i + 2x_i u_i = -2 \tag{2.9}$$

elde edilir ve buradan aşağıdaki lineer denklemi yazılır:

$$\frac{1}{h^2} v_{i+1} + (2x_i - \frac{2}{h^2}) v_i + \frac{1}{h^2} v_{i-1} + 2x_i u_i = -2 \tag{2.10}$$

$D_i = \dfrac{1}{h^2},\ E_i = 2x_i - \dfrac{2}{h^2}\ \ , F_i = \dfrac{1}{h^2}$. olarak alınırsa
aşağıdakı matrisler elde edilir:

$$K_3 = \begin{bmatrix} 2x_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2x_2 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2x_3 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 2x_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 2x_{n-1} \end{bmatrix} \tag{2.11}$$

$$\mathrm{K}_4=\begin{bmatrix} E_1 & D_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ F_2 & E_2 & D_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & F_3 & E_3 & D_3 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & F_{n-2} & E_{n-2} & D_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & F_{n-1} & E_{n-1} \end{bmatrix} \tag{2.12}$$

(2.7) ,(2.8) , (2.11) ve (2.12) matrisleri kullanılarak aşağıdaki matris elde edilir:

$$\mathrm{K}=\begin{bmatrix} \mathrm{K}_1 & \mathrm{K}_2 \\ \mathrm{K}_3 & \mathrm{K}_4 \end{bmatrix} \tag{2.13}$$

K katsayılar matrisinde üçgensellik ve köşegensellik özelliği vardır. Bundan dolayı tersi vardır. Tek çözüme sahip olur.
ve U matrisi olarak aşağıdaki matris yazılır:

$$U = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_{n-1} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_{n-1} \end{bmatrix} \tag{2.14}$$

$f_1(x)$ ve $f_2(x)$ kullanalarak aşağıdaki matris yazılır:

$$F = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ \vdots \\ 2 \\ -2 \\ -2 \\ -2 \\ \vdots \\ -2 \end{bmatrix} \tag{2.15}$$

Buradan sistem matris formunda

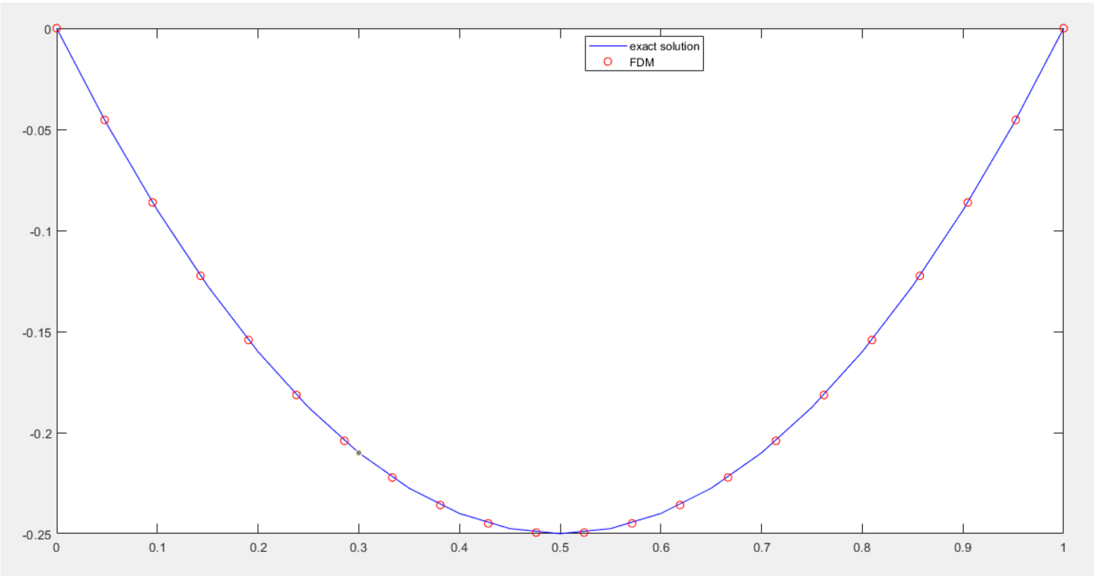
$$K.U = F \tag{2.16}$$

yazılır. Bilinmeyenler sisteminin çözümünden

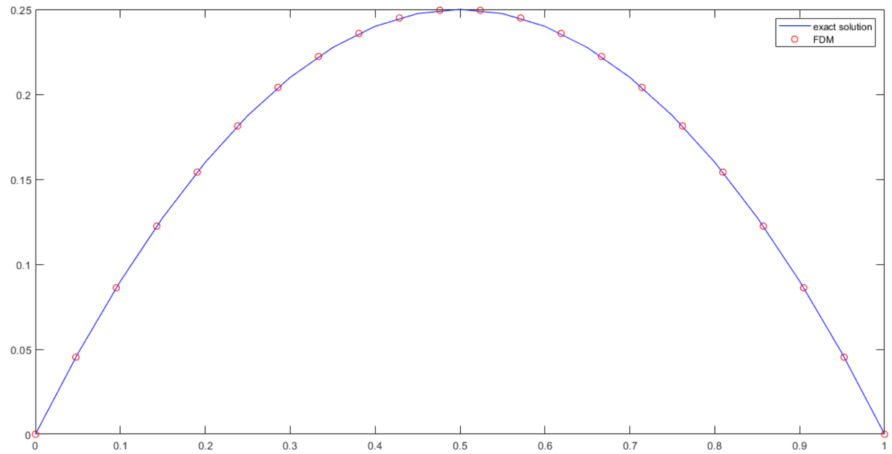
$$U = K^{-1}F \tag{2.17}$$

şekilde elde edilir.

