

## ASTRODİNAMİKTE KAOS TEORİSİ İŞİĞİNDAKİ GELİŞMELER

Elgiz BAŞKAYA<sup>1</sup>, Umur DAYBELGE<sup>1</sup>, Ahmet SOFYALI<sup>1</sup>, Erhan TOPAL<sup>1</sup>,  
Cuma YARIM<sup>1</sup>

### ÖZET

Gökcisimleri arasındaki gravitasyonel etkileşmeleri formüle eden nonlinear denklemlerin yapısı, bunların bilgisayar yardımı olmaksızın integre edilmesine genellikle imkan vermemektedir. Geleneksel olarak, Güneş Sistemi'ne ait gezegen, uydular, kuyruklu yıldız ve asteroid gibi gökcisimlerinin hareketlerinin incelenmesi, bunları birbirinden yalıtılmış birer iki-cisim problemine indirgeyerek ele almaya dayanır. Bilindiği gibi, bu problemlerin çözümleri, "konik kesitleri" olan fonksiyonlar şeklinde bulunmakta ve gerektiğinde ikiden fazla cismin hareketi de, iki-cisim problemi üzerine eklenen bazı pertürbasyonlar yardımıyla belirlenebilmektedir. Gezegenlerin, iki-cisim problemi modeline göre, Güneş çevresindeki yaklaşık dairesel yörüngeler üzerinde hareket ettiği sonucu gözlemlerle de uyumaktadır. Buna karşılık, kuyruklu yıldız yörüngelerinin parametrelerinde zamanla, öngörülemeyen değişikliklerin ortaya çıkabildiği gözlenmektedir. Diğer taraftan, Astrodinamiğin uzay araçlarıyla yapılan yolculukları konu alan uygulamalarında da, araçlardaki yakıtın sınırlı olması ve benzeri bazı teknik nedenler, araçların gökcisimleri arasındaki yörüngelerinin az enerjiyle gerçekleştirilmesini ve çok iyi hesaplanarak optimize edilmesini gerektirmektedir.

Son yıllarda gökcisimlerinin hareketlerine ait nonlinear denklemlerin, iki-cisim yerine, bir seri üç-cisim problemine ayrıştırılarak, bunların çözümlerinin bilgisayar yardımıyla ve kaos teorisi ışığında araştırılması, yöntemi denenmektedir. Bu yöntemin daha şimdiden astrodinamikte önemli bir paradigma değişikliğine yol açtığı söylenebilir. Gerçekten de kaos teorisi, kararsızlık sınırındaki yörüngeler aracılığıyla herhangi iki gökcismi arasında sanıldığından çok daha az enerjiyle yolculuk yapılabileceğini göstermektedir. Örneğin, Lo ve Ross [1], Güneş Sistemi içinde "InterPlanetary Superhighway" adını verdikleri bir yörüngeler ağı, "tüneli" sayesinde, sistemdeki tüm cisimler arasında ziyadesiyle alçak enerjili taşınımın olabileceğini vurgulamaktadırlar. Böyle bir yörüngeler sistemi, her gezegen ve uydular arasındaki Lagrange noktaları tarafından oluşturulmaktadır. Her Üç-Cisim Sistemi için çekim ve merkezkaç kuvvetlerinin birbirlerini dengelediği böyle 5 adet Lagrange noktası bulunmaktadır. Bunlardan Euler tarafından bulunan L1, L2 ve L3 noktaları kararsız denge noktalarıdır. Ref. [2] de gösterildiği gibi, L1 ve L2 arasında yer alan periyodik yörüngeler tarafından oluşturulan "tüneller" yörüngeleri sistemi, kaotiktir. Diğer bir ifadeyle, "tüneller", yörüngelerde deterministik bir kaosu oluşmasına dayanmaktadır. Bunun sonucu olarak, çok küçük bir enerjiyle, Lagrange noktası yakınında olan yörüngelerde bazı kriterlere uyan önemli değişiklikler meydana getirilebilir. Güneş çevresindeki gezegen ve uydular arasında yolculuk yapan küçük bir cismin yörüngelerini sınırlayan Hill yüzeyleri, Güneş çevresinde iç içe düzenlenmiş, hilal şekilli yasak bölgeler oluşturur. Her gezegen, böyle bir hilalin birbirine yakın uçları arasındaki yer alan dar bir açıklık veya küçük bir boğazda yer alır. Gezegenlerin bağıl hız farklarından ötürü, yasak bölgelerin açık ağızları birbirlerine göre dönerler. Gezegenlerarası yolculuklar için kaotik yörüngelerin bu hilal açıklıklarından geçme imkanları simülasyon ile sistematik olarak araştırılabilir ve bu yolla istediğimiz kriterlere uyan kaotik yörüngeler belirlenebilir.

Astrodinamikte kaotik yörüngelerin varlığı, gökcisimleri arasında madde taşınımının sanıldığından daha olanaklı olduğunu gösterdiğinden, sonuçta Güneş Sisteminin Oluşumu veya Canlıların Ortaya Çıkışı gibi teorilerde de paradigma değişiklikleri beklenmelidir. Bu bildiride, böyle simülasyonlarla elde ettiğimiz, Dünya-Ay, Dünya-Mars arası uzay yolculuklarına uygun, kaotik, "alçak enerjili" yörünge sınıfları gösterilecektir. Bu sınıflar arasından en uygun yörüngeyi seçimi, belirlenecek kriterlere göre, örneğin bir yapay zeka yöntemiyle gerçekleştirilebilir.

<sup>1</sup>İTÜ, Uçak ve Uzay Bilimleri Fakültesi, Uzay Müh. Böl. Maslak, İstanbul, 0212 285 3438, 0212 285 2926, [daybelge@itu.edu.tr](mailto:daybelge@itu.edu.tr)

## Giriş

Son yıllarda, gök cisimlerinin hareketlerine ait nonlineer denklemlerin, iki-cisim yerine, bir seri üç-cisim problemine ayrıştırılarak, bunların çözümlerinin bilgisayar yardımıyla ve kaos teorisi ışığında araştırılması yöntemi denenmektedir. Bu yöntemin daha şimdiden astrodinamikte önemli bir paradigma değişikliğine yol açtığı söylenebilir. Kaos teorisi, Dairesel, Kısıtlı Üç-Cisim Problemi (DKÜCP) için tanımlı olan Lagrange noktalarından kararsız olanlarının ikisi ( $L_1$  ve  $L_2$ ) civarındaki doğrusal olmayan, kaotik yapıdan yararlanılması ile elde edilebilen “alçak enerjili aktarım (AEA) (LET: Low Energy Transfer)” yörüngeleri aracılığıyla herhangi iki gök cisimi arasında sanıldığından çok daha az enerjiyle yolculuk yapılabileceğini göstermektedir.

Klasik Hohmann yönteminin en ekonomik aktarımı mümkün kıldığı kanısının, Belbruno'nun Miller ile Hiten (1991) ve Ridenoure ile Hughes (1998) adlı tehlikeye giren uzay uçuşlarını, araçları “Zayıf Kararlılık Sınırı (ZKS) (WSB: Weak Stability Boundary)” yaklaşımını kullanarak tasarladıkları alçak enerjili yörüngelere sokarak kurtarmasının ardından geçersiz kılınmış olduğu söylenebilir. Bu gelişmeye olanak sağlayan dinamiklerin, ilerleyen süreçte Koon, Lo, Marsden ve Ross dörtlüsü tarafından etraflıca ele alınması ve bu etkenlere “Dinamik Sistemler Kuramı (DSK) (DST: Dynamical Systems Theory)” çerçevesinde bir açıklama getirilmesi ile, geliştirilen analitik ve sayısal araçlar kullanılarak bilgisayar ortamında çok çeşitli görev tasarımları mümkün olmuştur. Hatta Lo ve Ross, Güneş Sistemi içinde “InterPlanetary Superhighway” adını verdikleri bir yörüngeler ağı, “tüneli” sayesinde, sistemdeki tüm cisimler arasında ziyadesiyle alçak enerjili taşınımın olabileceğini vurgulamaktadırlar [1].

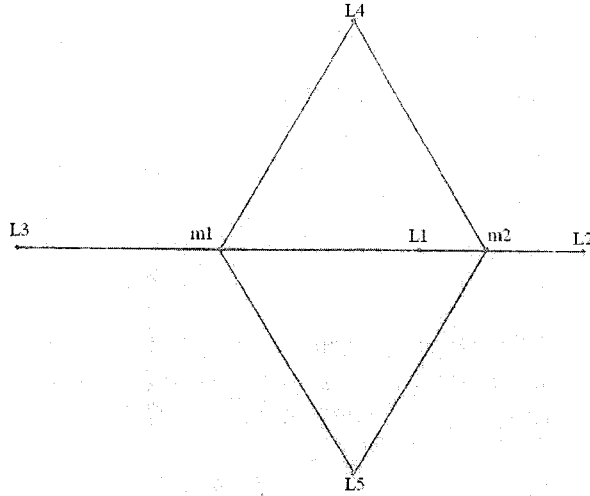
Astrodinamikte kaotik yörüngelerin varlığı, gök cisimleri arasında madde taşımının sanıldığından daha olanaklı olduğunu gösterdiğinden, sonuçta Güneş Sisteminin Oluşumu veya Dünya’da Canlıların Ortaya Çıkışı gibi teorilerde de paradigma değişiklikleri beklenmelidir. Bununla birlikte, Dünya’ya çarpma tehlikesi bulunan gök cisimlerini önceden farketmek ve bunları savuşturmak için önlemler aramak; örneğin bu cisimlere karşı uzayda patlayıcı taşıyan uzay araçlarını konumlandırarak yerleri belirlemek, üsler kurmak, devriye uçuşları gerçekleştirmek özellikle Dünya-Ay sisteminin Lagrange noktalarından  $L_1$  ve  $L_3$ ’ün çevresindeki doğrusal olmayan dinamiklerden yararlanılarak mümkün olabilir [2].

### 1. Üç Cisim Problemi

Üç-cisim probleminin analitik kesin çözümünün elde edilebilmesi için cisimlerin hareketini tanımlayan ikinci mertebeden 9 diferansiyel denklem tam olarak çözümlenmelidir, bu bize 18 integral sabiti verir. Halbuki, n-cisim problemi için sadece on integral sabiti bilindiğinden bu problemin genelde kesin çözümü yoktur.

Euler ve Lagrange üç-cisim problemi için özel çözümler ortaya koymuşlardır. Gelişigüzel kütlelere sahip cisimlerin bir eşkenar üçgenin köşelerinde olduğu ya da aynı doğru üzerinde dizildiği bu haller (bkz. Şekil: 1), Lagrange’ın 1772’de gösterdiği gibi, şu üç koşul sağlanmakta ise geçerlidir [3]:

- her cisme etki eden net kuvvetin doğrultusu sistemin kütle merkezinden geçmekte,
- net kuvvetler cisimlerin kütle merkezine uzaklığına doğrudan orantılı,
- ilk hız vektörlerinin büyüklüğü cisimlerin kütle merkezine uzaklığına orantılı ve kütle merkezini cisimlere bağlayan yarıçap (konum) vektörleri ile aralarındaki açılar eşittir.



**Şekil: 1 – Üç-Cisim Probleminin Lagrange Özel Çözümleri ve Beş (Euler) Lagrange Noktası**

Üç-cisim problemini açıklayabilmek amacıyla, Poincaré ve Hill başta olmak üzere birçok kişi çalışmalarını “Dairesel, Kısıtlı Üç-Cisim Problemi” olarak adlandırılan, asıl problemin sınırlanmış bir hali üzerinde yoğunlaştırmışlardır.

### 1.1. Dairesel, Kısıtlı Üç-Cisim Problemi

İki maddesel parçacığın (cismin) ortak kütle merkezleri etrafında dairesel yörüngeler üzerinde, aynı düzlemde, iç içe dönmekte olduğu bu problemde, göreceli olarak çok küçük kütleyle sahip üçüncü maddesel parçacığın (cismin) diğer iki cismin etkisindeki hareketi incelenmektedir. Bu durumda, üçüncü cismin diğer cisimler üzerindeki etkisi ihmal edilebilmektedir. Böylelikle, problem ikinci mertebeden 3 diferansiyel denklem ile tanımlanabilir hale gelmektedir. Üçüncü maddesel parçacığın da aynı düzlemde hareket ettiği kabulü, ikinci mertebeden 2 diferansiyel denklem ile tanımlanabilen “Düzlemsel, Dairesel, Kısıtlı Üç-Cisim Problemi (DDKÜCP)”ni doğurur.

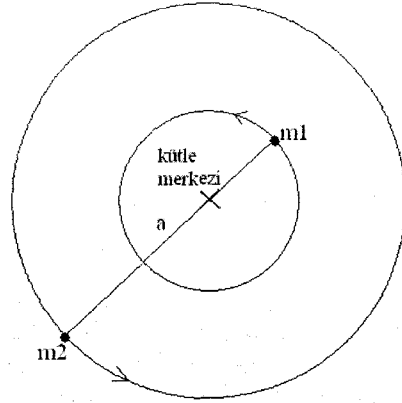
Problem iki boyutla sınırlanmadan, yani düzlemsel olmayan genel hali ile ele alınarak analitik çıkartımlara başlanabilir. Öncelikle şu normalizasyonlar yapılmalıdır [3]:

- Göreceli olarak büyük kütleli iki parçacığın kütleleri, aşağıda gösterildiği gibi boyutsuz olarak temsil edilebilir hale getirilir:

$m \geq m$  kabulü ile, kütleler  $m + m$  ile normalize edilirse:

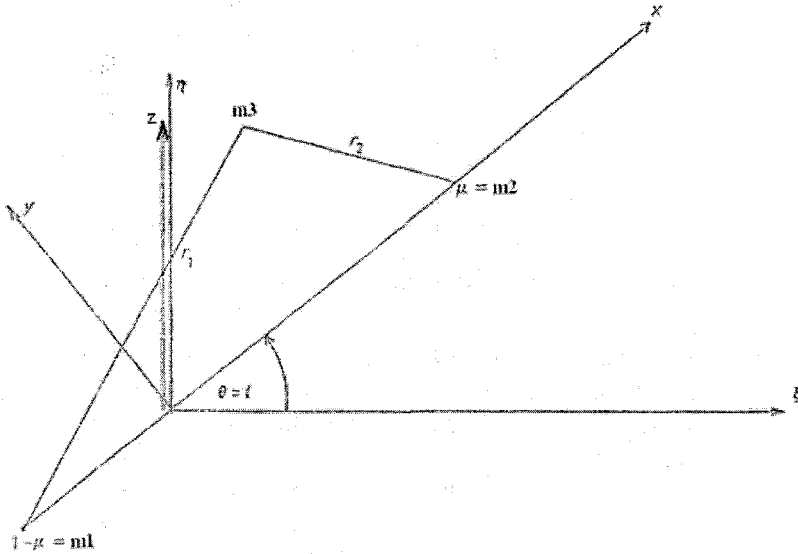
$$\frac{m}{m + m} \equiv \mu \text{ ve } \frac{m}{m + m} \equiv 1 - \mu \text{ yazılabilir.}$$

$$\text{Burada } \mu \leq \frac{1}{2} \text{ 'dir.}$$



**Şekil: 2** – İki Maddesel Parçacığın Ortak Kütle Merkezi Etrafındaki Hareketi

- İki parçacığın sabit olan birbirlerine uzaklığı, Şekil: 2’de gösterildiği gibi  $a$  ile gösterilir. Parçacıklar  $n$  ortalama açısal hızı ile ortak kütle merkezleri etrafında dönerken, orijini bu kütle merkezinde olan ve aynı açısal hız ile dönmekte olan  $x, y, z$  eksen takımının  $x$  eksenini üzerindeki  $x_1 < 0$  ve  $x_2 > 0$  konumlarındadırlar. Bu eksen takımının orijini ve dönme düzlemine dik olan  $z$ -ekseni, bir atalet eksen takımını olan  $\xi, \eta, \zeta$  eksen takımının orijini ve  $\zeta$ -ekseni ile çakışıkır. (bkz. Şekil: 3) Parçacıkların kütle merkezine göre konumlarının boyutsuzlaştırılması aşağıda gösterilmiştir:



**Şekil: 3** – İki büyük, Üçüncüsü Çok Küçük Olmak Üzere Üç Maddesel Noktanın Ortak Kütle Merkezi Etrafındaki Hareketi

$x_2 \geq |x_1|$  için konumlar  $a$  ile normalize edilir.

- Zaman,  $T = 2\pi \left[ a^3 / (G(m_1 + m_2)) \right]^{1/2}$  ile boyutsuzlaştırılır.

Sabit (atalet) eksen takımında  $m_3$  için hareket denklemleri şu şekilde yazılır:

$$\begin{aligned}\ddot{\xi} &= (1-\mu) \frac{\xi_1 - \xi}{r_1^3} + \mu \frac{\xi_2 - \xi}{r_2^3} \\ \ddot{\eta} &= (1-\mu) \frac{\eta_1 - \eta}{r_1^3} + \mu \frac{\eta_2 - \eta}{r_2^3} \\ \ddot{\zeta} &= (1-\mu) \frac{\zeta_1 - \zeta}{r_1^3} + \mu \frac{\zeta_2 - \zeta}{r_2^3}\end{aligned}\quad (1)$$

Burada;

$$\begin{aligned}r_1 &= \sqrt{(\xi_1 - \xi)^2 + (\eta_1 - \eta)^2 + (\zeta_1 - \zeta)^2} \\ r_2 &= \sqrt{(\xi_2 - \xi)^2 + (\eta_2 - \eta)^2 + (\zeta_2 - \zeta)^2}\end{aligned}$$

Dönen eksen takımı üzerindeki büyük kütleli parçacıkların konum ifadelerinin boyutsuzlaştırılmış hallerinin atalet eksen takımının dönen eksen takımı ile ilişkilendirilmesi sırasında kullanılması, üçüncü parçacığın dönen eksen takımına göre hareket denklemlerinin elde edilmesini sağlar. Düzenlemeler sonucunda, (2)'de verilmiş olan çok küçük kütleli üçüncü maddesel parçacığın Dairesel, Kısıtlı Üç-Cisim Problemi'ndeki hareketini tanımlayan boyutsuzlaştırılmış denklemler ortaya çıkar:

$$\begin{aligned}\ddot{x} - 2\dot{y} &= \frac{\partial \Omega}{\partial x} \\ \ddot{y} + 2\dot{x} &= \frac{\partial \Omega}{\partial y} \\ \ddot{z} &= \frac{\partial \Omega}{\partial z}\end{aligned}\quad (2)$$

$$\begin{aligned}\text{Burada; } \frac{\partial \Omega}{\partial x} &= x - \frac{1-\mu}{r_1^3}(x+\mu) + \frac{\mu}{r_2^3}(-x+1-\mu) \\ \frac{\partial \Omega}{\partial y} &= y - \frac{1-\mu}{r_1^3}(y) + \frac{\mu}{r_2^3}(y) \\ \frac{\partial \Omega}{\partial z} &= -\frac{1-\mu}{r_1^3}(z) + \frac{\mu}{r_2^3}(z)\end{aligned}\quad \text{ve} \quad \begin{aligned}r_1 &= \sqrt{(x-x_1)^2 + y^2 + z^2} \\ r_2 &= \sqrt{(x-x_2)^2 + y^2 + z^2}\end{aligned}\quad \text{olmak}$$

üzere  $\Omega$  boyutsuz konumlara bağlı skalar bir fonksiyondur:

$$\Omega \equiv \frac{(x^2 + y^2)}{2} + \frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2}\quad (3)$$

(2) denklemleri bir kere integre edilirse;

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 + C = 2\Omega\quad (4)$$

elde edilir ki, buradaki konum türevlerinin karelerinin toplamı üçüncü parçacığın dönen (x, y, z) eksen takımında tanımlı hızının karesine eşittir. "Jacobi integrali" ya da "bağlı enerji integrali" olarak adlandırılan (4) ya da (5) integralindeki C bir integral sabitidir. Görülebileceği gibi;

$$V^2 = 2\Omega - C \text{ 'dir}\quad (5)$$

Bu Dairesel, Kısıtlı Üç-Cisim Problemi'nde elde edilebilecek yegane integraldir, dolayısıyla "Jacobi sabiti" denilen C de elde edilebilecek yegane integral sabitidir [3].