Matlab 9.9.0 program yardımıyla KU=F denklem sisteminin çözümünüden U yaklaşık sonucu elde edilir:



Şekil 2.1: Problem 1 (sonlu fark metodu) FDM ile u(x)=$x^2 - x$ için



Şekil 2.2: Problem 1 (sonlu fark metodu)FDM ile v(x)=$x - x^2$ için

2.1.2. Kübik spline çözümü:

u”(x)+x u(x)+x v(x)=2
diferansiyel denkleminde $u_i'' = M_i$ yazılırsa

$$M_i = 2 - x_i u_i - x_i v_i \tag{2.18}$$

eşitliği elde edlilir. Buradan

$$M_{i+1} = 2 - x_{i+1} u_{i+1} - x_{i+1} v_{i+1} \tag{2.19}$$

$$M_{i-1} = 2 - x_{i-1} u_{i-1} - x_{i-1} v_{i-1} \tag{2.20}$$

eşitlikleri elde edilir. Bu eşitlikler

$$\alpha M_{i+1} + 2\beta M_i + \alpha M_{i-1} = (\frac{1}{h^2})(u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}) \tag{2.21}$$

eşitliğinde yerine konursa aşağıdaki lineer denklemler sistemi elde edilmiş olur:

$$\begin{aligned}(-\alpha x_{i+1} - \frac{1}{h^2})u_{i+1} + (-2\beta x_i + \frac{2}{h^2})u_i + (-\alpha x_{i-1} - \frac{1}{h^2})u_{i-1} \\ + (-\alpha x_{i+1})v_{i+1} + (-2\beta x_i)v_i + (-\alpha x_{i-1})v_{i-1} = -4\alpha - 4\beta\end{aligned} \tag{2.22}$$

$A_i = -\alpha x_{i+1} - \frac{1}{h^2}$, $B_i = -2\beta x_i + \frac{2}{h^2}$, $C_i = -\alpha x_{i-1} - \frac{1}{h^2}$
$D_i = -\alpha x_{i+1}$, $E_i = -2\beta x_i$, $F_i = -\alpha x_{i-1}$
alınsın. Bu sistemden doğan katsayılar mastrisleri aşağıdaki şekilde

$$K_1 = \begin{bmatrix} B_1 & A_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ C_2 & B_2 & A_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_3 & B_3 & A_3 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & C_{n-2} & B_{n-2} & A_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & C_{n-1} & B_{n-1} \end{bmatrix} \tag{2.23}$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} E_1 & D_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ F_2 & E_2 & D_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & F_3 & E_3 & D_3 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & F_{n-2} & E_{n-2} & D_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & F_{n-1} & E_{n-1} \end{bmatrix} \tag{2.24}$$

elde edilir.

$$v''(x) + 2xv(x) + 2xu(x) = -2$$

diferansiyel denkleminde $v''(x) = N_i$ yazılırsa

$$N_i = -2 - 2x_i u_i - 2x_i v_i \tag{2.25}$$

denklemi elde edlilir. Benzer şekilde

$$N_{i+1} = -2 - 2x_{i+1}u_{i+1} - x_2 i + 1v_{i+1} \tag{2.26}$$

$$N_{i-1} = -2 - 2x_{i-1}u_{i-1} - 2x_{i-1}v_{i-1} \tag{2.27}$$

eşitlikleri elde edilir. (2.25) , (2.26) ve (2.27) eşitlikleri (2.28)'de yerine yazılırsa

$$\alpha N_{i+1} + 2\beta N_i + \alpha N_{i-1} = (\frac{1}{h^2})(u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}) \tag{2.28}$$

aşağıdaki lineer denklemler sistemi elde edilmiş olur:

$$\begin{aligned} &(-2\alpha x_{i+1})u_{i+1} + (-4\beta x_i)u_i + (-2\alpha x_{i-1)} u_{i-1} \\ &+ (-2\alpha x_{i+1} - \frac{1}{h^2})v_{i+1} + (-4\beta x_i + \frac{2}{h^2})v_i + (-2\alpha x_{i-1} - \frac{1}{h^2})v_{i-1} = 4\alpha + 4\beta \end{aligned} \tag{2.29}$$

$G_i = -2\alpha x_{i+1}$,
$H_i = -4\beta x_i$,
$I_i = -2\alpha x_{i-1)}$,
$J_i = -2\alpha x_{i+1} - \frac{1}{h^2}$,
$L_i = -4\beta x_i + \frac{2}{h^2}$,
$R_i = -2\alpha x_{i-1} - \frac{1}{h^2}$
yazılsın. Bu sistemden doğan katsayılar mastrisleri aşağıdaki şekilde

$$K_3 = \begin{bmatrix} H_1 & G_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ I_2 & H_2 & G_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_3 & H_3 & G_3 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & I_{n-2} & H_{n-2} & G_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & I_{n-1} & H_{n-1} \end{bmatrix} \tag{2.30}$$

$$K_4 = \begin{bmatrix} L_1 & J_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ R_2 & L_2 & J_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_3 & L_3 & J_3 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & R_{n-2} & L_{n-2} & J_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & R_{n-1} & L_{n-1} \end{bmatrix} \tag{2.31}$$

yazılır. (2.23) ,(2.24) , (2.30) ve (2.31) matrisleri kullanalarak aşağıdaki matris elde edilir:

$$K = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \\ K_3 & K_4 \end{bmatrix} \tag{2.32}$$

ve U matrisi olarak aşağıdaki matris bulunur:

$$U = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_{n-1} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_{n-1} \end{bmatrix} \tag{2.33}$$

$f_1(x)$ ve $f_2(x)$ kullanarak aşağıdaki matrisi oluşturabiliriz:

$$F = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ \vdots \\ 2 \\ -2 \\ -2 \\ -2 \\ \vdots \\ -2 \end{bmatrix} \tag{2.34}$$

Dolayısıyla

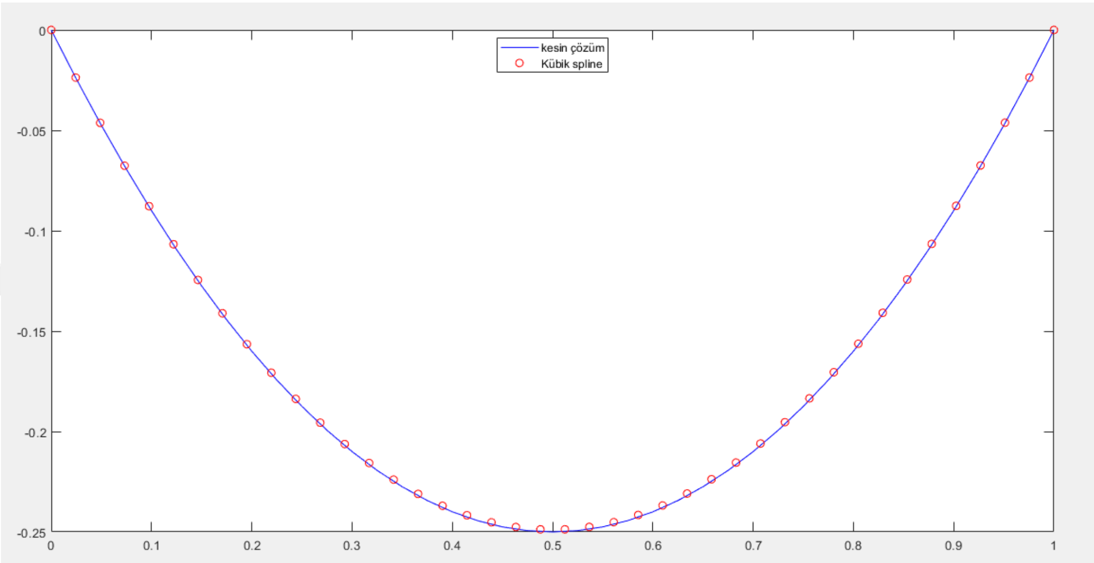
$$K.U = F \tag{2.35}$$

denklem sisteminin çözümünden

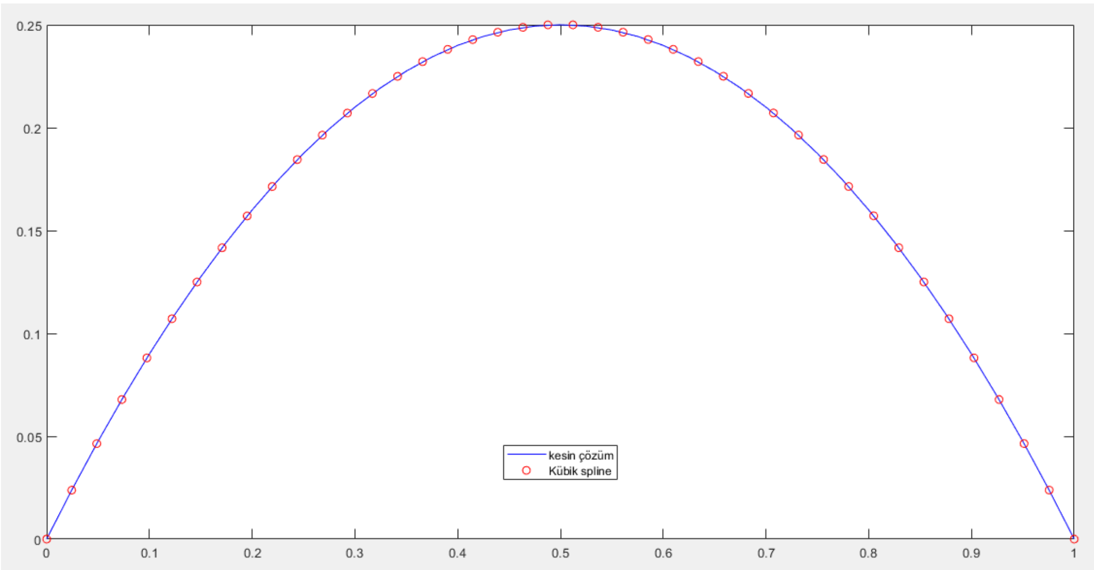
$$U = K^{-1}F \tag{2.36}$$

elde edilir.