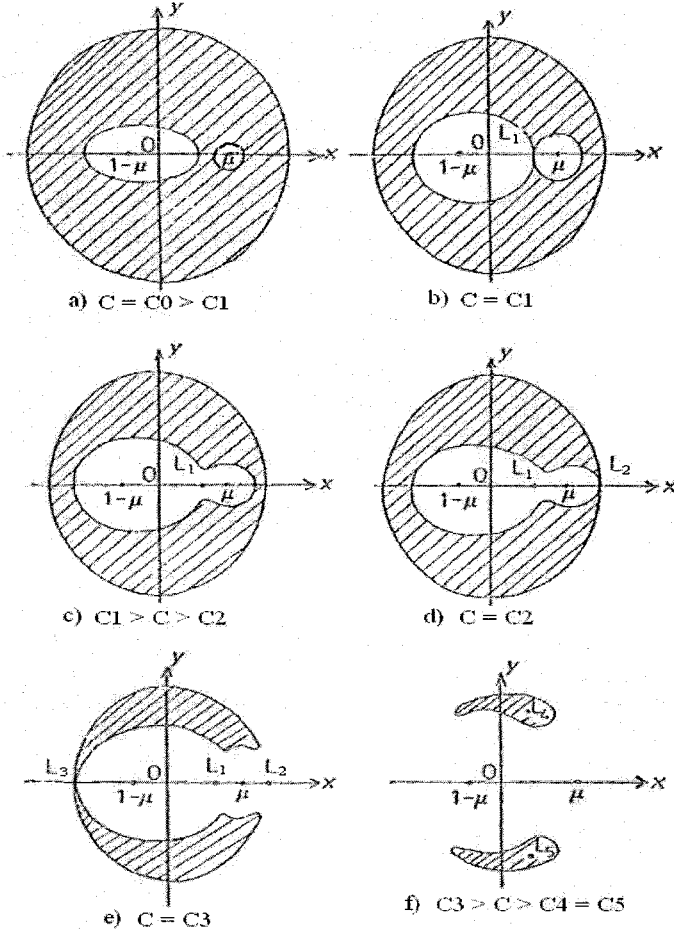
### 1.1.1. Sıfır Hız Yüzeyleri (Hill'in Sınırlayıcı Yüzeyleri)

Üçüncü parçacığın hızının dönen eksen takımına göre sıfır olduğu konumlar için  $2\Omega = C$

geçerli olduğundan, parçacığın hızının karesi ile konumu arasında bağlantı kuran (4) eşitliğinden bilinen başlangıç koşullarına bağlı olarak Jacobi integral sabitinin değeri elde edilebilir:

$$x^2 + y^2 + \frac{2(1-\mu)}{r_1} + \frac{2\mu}{r_2} = C$$

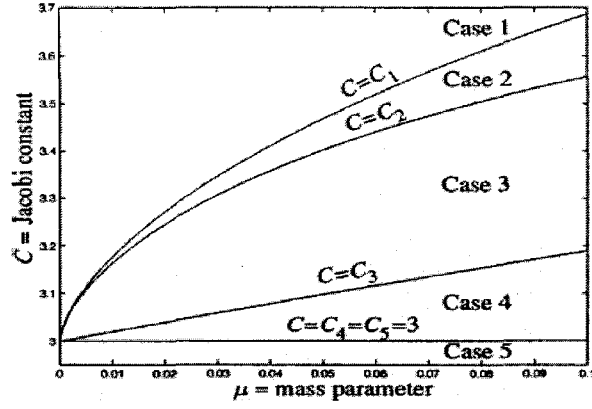
Belirlenen bu C değeri "Hill'in sınırlayıcı yüzeyi" ya da diğer bir deyişle "sıfır hız yüzeyi"ni tanımlar. C değerine bağlı olarak değişen bu sınırlayıcı yüzeyin varlığı, üçüncü parçacığın Dairesel, Kısıtlı Üç-Cisim Problemi'nde nerede bulunabileceğini gösterir (bkz. Şekil: 4).



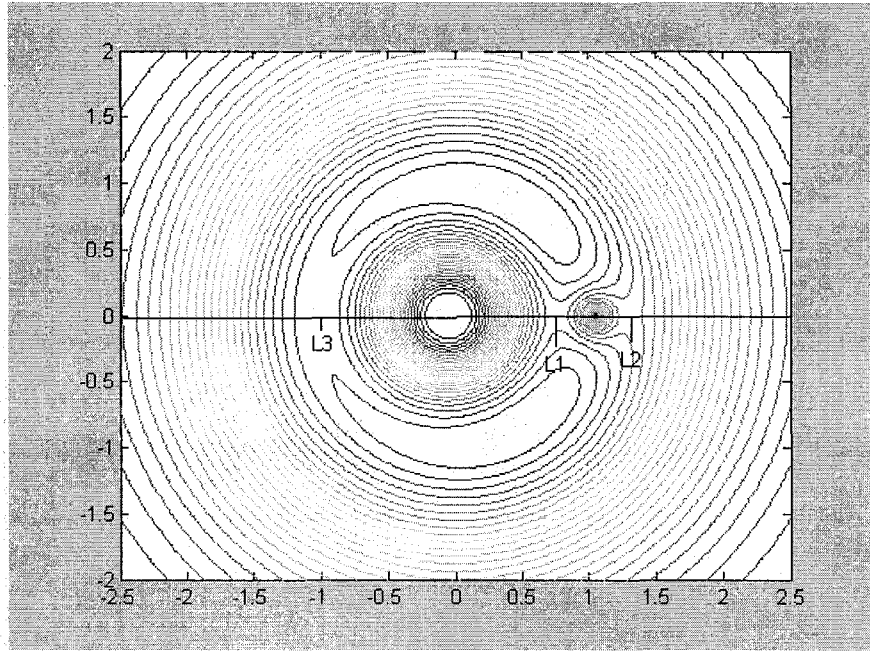
Şekil: 4 – Altı Farklı C Değeri için Hill Bölgeleri

Şekil: 5'te görülen, [4] no'lu kaynaktan alınmış olan grafikte, çeşitli  $\mu = \frac{m_2}{m_1 + m_2}$

değerleri için farklı farklı C değerlerine karşılık gelen Hill'in sınırlayıcı eğrileri ve bu eğriler arasında kalan ve Hill bölgelerinin farklı geometrilerine karşılık gelen bölgeler belirtilmiştir.

Şekil: 5 –  $\mu$ -C Grafiği

Gerçekleştirdiğimiz çalışmalar sırasında  $\mu = 0,05$  için çizdirdiğimiz “ $\Omega(x,y)$  fonksiyonunun eşdeğerli konturları” Şekil: 6’da görülebilir. Grafikte ayrıca,  $(x,y)$  düzlemindeki beş Lagrange noktasından dönen eksen takımının yatay eksenindeki denge noktaları olan  $L_1$ ,  $L_2$  ve  $L_3$  belirtilmiştir.

Şekil: 6 –  $\Omega(x,y)$  Fonksiyonunun Eşdeğerli Konturları ( $\mu = 0,05$ )

### 1.1.2. Lagrange Noktalarının Kararlılığı

- Lagrange noktalarının doğru üzerinde dizilme durumu kararlılık açısından incelendiğinde, sonuç üç doğrusal Lagrange noktasının ( $L_1$ ,  $L_2$ ,  $L_3$ ) kararsız denge noktaları olduğuna işaret eder [3].

- Lagrange noktalarının eşkenar üçgenin köşelerinde bulunma durumu incelendiğinde ise,  $L_4$  ve  $L_5$  noktalarındaki dengenin kararlı olmasını sağlayacak şekilde  $\mu$ 'nün alabileceği en yüksek değer “Routh değeri” olarak anılan 0,0385’e eşit olduğu belirlenir. Öyleyse, bu durum için

$$0 \leq \mu \leq 0,0385$$

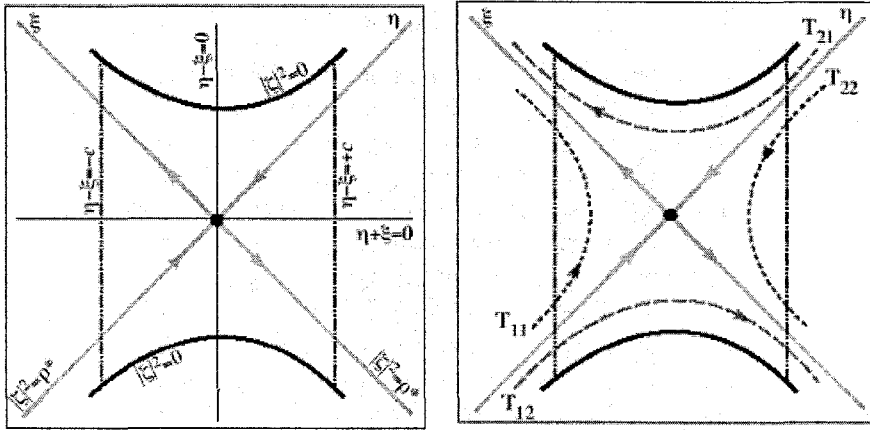
koşulu sağlandığı takdirde kararlılık söz konusudur [3].