Matlab 9.9.0 program yardımıyla KU=F denklem sisteminin çözümünden U yaklaşık sonucu elde edilir:



Şekil 2.3: Problem 1 kübik spline ile u(x)=$x^2 - x$ için



Şekil 2.4: Problem 1 kübik spline ile v(x)=$x - x^2$ için

Problem 1 sonlu fark metodu maksimum mutlak hatası

Sonlu Farklar hata tablosu		
n	u maksimum mutlak hatası	v maksimum mutlak hatası
21	0.0454	0.0454
41	0.0238	0.0238
121	0.0082	0.0082

Problem 1 kübik spline metodu maksimum mutlak hatası

Kübik Spline hata tablosu		
n	u maksimum mutlak hatası	v maksimum mutlak hatası
21	0.0498	0.0500
41	0.0249	0.0250
121	0.0083	0.0083

2.2. Problem 2

$$u''(x) + (2x-1)u'(x) + cos(\pi x)v'(x) = f_1(x), \tag{2.37}$$

$$v''(x) + xu(x) = f_2(x). \tag{2.38}$$

$f_1(x) = -\pi^2 sin(\pi x) + (2x-1)\pi cos(\pi x) + (2x-1)cos(\pi x)$ ve $f_2(x) = 2 + xsin(\pi x)$ olmak üzere 0<x<1 başlangıç koşulları ve u(0)=u(1)=0 , v(0)=v(1)=0 sınır koşulları ile verilen sistemi ele alalım,
Bu problemi önce Sonlu Farklar ile sonra Kübik Spline ile çözelim[23-24-25].

2.2.1. Sonlu fark metodu(FDM) çözümü

(2.37)'de (2.3) ve (2.4) formülleri yazılırsa

$$\frac{1}{h^2}u_{i+1} - \frac{2}{h^2}u_i + \frac{1}{h^2}u_{i-1} + \frac{2x-1}{2h}u_{i+1} - \frac{2x-1}{2h}u_{i-1} + \frac{cos(\pi x)}{2h}v_{i+1} - \frac{cos(\pi x)}{2h}v_{i-1} = f_1(x) \tag{2.39}$$

elde edilir , (2.39) denklemi düzenlenirse

$$(\frac{1}{h^2} + \frac{2x-1}{2h})u_{i+1} + (-\frac{2}{h^2})u_i + (\frac{1}{h^2} - \frac{2x-1}{2h})u_{i-1} + \frac{cos(\pi x)}{2h}v_{i+1} - (\frac{cos(\pi x)}{2h})v_{i-1} = f_1(x) \tag{2.40}$$

elde edilir.Burada

$$A_i = \frac{1}{h^2} + \frac{2x-1}{2h} \ ,$$
$$B_i = -\frac{2}{h^2} \ ,$$
$$C_i = -\frac{1}{h^2} - \frac{2x-1}{2h}$$
$$D_i = \frac{cos(\pi x)}{2h},$$
$$F_i = -\frac{cos(\pi x)}{2h}$$

olmak üzere aşağıdakı matrisler elde edilmiş olur:

$$K_1 = \begin{bmatrix} B_1 & A_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ C_2 & B_2 & A_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_3 & B_3 & A_3 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & C_{n-2} & B_{n-2} & A_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & C_{n-1} & B_{n-1} \end{bmatrix} \tag{2.41}$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} 0 & D_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ F_2 & 0 & D_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & F_3 & 0 & D_3 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & F_{n-2} & 0 & D_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & F_{n-1} & 0 \end{bmatrix} \tag{2.42}$$

(2.38)'de (2.3) ve (2.4) formülleri yazılırsa

$$\frac{1}{h^2}v_{i+1} - \frac{2}{h^2}v_i + \frac{1}{h^2}v_{i-1} + x_i u_i = f_2(x) \tag{2.43}$$

elde edilir. aşağıdaki lineer denklemi yazılır:

$$G_i = x_i \, , H_i = \frac{-2}{h^2} \, , I_i = \frac{1}{h^2} \, , J_i = \frac{1}{h^2},$$
olarak alınırsa aşağıdakı matrisler elde edilir:

$$K_3 = \begin{bmatrix} G_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & G_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_3 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & & G_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & G_{n-1} \end{bmatrix} \tag{2.44}$$

$$K_4 = \begin{bmatrix} H_1 & I_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ J_2 & H_2 & I_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_3 & H_3 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & J_{n-2} & H_{n-2} & I_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & J_{n-1} & H_{n-1} \end{bmatrix} \tag{2.45}$$

(2.41) ,(2.42) , (2.44) ve (2.45) matrisleri konularak aşağıdaki matris elde edilir:

$$K = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \\ K_3 & K_4 \end{bmatrix} \tag{2.46}$$

ve U matrisi olarak aşağıdaki matris bulunur:

$$U = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_{n-1} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_{n-1} \end{bmatrix} \tag{2.47}$$

$f_1(x)$ ve $f_2(x)$ yi kullanalarak aşağıdaki matrisi oluşturabiliriz:

$$F = \begin{bmatrix} f_1(x_1) \\ f_1(x_2) \\ f_1(x_3) \\ \vdots \\ f_1(x_{n-1}) \\ f_2(x_1) \\ f_2(x_2) \\ f_2(x_3) \\ \vdots \\ f_2(x_{n-1}) \end{bmatrix} \tag{2.48}$$

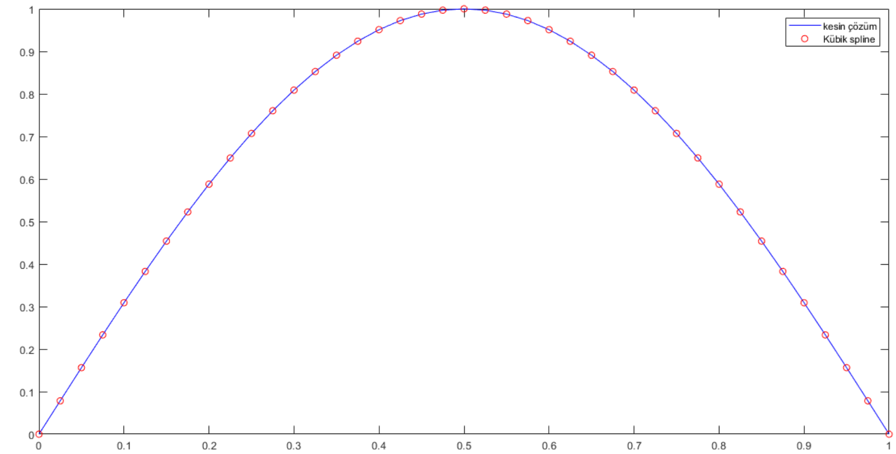
Buradan sistem matris formunda

$$K.U = F \tag{2.49}$$

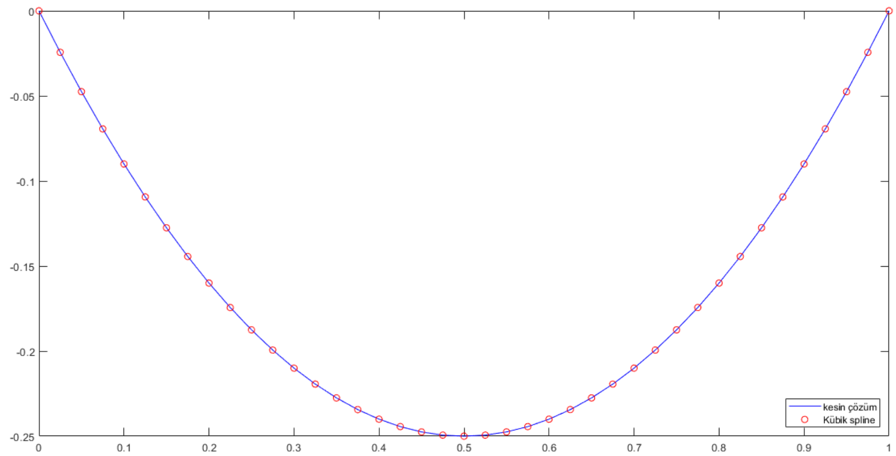
yazılır. Bilinmeyenler sisteminin çözümünden

$$U = K^{-1}F \tag{2.50}$$

elde edilir. Matlab 9.9.0 program yardımıyla KU=F denklem sisteminin çözümünden U yaklaşık çözümü elde edilir



Şekil 2.5: Problem 2 sonlu fark metodu(FDM) ile v(x)=$sin(\pi x)$ için



Şekil 2.6: Problem 2 sonlu fark metodu(FDM) ile v(x)=$x^2 - x$ için

2.2.2. Kübik spline çözümü:

(2.37) denklemi alalım:

$u''(x) + xu(x) + xv(x) = f_1(x)$

$\mathrm{f}_1(x) = -\pi^2 sin(\pi x) + (2x-1)\pi cos(\pi x) + (2x-1)cos(\pi x)$

Bu denkleminde $u_i'' = M_i$ yazılırsa

$$M_i = f_1(x_i) - (2x_i - 1)(\frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h}) - cos(\pi x_i)(\frac{v_{i+1} - v_{i-1}}{2h}) \quad (2.51)$$

eşitliği elde edlilir. Benzer şekilde

$$\begin{aligned} M_{i+1} = f_1(x_{i+1}) - (2x_{i+1} - 1)(\frac{3u_{i+1} - 4u_i + u_{i-1}}{2h}) \\ - cos(\pi x_{i+1})(\frac{3v_{i+1} - 4v_i + v_{i-1}}{2h}) \end{aligned} \quad (2.52)$$

$$\begin{aligned} M_{i-1} = f_1(x_{i-1}) - (2x_{i+1} - 1)(\frac{-u_{i+1} + 4u_i - 3u_{i-1}}{2h}) \\ - cos(\pi x_{i+1})(\frac{-v_{i+1} + 4v_i - 3v_{i-1}}{2h}) \end{aligned} \quad (2.53)$$

eşitlikleri elde edilir. Bu eşitlikler

$$\alpha M_{i+1} + 2\beta M_i + \alpha M_{i-1} = (\frac{1}{h^2})(u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}) \quad (2.54)$$

de yerine konursa aşağıdaki lineer denklemler sistemi elde edilmiş olur:

$$\begin{aligned} &(\frac{-3\alpha(2x_{i+1}-1)}{2h} - \frac{\beta(2x_i-1)}{h} + \frac{\alpha(2x_{i-1})}{2h} - \frac{1}{h^2})u_{i+1} \\ &+ (\frac{2\alpha(2x_{i+1}-1)}{h} - \frac{-2\alpha(2x_{i-1}-1)}{h} + \frac{1}{h^2})u_i \\ &+ (\frac{\beta(2x_i-1)}{h} + \frac{3\alpha(2x_{i-1}-1)}{2h} - \frac{\alpha(2x_{i+1}-1)}{2h} - \frac{1}{h^2})u_{i-1} \\ &+ (\frac{-3\alpha cos(\pi x_{i+1})}{2h} - \frac{\beta cos(\pi x_i)}{h} + \frac{\alpha cos(\pi x_{i-1})}{2h})v_{i+1} \\ &+(\frac{2\alpha cos(\pi x_{i+1})}{h} - \frac{2\alpha cos(\pi x_{i-1})}{h})v_i + (\frac{-\alpha cos(\pi x_{i+1})}{2h} + \frac{\beta cos(\pi x_i)}{h} + \frac{3\alpha cos(\pi x_{i-1})}{2h})v_{i-1} \\ &= \alpha\pi^2 sin(\pi x_{i+1}) + +2\beta\pi^2 sin(\pi x_i) + \alpha\pi^2 sin(\pi x_{i-1}) \\ &-(1+\pi)(\alpha(2x_{i+1}-1)cos(\pi x_{i+1}) + +2\beta(2x_i-1)cos(\pi x_i) + \alpha(2x_{i-1}-1)cos(\pi x_{i-1}) \end{aligned} \quad (2.55)$$

$$
\begin{aligned}
A_i &= \frac{-3\alpha(2x_{i+1}-1)}{2h} - \frac{\beta(2x_i-1)}{h} + \frac{\alpha(2x_{i-1})}{2h} - \frac{1}{h^2}\,, \\
B_i &= \frac{2\alpha(2x_{i+1}-1)}{h} - \frac{-2\alpha(2x_{i-1}-1)}{h} + \frac{1}{h^2}\,, \\
C_i &= \frac{\beta(2x_i-1)}{h} + \frac{3\alpha(2x_{i-1}-1)}{2h} - \frac{\alpha(2x_{i+1}-1)}{2h} - \frac{1}{h^2} \\
D_i &= \frac{-3\alpha cos(\pi x_{i+1})}{2h} - \frac{\beta cos(\pi x_i)}{h} + \frac{\alpha cos(\pi x_{i-1})}{2h}, \\
E_i &= \frac{2\alpha cos(\pi x_{i+1})}{h} - \frac{2\alpha cos(\pi x_{i-1})}{h} \\
F_i &= \frac{-\alpha cos(\pi x_{i+1})}{2h} + \frac{\beta cos(\pi x_i)}{h} + \frac{3\alpha cos(\pi x_{i-1})}{2h} \\
Z_i &= \alpha\pi^2 sin(\pi x_{i+1}) + +2\beta\pi^2 sin(\pi x_i) + \alpha\pi^2 sin(\pi x_{i-1}) \\
&- (1+\pi)(\alpha(2x_{i+1}-1)cos(\pi x_{i+1}) + +2\beta(2x_i-1)cos(\pi x_i) + \alpha(2x_{i-1}-1)cos(\pi x_{i-1})
\end{aligned}
$$

yazılırsa aşağıdakı matrisler elde edilmiş olur:

$$
K_1 = \begin{bmatrix}
B_1 & A_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
C_2 & B_2 & A_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
0 & C_3 & B_3 & A_3 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & & & & & & & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & C_{n-2} & B_{n-2} & A_{n-2} \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & C_{n-1} & B_{n-1}
\end{bmatrix} \tag{2.56}
$$

$$
K_2 = \begin{bmatrix}
E_1 & D_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
F_2 & E_2 & D_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
0 & F_3 & E_3 & D_3 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & & & & & & & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & F_{n-2} & E_{n-2} & D_{n-2} \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & F_{n-1} & E_{n-1}
\end{bmatrix} \tag{2.57}
$$

$$v''(x) + xu(x) = f_2(x)$$

$$f_2(x) = 2 + xsin(\pi x)$$

diferansiyel denkleminde $v''(x) = N_i$ yazılırsa

$$N_i = f_2(x_i) - x_i u_i \tag{2.58}$$

denklemi elde edlilir. Benzer şekilde

$$N_{i+1} = f_2(x_{i+1}) - x_{i+1}u_{i+1} \tag{2.59}$$

$$N_{i-1} = f_2(x_{i-1}) - x_{i-1}u_{i-1} \tag{2.60}$$

eşitlikleri elde edilir. Bu eşitlikler

$$\alpha N_{i+1} + 2\beta N_i + \alpha N_{i-1} = (\frac{1}{h^2})(v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1}) \tag{2.61}$$

de yerine konursa aşağıdaki lineer denklemler sistemi elde edilmiş olur:

$$\begin{aligned} &-\alpha x_{i+1}u_{i+1} - 2\beta x_i u_i - \alpha x_{i-1}u_{i-1} - \frac{1}{h^2}v_{i+1} + \frac{2}{h^2}v_i - \frac{1}{h^2}v_{i-1} \\ &\quad = -4\alpha - 4\beta - \alpha x_{i+1}sin(\pi x_{i+1}) + -2\beta x_i sin(\pi x_i) - -\alpha x_{i-1}sin(\pi x_{i-1}) \end{aligned} \tag{2.62}$$

$$G_i = -\alpha x_{i+1}\ ,\ H_i = -2\beta x_i\ ,\ I_i = -\alpha x_{i-1}\ L_i = -\frac{1}{h^2},\ Q_i = +\frac{2}{h^2}\ R_i = -\frac{1}{h^2}$$

$$S_i = -4\alpha - 4\beta - \alpha x_{i+1}sin(\pi x_{i+1}) + -2\beta x_i sin(\pi x_i) - \alpha x_{i-1}sin(\pi x_{i-1})$$

yazılsın. Bu sistemden doğan matrisleri aşağıdaki şekilde yazabiliriz

$$K_3 = \begin{bmatrix} H_1 & G_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ I_2 & H_2 & G_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_3 & H_3 & G_3 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & I_{n-2} & H_{n-2} & G_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & I_{n-1} & H_{n-1} \end{bmatrix} \tag{2.63}$$

$$K_4 = \begin{bmatrix} Q_1 & L_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ R_2 & Q_2 & L_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_3 & Q_3 & L_3 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & R_{n-2} & Q_{n-2} & L_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & R_{n-1} & Q_{n-1} \end{bmatrix} \tag{2.64}$$