## 2. Zayıf Kararlılık Sınırındaki Alçak Enerjili Aktarım Yörüngeleri İçin Dinamik Sistemler Kuramı

### 2.1. Lagrange Noktaları Civarındaki Yörünge Tipleri

DSK'nin uygulandığı problem, "Düzlemsel, Dairesel, Kısıtlı Üç-Cisim Problemi (DDKÜCP)"dir. Daha önce de bahsedilmiş olan bu problem, Dairesel, Kısıtlı Üç-Cisim Problemi'nin daha da özelleştirilmiş bir halidir; buna göre, çok küçük kütleli üçüncü parçacığın hareketi diğer iki parçacığın dönme düzleminindedir.

Dört boyutlu (iki konum, iki hız ya da momentum) faz (durum) uzayındaki yörünge yapısının daha iyi anlaşılabilmesi amacıyla, parçacığın hareketinin doğrusallaştırılmış denklemlerinin oluşturduğu dinamik sistemin karakteristik denkleminin kökleri olarak bulunan özdeğerlere karşılık gelen özvektörler kullanılır. Eksenlerini özvektörlerin oluşturduğu ve koordinatları  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta_1$ ,  $\zeta_2$  ile verilen yeni bir sisteme geçiş yapıldığında Lagrange noktaları civarındaki dokuz yörünge Şekil: 7'de geometrik olarak tasvir edildiği gibi dört tipte ele alınabilir. Burada,  $\eta\xi$ -düzlemi dönen eksen takımının ( $xy$ ) düzlemi ile çakışık, orijini incelenen serbestlik noktasında ve  $\eta$ -ekseninin doğrultusu x-ekseninin doğrultusundan pozitif yönde (saat yönünün tersine doğru)  $45^\circ$  sapmış durumdadır:



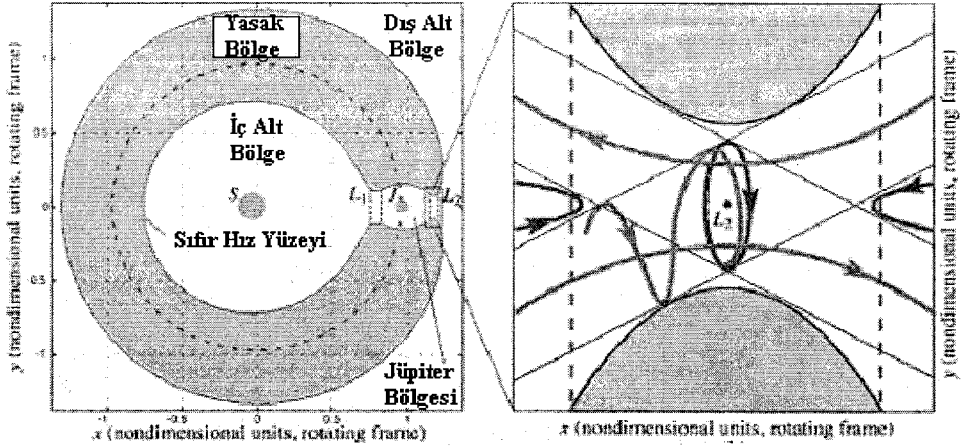
Şekil: 7 – Lagrange Noktaları Civarındaki Yörüngeler

1) Orijindeki ( $\xi = \eta = 0$ ) "siyah" nokta "Lyapunov yörüngesi" olarak adlandırılan denge noktası çevresindeki kararsız periyodik yörüngeye karşılık gelmektedir.

2) "Yeşil" renkle gösterilmiş ve bir uçları orijinde olan dört yörünge "asimptotik yörüngeler"dir ( $\xi\eta = 0$ ).

3)  $\xi\eta > 0$  bölgelerindeki iki "kırmızı" eğri "geçiş (transit) yörüngeleri"ni temsil etmektedir. Bu yörüngeler, sağlanan boğaz açıklığından, Lagrange noktalarının ( $L_1$  ve  $L_2$ ) sol (1) ve sağındaki (2) Hill bölgeleri arasında geçiş yapmayı sağlarlar.

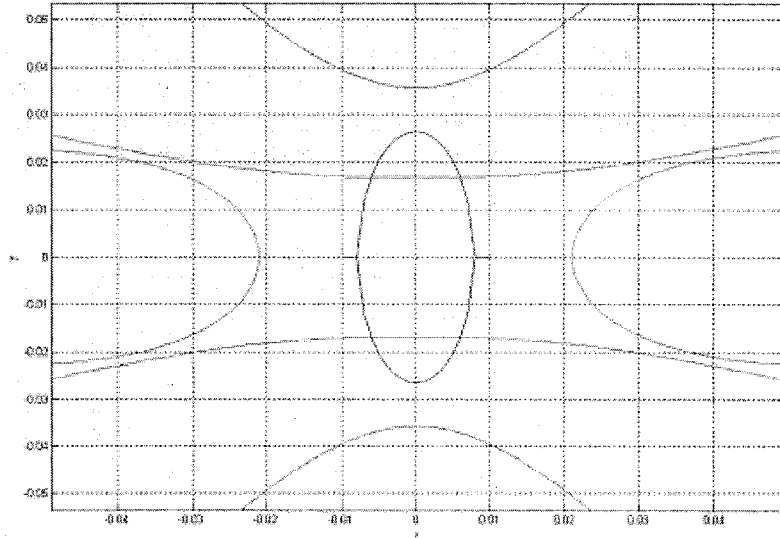
4) İki  $\xi\eta < 0$  bölgesindeki iki "mavi" "kalış (nontransit) yörüngesi" sol (1) ve sağ (2) Hill bölgeleri arasında geçiş yapmadan kendi ilk bölgelerinde kalmaktadır.



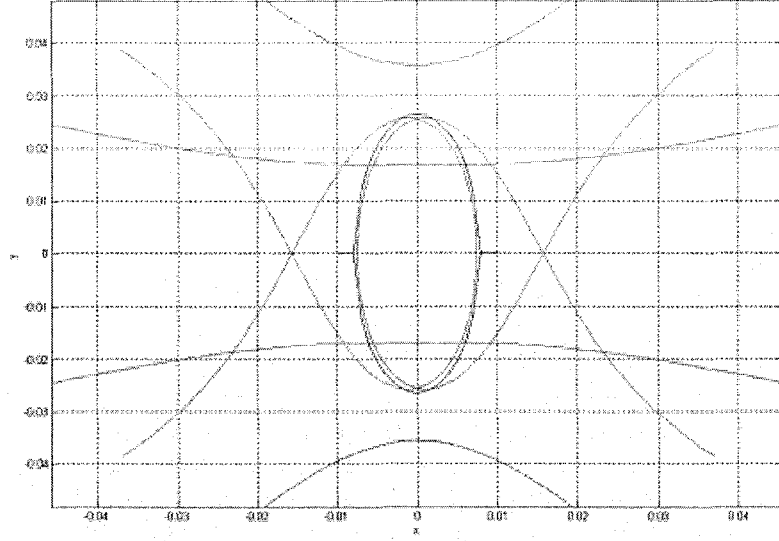
**Şekil: 8 – Konum (xy) Uzayında Yörüngelerin Gösterimi**  
(Güneş – Jüpiter – Üçüncü Cisim Sistemi için)

Özetle,  $L_1$  ve  $L_2$  noktaları civarında, kararsız olan ve doğrusal olmayan dinamik etkilerden kaynaklanan, birbirinden tamamen farklı dört hareket tipi söz konusudur (bkz. Şekil: 8) [4, 5].

Şekil: 9'da, çizdirilen bir Lyapunov yörüngesi ile geçiş (transit) ve kalış (nontransit) yörüngeleri bir arada görülmektedir. Şekil: 10'da ise, kalış yörüngeleri yerine Lagrange noktası çevresindeki kararsız, periyodik Lyapunov yörüngesine sarılan asimptotik yörüngeler görülebilir:



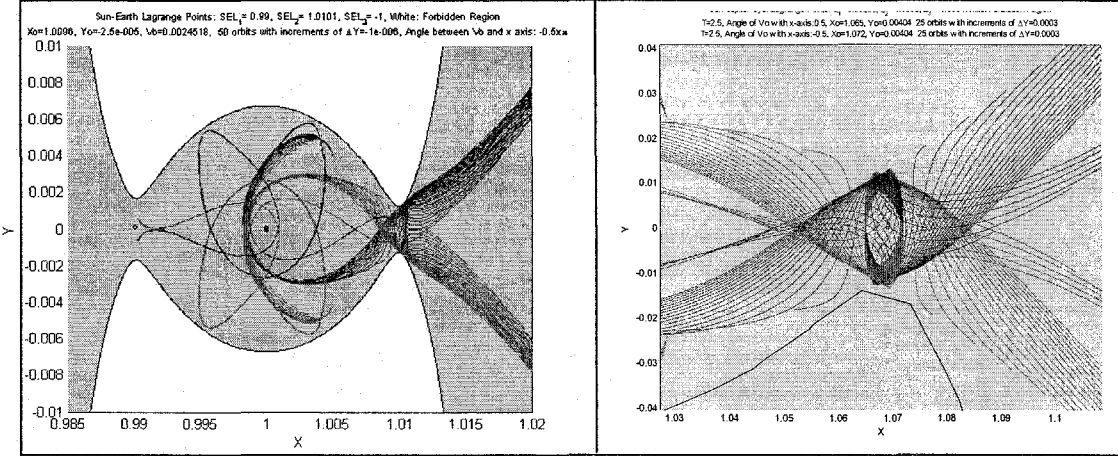
**Şekil: 9 – Lyapunov, Geçiş ve Kalış Yörüngeleri**



Şekil: 10 – Lyapunov, Geçiş Yörüngeleri ve Asimptotik Yörüngeler

## 2.2. Değişmez (Envaryant) Aktarım Tünelleri (Manifoldları)

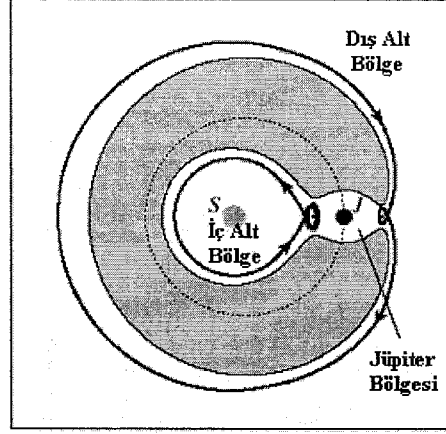
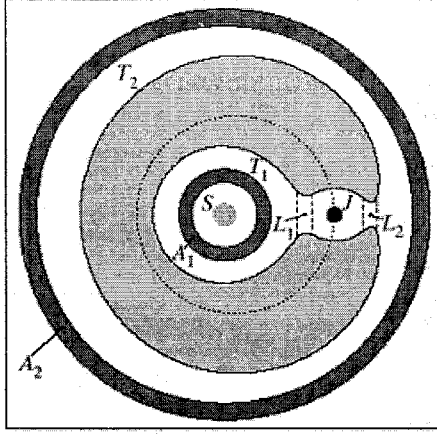
Düzlemsel, Dairesel, Kısıtlı Üç-Cisim Problemi için yörüngelerden meydana gelen tüneller, bağımlı değişkenlerin uzayı için bir model teşkil etmektedir. Barındırdığı yörüngeler ile, dinamik sistemin tüm mümkün hallerinin geometrik bir modelini veren durum (faz) uzayında bir resim oluştururlar. Belli koşullar sağlandığında, bir değişmez tünele yaklaşmakta ya da ondan uzaklaşmakta olan yörüngeler takımı sırası ile, “kararlı” ve “kararsız tünel” olarak adlandırılan ve yine değişmez olan manifoldlar meydana getirirler. Geliştirilen algoritma ile elde edilen değişmez aktarım tünellerinden ikisi Şekil: 11’de görülmektedir [6].



Şekil: 11 – Değişmez Aktarım Tünellerine İki Örnek

## 2.3. Değişmez Torlar (Toruslar)

İç ve dış alt bölgelerde “değişmez tor (torus)” olarak adlandırılan, iç hacme sahip kapalı yüzeyler bulunmaktadır. Bu yüzeylerin iki boyutlu konum uzayına izdüşümleri de, birer “değişmez halka yüzeyi (annulus)” meydana getirir (bkz. Şekil: 12.a) [4, 5].

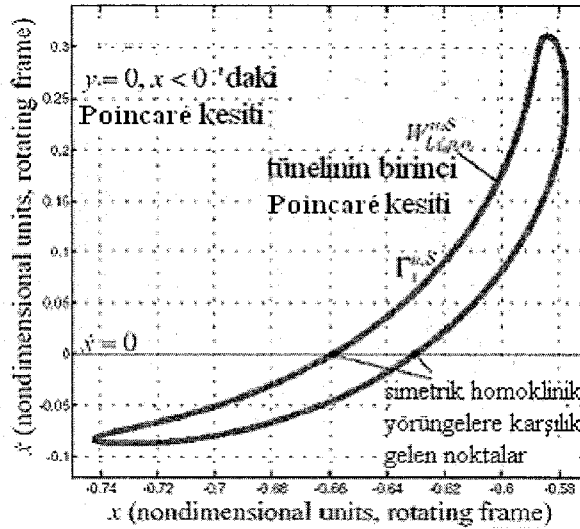


Şekil: 12.a – Güneş – Jüpiter – Üçüncü Cisim Sistemi için İç ve Dış Değişmez Halka Yüzeyleri

Şekil: 12.b – Güneş – Jüpiter – Üçüncü Cisim Sistemi için İç ve Dış Homoklinik Yörüngeleri

#### 2.4. Poincaré Kesitlerinin Kullanılması

Dinamik Sistemler Kuramı'nda, Poincaré kesitlerinden iç ve dış bölgelerdeki biri kararlı, diğeri kararsız ikiye değişmez aktarım tünellerinin hem birbirleriyle kesişim halinde (transversal) ya da x-eksenine göre simetrik olup olmadıklarının incelenmesi, hem de sayısal integralleme yoluyla alçak enerjili aktarım yörüngelerinin elde edilmesi sırasında yararlanılmaktadır. Bir manifoldu meydana getiren yörünge takımının belirli bir düzlemi, düzlem içindeki eksene göre hangi konumda ve hangi hız ile kestiği bilgisini, yatay ekseni konum, dikey ekseni hız ekseni olan bir düzlem üzerinde noktalardan oluşan bir eğri olarak elde etmemizi sağlayan bu yöntem, doğrusal olmayan dinamik yapıya sahip hareketlerin incelenmesinde kullanılan geometrik bir yaklaşımdır. Eğer manifold yeterli sayıda yörünge ile oluşturulmuş ise, birçok noktadan oluşacağından dolayı elde edilen eğri de kesintisiz ve yumuşak hatlı olacaktır [6]. Örnek bir Poincaré kesiti için Şekil: 13'e bakılabilir.



Şekil: 13 – Örnek Poincaré Kesiti  
(Güneş – Jüpiter – Üçüncü Cisim Sistemi için)

## 2.5. Dinamik Kanal: Homoklinik – Heteroklinik Zincir

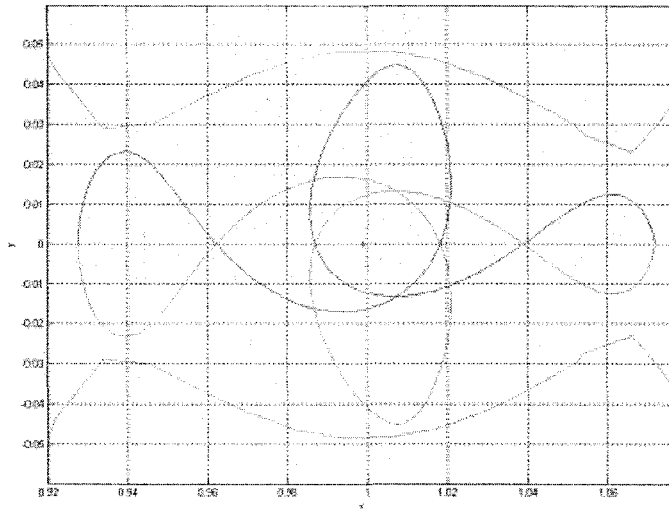
Daha önce belirtilmiş olduğu gibi, DSK DDKÜCP'nin iki serbestlik noktası civarında da Hill yüzeyinin birer boğaz oluşturacak şekilde açılmış olduğu halini ele almaktadır. Bu durumda Hill bölgesi, en büyük kütleli birinci cismin bulunduğu iç, ikinci büyük cismin bulunduğu ara ve bu iki cisimi çevreleyen dış olmak üzere üç alt bölgeye ayrılabilir. İç ve dış alt bölgelerde sırası ile,  $L_1$  ve  $L_2$  çevresindeki kararsız, periyodik Lyapunov yörüngelerine homoklinik olan yörüngeler ile bu Lyapunov yörüngeleri arasında heteroklinik bağlantı kuran yörüngelerin birleşiminden meydana gelen zincir “dinamik kanal” olarak adlandırılmaktadır [4, 6].

### 2.5.1. Homoklinik Yörüngeler

$L_1$  ve  $L_2$  noktalarının çevresindeki Lyapunov yörüngelerine ileriye ve geriye doğru asimptotik olan yörüngeler sırası ile, kararlı ve kararsız değişmez tünellerin kesişim bölgelerinden geçer ve “homoklinik yörüngeler” olarak adlandırılırlar (bkz. Şekil: 12.b). Öyleyse, bu tür yörüngelerin var olma koşulu, hem iç hem de dış bölgelerde yasak bölgelere yakın bir şekilde dolanan kararlı ve kararsız tünellerin birbirlerini kesmeleridir.

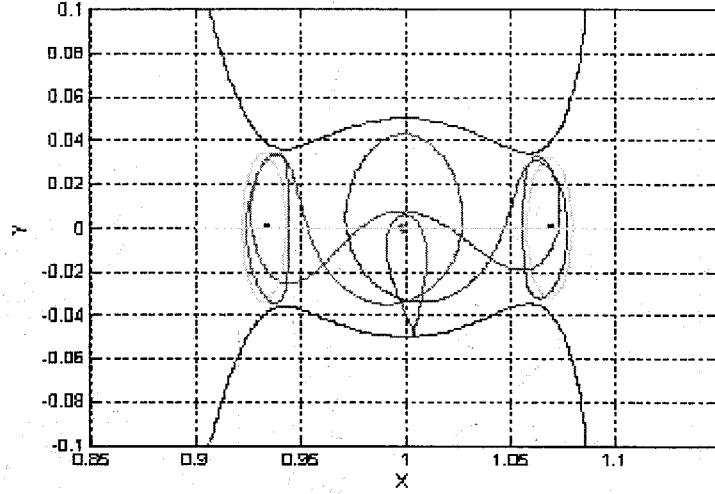
### 2.5.2. Heteroklinik Yörüngeler

“Heteroklinik yörüngeler, birinci ve ikinci Lagrange noktalarının etrafında yer alan kararsız periyodik yörüngelere sarılan, iç ve dış homoklinik yörüngeler arasında köprü vazifesi yaparak ikinci büyük cisim civarında iç ve dış bölgeleri birbirine bağlayan yörüngelerdir. Bu tür bir bağlantının söz konusu olabilmesi için, iki serbestlik noktasına ait değişmez tünellerin, birininki kararlı ve diğerininki kararsız olmak üzere  $x = 1 - \mu$  düzlemi ile alınan Poincaré kesitlerinin kesişim halinde olmaları gerekmektedir. Yazılan yörünge çizici program kullanılarak elde edilen bir heteroklinik yörünge Şekil: 14'te verilmiştir. Güneş – Jüpiter – uzay aracı sistemi için çizdirilen bu yörünge,  $y = 0$  eksenine göre simetriği ile birlikte verilmiştir. Yörüngeyi kendisi (mavi renkte) zamanda ileriye doğru, simetriği ise (açık yeşil renkte) zamanda geriye doğru integralleme ile elde edilmiştir.