(2.56) ,(2.57) , (2.63) ve (2.64) matrisleri kullanarak aşağıdaki matris elde edilir:

$$K = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \\ k_3 & k_4 \end{bmatrix} \tag{2.65}$$

ve U matrisi olarak aşağıdaki matris bulunur:

$$U = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_{n-1} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_{n-1} \end{bmatrix} \tag{2.66}$$

$f_1(x)$ ve $f_2(x)$ yi kullanalarak aşağıdaki matrisi oluşturabiliriz:

$$F = \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \\ \vdots \\ Z_{n-1} \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ \vdots \\ S_{n-1} \end{bmatrix} \tag{2.67}$$

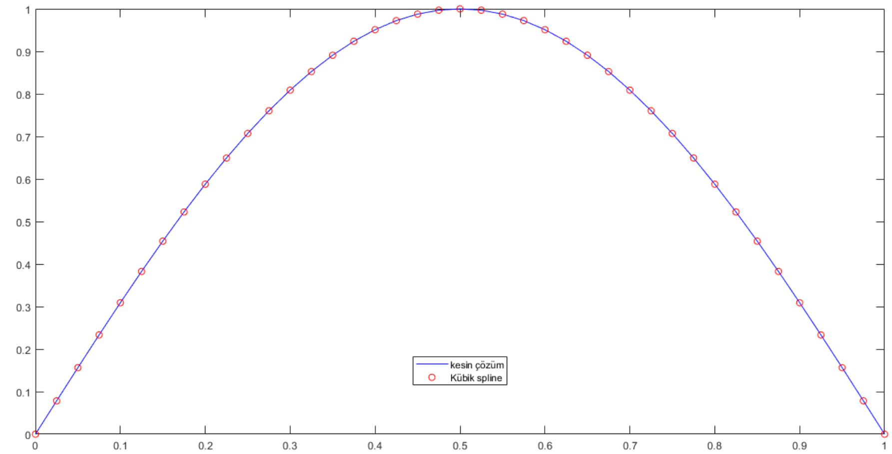
Dolayısıyla

$$K.U = F \tag{2.68}$$

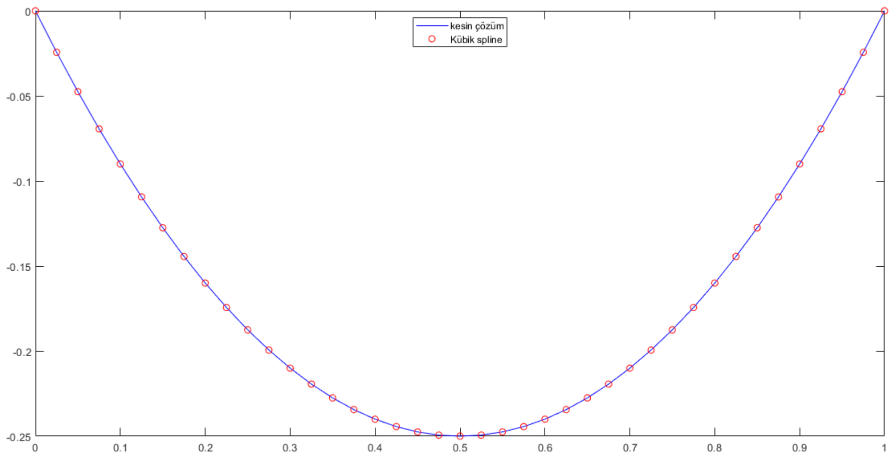
denklem sisteminin çözümünden

$$U = K^{-1}F \tag{2.69}$$

elde edilir. Matlab 9.9.0 program yardımıyla KU=F denklem sisteminin çözümünüden U yaklaşık çözümü elde edilir



Şekil 2.7: Problem 2 Kübik spline ile u(x)=$sin(\pi x)$ için



Şekil 2.8: Problem 2 Kübik spline ile v(x)=$x^2 - x$ için

Problem 2 sonlu fark metodu maksimum mutlak hatası

Sonlu Farklar hata tablosu		
n	u mutlak hatası	v mutlak hatası
21	0.00287	0.000154
41	0.00152	0.000138
121	0.00083	0.000021

Problem 2 kübik spline metodu maksimum mutlak hatası

Kübik Spline hata tablosu		
n	u mutlak hatası	v mutlak hatası
21	0.00305	0.000167
41	0.00181	0.000193
121	0.00089	0.000024

3. SONUÇ

Tez çalışmasında lineer denklem sistemleri üzerine bir araştırma yapılmıştır. B-spline yönteminin uygulandığı makale incelenmiş , makalede yer alan örneklere öncelikle sonlu fark metodu uygulanmış daha sonra da non-polynomial kübik spline metodu uygulanmıştır. Nümerik sonuçları elde etmek için Matlap kullanılmıştır. Ele alınan iki örnekte yer alan u ve v fonksiyonları için Matlap kullanılarak çözümler elde edilmistir. Nümerik çözümle gerçek çözümü karşılaştırmak için Matlap yardımıyla grafikler elde edilmiştir. Grafiklerden nümerik çözümün gerçek çözüme yakınsadığı görülmektedir. Bunun yanı sıra farklı n değerleri için sonlu fark ve non-polynomial kübik spline metodu için tablolar yapılmıştır. Tablolardan iki metodun sonuçlarının birbirine çok yakın olduğu görülmektedir. Bu çalışmadan benzer tipteki diferansiyel denklem sistemler için iki metodun da kullanılabilecek uygun metotlar olduğu sonucuna varılabilir.