Şekil: 14 – Heteroklinik Yörünge ve Simetriği

Şekil: 15'te ise, periyodu 173 yıla eşit olan bir heteroklinik yörünge gösterilmiştir.

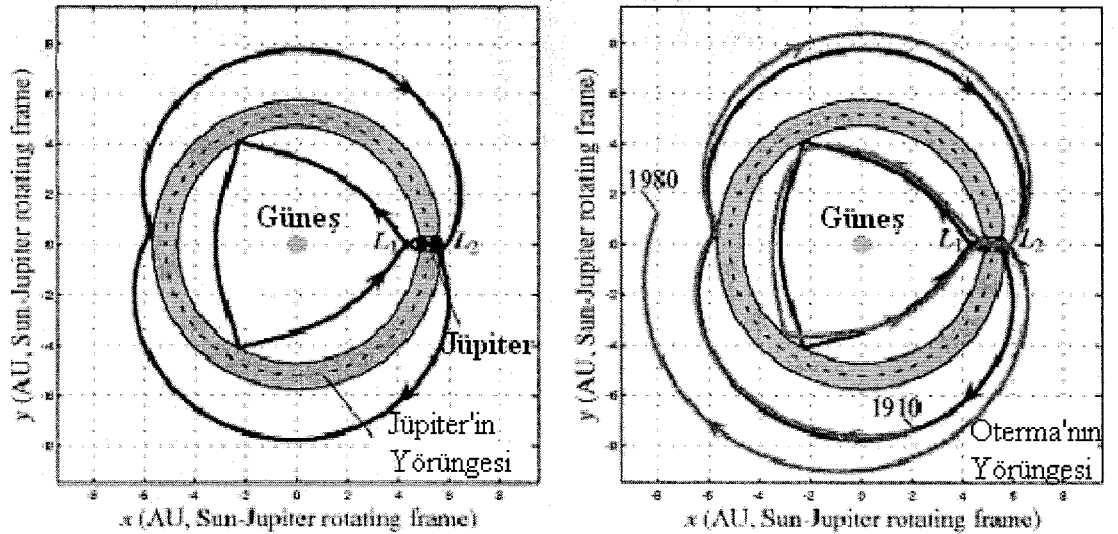


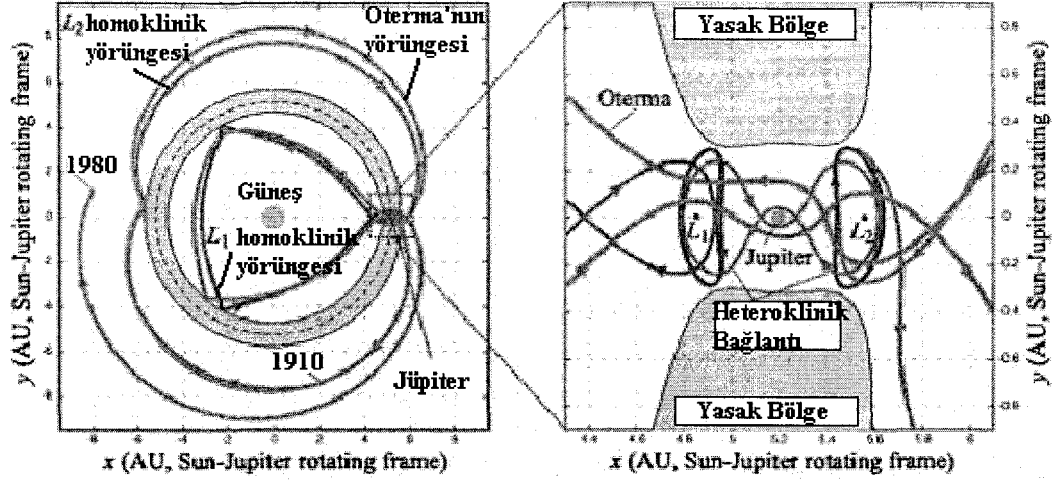
Şekil: 15 – Örnek Heteroklinik Yörünge (Periyot = 173 yıl)

### 2.5.3. Homoklinik – Heteroklinik Zincir

Yukarıda sözü edilen dinamik kanalı meydana getiren “homoklinik – heteroklinik zincir (HHZ)” yapısı homoklinik ve heteroklinik yörüngelerin özelliklerinden de görüldüğü gibi, üçüncü maddesel parçacığın  $C_2$ 'nin hemen altındaki Jacobi sabiti değerleri, yani tanımlanmış üç bölge arasında geçişin mümkün olduğu durumlar için sabit enerjili hareketinin sınırlarını belirlemektedir. Bu zinciri oluşturan yörüngelerin dışında bir yol takip edilerek bölgeler arasında geçiş yapmak imkansızdır.

Bu tür bir hareketin evrende gözlemlenmiş, doğal bir örneği “Oterma” adlı kuyruklu yıldızın 1910 – 1980 yılları arasında ait Güneş - Jüpiter çekim alanındaki yörüngesidir. Şekil: 16'da, Oterma'nın  $C = 3,03$ 'e karşılık gelen sabit enerjili hareketine ait bu yörüngenin, DSK'nin Güneş – Jüpiter – Üçüncü Cisim Sistemi'nin Oterma'nın enerjisine çok yakın  $C = 3,038$ 'lik Jacobi sabiti için sağladığı zincir ile örtüşmesi görülebilir [4]:



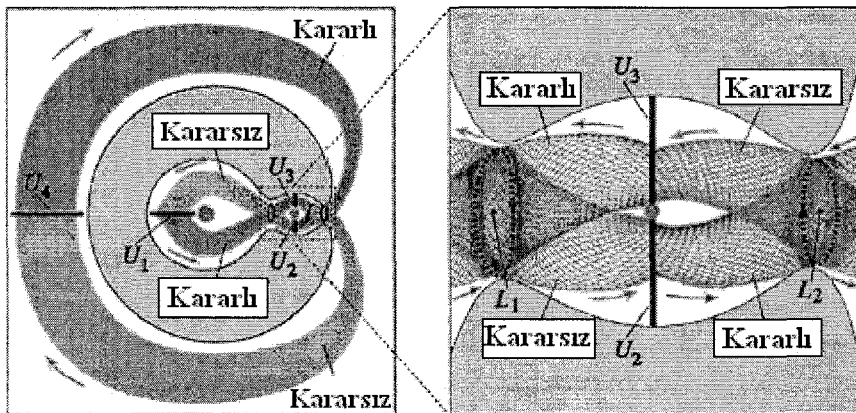


Şekil: 16 – Oterma'nın Gerçek Yörüngesinin DSK'nin Verdiği HHZ ile Örtüşmesi

## 2.6. Genel Yörünge Yapısı

DDKÜCP'nin çözüm bölgelerinden  $L_1$  ve  $L_2$  civarındaki kararsız yapının analizi için geliştirilen Dinamik Sistemler Kuramı'nın sağladığı bilgilerin ışığında, sayısal integralleme ile elde edilen tünellerin yukarıda belirtilen düzlemlerdeki Poincaré kesitlerinin birbirleriyle kesişimlerinden yararlanılarak, bir üç cisim sistemi için genel yörünge yapısı ortaya konabilir. Mevcut sistemin Jacobi sabitine, dolayısıyla enerji düzeyine ve Poincaré kesitlerinin peşpeşe kesişimlerinin hangi alt bölgeler arasında geçişlere izin verdiğine bağlı olarak, sayısal integralleme ile elde edilebilecek yörünge sınırları ve elde edilebilmesi için gerekli başlangıç konum ve hız koşulları belirlenmiş olur. [4]'de, ele alınan Güneş – Jüpiter – Oterma sistemi için Şekil 16'da HHZ ile üstüste gösterilmiş olan gerçek yörünge, sistemin genel yörünge yapısının çıkarılmasına yönelik simülasyon adımları izlenerek sayısal olarak elde edilebilmiştir.

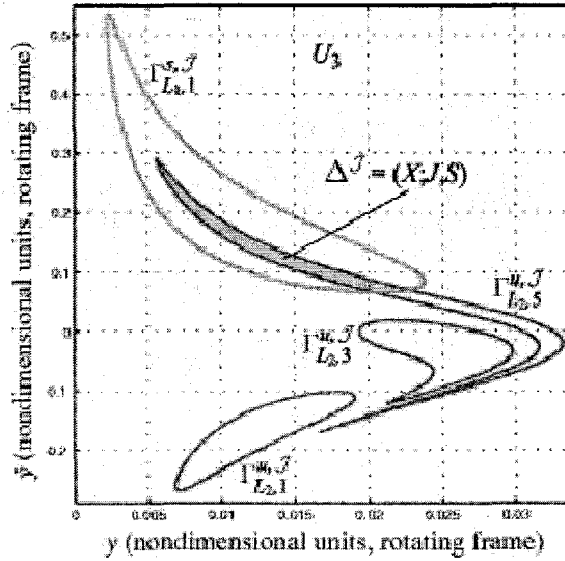
Oterma kuyruklu yıldızı 1910 – 1980 arasındaki hareketinde, önce dış alt bölgede Hill bölgesinin dış sınırı çevresinde bir tur attıktan sonra Jüpiter'in yakınından geçerek iç alt bölgeye (Güneş civarı) girmekte ve Güneş'in çevresinde Hill bölgesinin iç sınırına yakın olarak attığı turun ardından tekrar Jüpiter civarından geçerek dışarıya kaçmaktadır. Bunun için Poincaré kesitleri alınacak değişmez tüneller ağı Şekil: 17'de görülmektedir:



Şekil: 17 – Değişmez Tüneller Ağı ve DSK'de Poincaré Kesitlerinin Alındıkları Yerler ( $U_1$ ,  $U_2$ ,  $U_3$ ,  $U_4$ )

Burada  $U_1$  ve  $U_4$ , ilki iç, ikincisi dış alt bölgede olmak üzere tünellerin  $y = 0$  düzleminin  $x < 0$  bölgesindeki yarısı tarafından kesildikleri,  $U_2$  ve  $U_3$  ise Jüpiter'in üzerinde bulunduğu  $x = 1 - \mu$  düzlemi tarafından kesildikleri yerlere karşılık gelmektedir.