4. KAYNAKLAR

[1] M. A. Ramadan, T. S. El-Danaf, F. E. I. A. Alaal, Application of the Non-Polynomial Spline Approach To The Solution of The Burgers' Equation, The Open Applied Math. J, 1 (2007) 15-20.

[2] J. Rashidinia, R. Mahmoodi, Non-polynomial Cubic Spline Methods For The Solution Of Parabolic Equations, J. Comput. Math, 85 (2008) 843-850.

[3] E. L. Albasiny, W. D. Hoskins, Cubic Spline Solution of Two Point Boundary-Value Problems, Computer J., 12 (1969) 151-153.

[4] W. G. Bickely, Piecewise cubic Interpolation and Two-Point Boundary Value Problems. Computer J., 11 (1968) 202-208.

[5] J. Crank, R. S. Gupta, A Method For Solving Moving Boundary-Value Problems In Heat Flows Using Cubic Splines or Polynomials, J. Inst. Maths. Applics. 10 (1972) 296-304.

[6] M. K. Jain, T. Aziz, Spline Function Approximation For Differential Equations, Comput. Methods Appl. Mech. Eng., 26 (1981) 129-143.

[7] M. K. Jain, T. Aziz, Cubic Spline Solution Of Two-Point Boundary Value Problem With Significant First Derivatives, Comp. Methods in App. Mech. Eng., 39 (1983) 83-91.

[8] R. A. Usmani, The Use Of Quartic Spline In The Numerical Solution Of Fourth-Order Boundary-Value Problem, J. Comput. Appl. Math, 44 (1992) 187-199.

[9] Atkinson,K.E,An İntroduction to Numerical Analysis,John Wiley sons inc.usa[1988]

[10] De Boor, C. A Practical Guide To Splines, Springer-Verlag,New York(1987)

[11] M. Kumar, P. K. Srivastava. Computational Techniques For Solving Differential Equations by Cubic, Quintic and Sextic Spline.Int. J. Comput. Methods Eng. Sci Mech.2009

[12] J. Rashidinia, R. Jalilian, K. Farajeyan. Spline Approximate Solution of Eight-order Boundary-Value Problems,J. Comput. Math, 2008.

[13] S. S. Siddiqi, G. Akram, Solution of 10th-order Boundary-Value Problems Using Non-Polynomial Spline Technique, Appl. Math. Comput, 190 (2007) 641-651.

[14] S. S. Siddiqi, G. Akram, Solutions of 12th-order Boundary-Value Problems Using Non-Polynomial Spline Technique, Appl. Math. Comput, 199 (2008) 559-571.

[15] W.K. Zahra, A Smooth Approximation Based on Exponential Spline Solutions for Non-Linear Fourth Order Two Point Boundary Value Problems, App. Math. Comp., 217 (2011) 84478457.

[16] W.K. Zahra, M.A. Ramadan, I.F. Lashien, High Order Accuracy Non-Polynomial Spline Solutions for 2th Order Two Point Boundary Value Problems, App. Math. Comp., 204 (2008) 920927.

[17] W.K. Zahra, M.A. Ramadan, I.F. Lashien, Polynomial and Non-Polynomial Spline Approaches To The Numerical Solution of Second Order Boundary Value Problems, App. Math. Comp., 184 (2007) 476 484.

[18] W.K. Zahra, M.A. Ramadan, I.F. Lashien, Quintic Non-Polynomial Spline Solutions For Fourth Order Two-Point Boundary Value Problem, Comm. Nonlin. Sci. Num. Simul., 14 (2009) 11051114.

[19] W. K. Zahra, S. M. Elkholy, The Use Of Cubic Splines In The Numerical Solution of Fractional Differential Equations, Int. J. Math. Math. Sci., 10, (2012).

[20] Y Aksoy, M Ozkan, Diferansiyel Denklemler,Yıldız Teknik ,YTÜ.FE.DK-2017.0905

[21] S Çavuş Oğlu , Bazı Sınır Değer Problemleri Ve Yaklaşım Yönetemleri, Ocak(2017)

[22] M F Ucar ,Kesirli Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemlerin Sayısal çözümleri, 2, (2012)

[23] H Caglar ,N Caglar,C Akkoyunlu,Non-polynomial Spline Method Of a Non-Linear System Of Second-Order Boundary Value Problems,4 (2010).

[24] H cagler, N caglar, S yilmaz,M iseri,A Non-polynomial Spline Solution Of The One-Dimensional Wave Equation Subject To An Integral Conservation Condition.

[25] N Caglar , H Caglar ,B-Spline Method For Solving Linear System of Second-Order Boundary Value Problems,9 (2008)