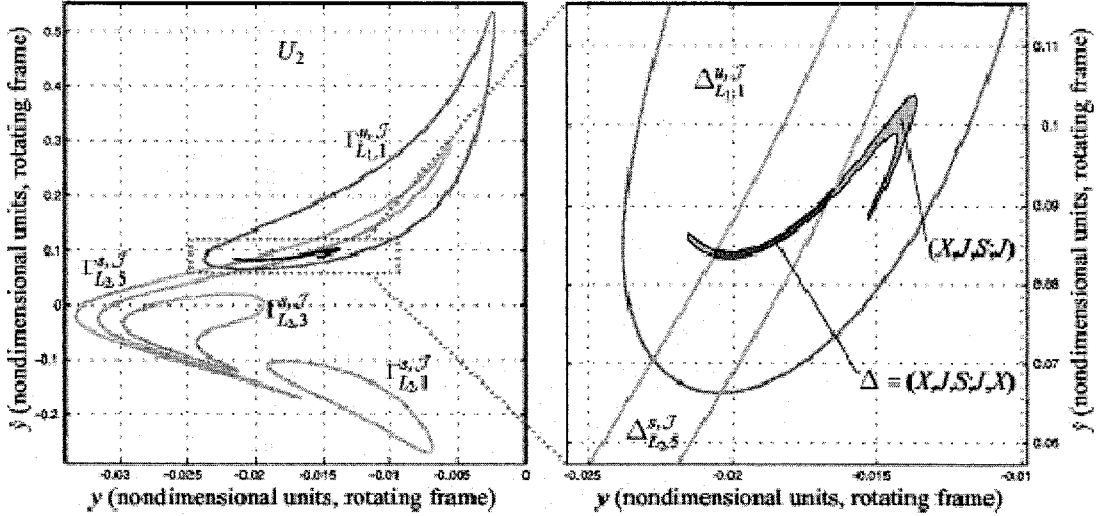
Dinamik Sistemler Kuramı'nda  $U$  kesitlerinde alınan Poincaré kesitleri ve kesiti alınan değişmez tüneller belli gösterimlere sahiptir. Bu gösterimleri  $U_3$  kesiti üzerinde açıklayabiliriz: [4] no'lu kaynaktaki, öncelikle dış alt bölge, Jüpiter civarı ve iç alt bölge sırasını izleyerek geçiş yapmayı mümkün kılacak yörüngeler aranmıştır. Bunun için  $U_3$ 'te  $L_2$ 'nin Jüpiter civarındaki kararsız tüneli ( $\Gamma_{L_2,5}^{u,J}$ ) ile  $L_1$ 'in Jüpiter civarındaki kararlı tünelinin ( $\Gamma_{L_1,1}^{s,J}$ ) birbirleriyle kesişmeleri sağlanana dek Poincaré kesitleri alınmıştır. Kesitlerin sembolik ifadesinde üst indisler sırası ile kesilen tünelin kararlı ya da kararsız olduğunu ve hangi alt bölgede kesit alındığını gösterirken, alt indisler de sırası ile tünelin hangi Lagrange noktasına bağlı ve kesitin yörüngeler takımının  $U_3$ 'ü kaçınıcı kesisine ait olduğuna işaret eder. Alt indislerden anlaşılan kararsız tüneli meydana getiren yörüngelerin  $U_3$ 'ten ancak beşinci geçişlerinde kararlı tüneli oluşturan yörüngelerle buluşabildikleridir. Dolayısıyla  $L_2$  civarından  $L_1$  civarına geçiş sırasında yörüngeler Jüpiter etrafında iki tur atmaktadır. Bu buluşmaya karşılık gelen kesitlerin kesişimi Şekil: 18'de verilmiştir:



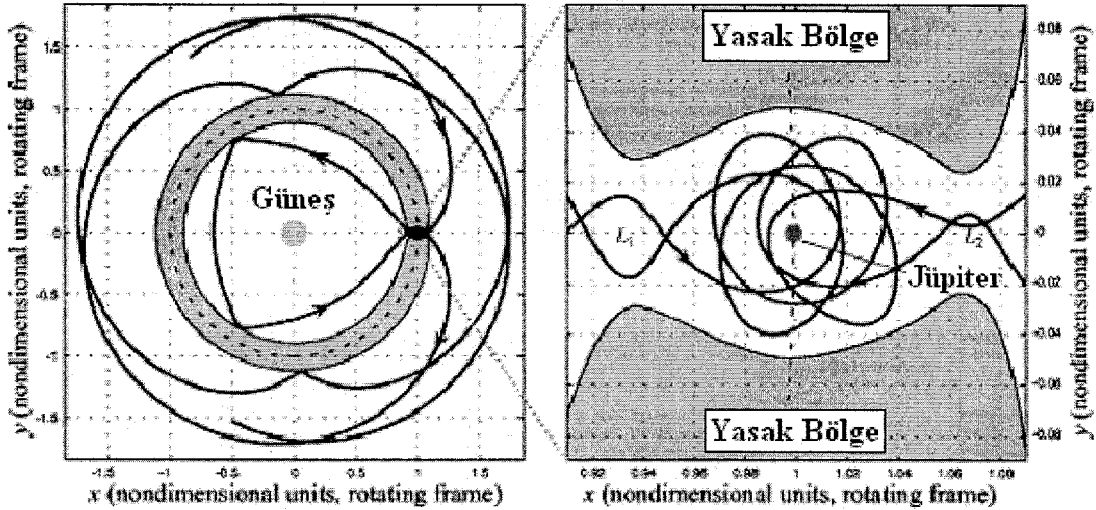
**Şekil: 18 – XJS Geçişini Sağlayan Yörüngelerin Bulunması**

Bu kesişim  $\Delta^J = (X; J, S)$  olarak ifade edilmektedir. Üst indis hangi alt bölgede bulunulduğunu belirtirken noktalı virgölün bulunulan alt bölgeden önce kullanıldığı parantez içerisindeki sıralama da  $\Delta^J$  kesişim bölgesine dahil  $y$  ve  $dy/dt$  başlangıç konum ve hızları ile zamanda ileriye ve geriye doğru gerçekleştirilecek sayısal integrallemenin vereceği yörüngenin hangi bölgeler arasında ve hangi sıra ile geçiş yapabileceğini simgelemektedir. Sırası ile  $U_3$ ,  $U_1$  ve  $U_2$ 'de alınan Poincaré kesitlerinin sayısal integrasyon ile zamanda ilerletilmesi ve bu sayede sürekli şekilde peşpeşe kesişimlerinin alınması yoluyla gerçekleştirilen [4] no'lu kaynaktaki simülasyonun sonucunda Şekil: 19'da görülen  $\Delta = (X, J, S; J, X)$  kesiti elde edilmiştir. Ardından  $\Delta$  bölgesinde bir başlangıç  $y$  konumu ve  $dy/dt$  hızı seçilmiş ve DDKÜCP'deki hareketi tanımlayan denklemler zamanda ileriye ve geriye doğru sayısal olarak integrelenerek, Jüpiter civarı, iç alt bölge, yeniden Jüpiter civarı

ve yeniden dış alt bölge sırasını izleyerek Oterma'nın hareketine benzer bir hareket ortaya koyan örnek bir yörünge elde edilmiştir. Yararlanılan [4] no'lu çalışmada verilmiş olan bu yörünge Şekil: 20'de görülebilir:



Şekil: 19 – XJSJX Geçişini Sağlayan Yörüngelerin Bulunması

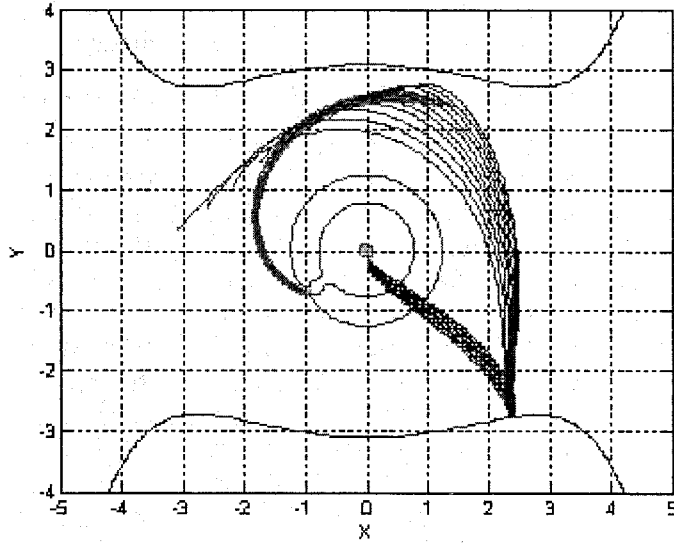


Şekil: 20 – Simülasyon Sonucunda Elde Edilen Yörünge

### 3. Tünel – Yay Yöntemi

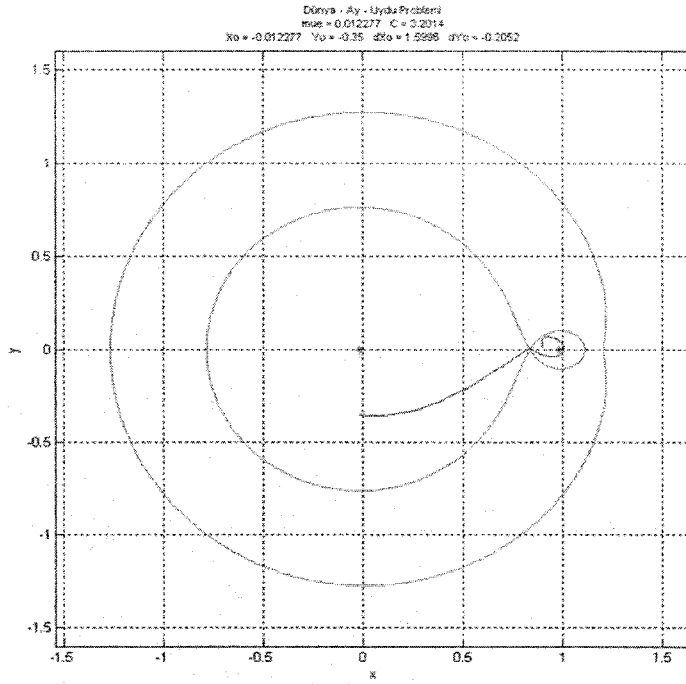
AEA yörüngeleri, Hohmann aktarımı ile karşılaştırıldıklarında daha uzun yolculuk sürelerine sahiptir. Dolayısıyla, şu aşamada insanlı yolculuklara uygun gözükmeler de, daha ileri yörünge oluşturma tekniklerinin ve daha da önemlisi yine DSK'nin esaslarına dayanılarak yeni yaklaşımların geliştirilmesi ile süre azaltılabilmektedir. Örneğin, Dünya'dan Ay'a gidiş için [7] no'lu kaynakta ortaya konmuş olan yaklaşım ile, uygun başlangıç koşulları sağlandığı takdirde, hem gerekli hız değişimi miktarı ( $\Delta V_{\text{toplam}}$ ), hem de yolculuk süresi azaltılmıştır. Üç Cisim Problemi'ni esas alarak Dünya'dan Ay'a gidiş ile ilgili olarak o güne dek gerçekleştirilmiş belli başlı çalışmalar, yaklaşım yöntemleri ve

karşılaştırılmalarını mümkün kılacak sonuçları ( $\Delta V_{\text{toplam}}$  ve süre) ile [8] no'lu kaynağın 6. bölümünde verilmiş durumdadır. İkisi [7] no'lu kaynağın yazarlarından olan bu makalenin yazarları, bu bölümün sonunda yukarıda kastedilmiş olan yeni bir yaklaşımın ve bu yolla elde ettikleri sonuçların üzerinde durmaktadırlar. Sadece tek bir DKÜCP'nin ele alındığı bu yöntemde, AEA yörüngesinin üzerine yalnız Dünya-Ay-uzay aracı (DAU) sisteminin etki ettiği kabul edilmekte ve Güneş'in etkisinin göz ardı edilebilir olduğu varsayılmaktadır. Bu yöntemi daha uygulanabilir kılan ve bu çalışmada gerçekleştirilen simülasyonda (bkz. Şekil: 21) izlenen "Mafsallı Birleşik Sistem" yaklaşımından kesin bir şekilde ayıran özelliği, uzay aracının Ay civarına DAU sisteminin  $L_1$  noktasının bulunduğu boğazdan girmesidir. Bu sayede, uzay aracı Ay'a Dünya'nın etkisinin Güneş'inkine göre daha baskın olduğu bölgeden



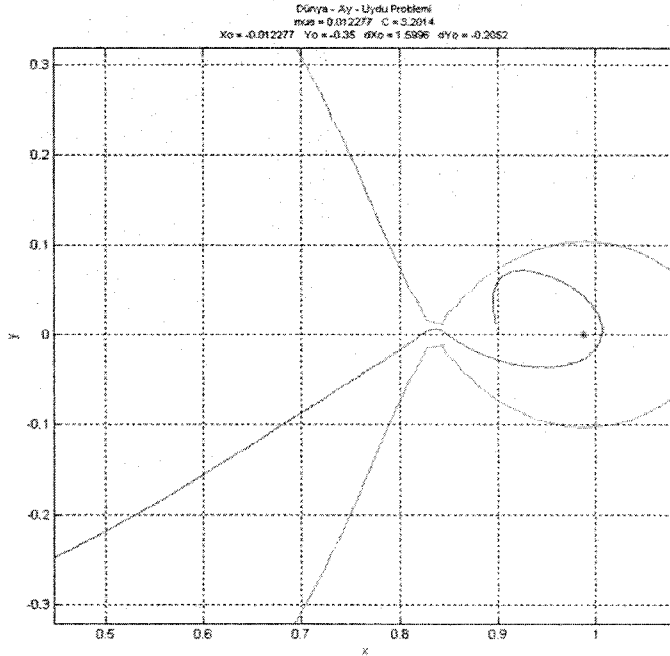
**Şekil: 21** – Değişmez Tünellerin Uygun Şekilde Kesiştirilmesine Yoluyla Dünya'dan Ay'a Gidiş Simülasyonu

yaklaşmaktadır. Eldeki yazılım ve program imkanları ile elde edilmiş olan bu tip bir yörünge Şekil: 22'de gösterilmiştir. Böyle bir yörünge ayrıca diğer yöntemdekine göre daha düşük enerjiye sahiptir, çünkü bu görevin simülasyonu sırasında, DAU sisteminin C değerinin  $C_1$ 'in hemen altında, dolayısıyla  $L_2$  noktası civarının kapalı olduğu,  $L_1$  noktası civarında ise çok küçük bir açıklığa sahip bir boğazın mevcut olduğu durum ele alınmaktadır. Şekilde görüldüğü gibi, uzay aracının Dünya civarından 1 no'lu serbestlik noktasına uzanan kararlı değişmez tünelin içine sokulması onu boğaza ulaştırmakta ve boğazdan geçtikten sonra da söz konusu noktadan Ay civarına uzanan kararsız tünelin etkisi ile Ay'ın çevresinde kararsız periyodik yörüngeler çizmeye başlamaktadır. Boğaz bölgesinin bir zayıf kararlılık sınırı olmasından dolayı tam bu bölgeden geçmekte iken çok düşük yakıt sarfiyatı ile gerçekleştirilecek bir manevra, uzay aracını Ay çevresinde bir Kepler yörüngesine oturtmak için yeterli olacaktır. Şekil: 22'deki sistemin  $L_1$  civarı Şekil: 23'te daha yakından gösterilmiştir. Burada akılda soru işareti oluşturabilecek bir husus söz konusudur. Yörünge'nin Dünya civarındaki kolu Dünya'dan oldukça uzakta olduğundan, (yapılan denemelerde bu kolun Dünya'ya en yakın olduğu durumda  $0,35'$ lik boyutsuz, dolayısıyla



Şekil: 22 –  $L_1$  Boğazından Geçerek Dünya'dan Ay'a Gidiş Yörüngesi

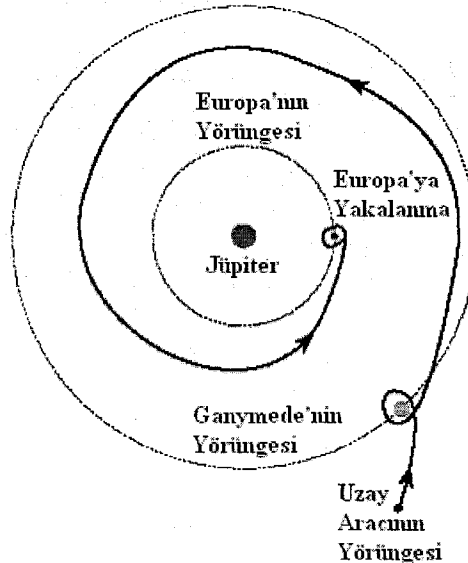
$0,35 \cdot (\text{Dünya-Ay mesafesi}) = 0,35 \cdot (384400 \text{ km}) = 134540 \text{ km}$ 'lik bir uzaklığa sahip olduğu saptanmıştır. AEA yörüngesinin Dünya'ya daha yakın olamamasının arkasında yatan neden 2.3. no'lu alt bölümde değinilmiş olan değişmez torların varlığıdır; yörünge iç alt bölgedeki değişmez torun dışında kalmak durumundadır.) Dünya'nın çevresindeki bir park



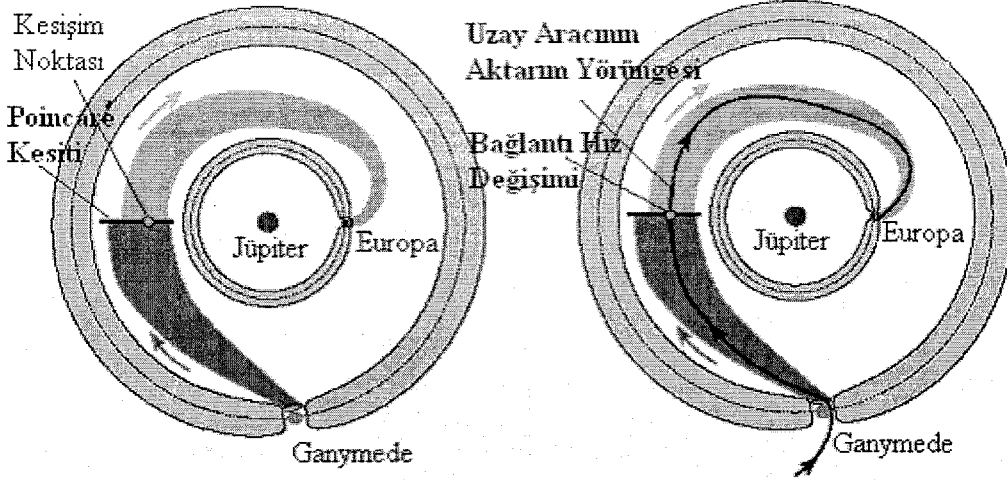
Şekil: 23 – Şekil: 22'deki Sistemin  $L_1$  Civarının Yakından Görünüşü

yörüngesinden bu kola bağlantı nasıl sağlanacaktır? Bunun cevabı “Üç Cisim Lambert Problemi” ile verilmektedir. Bir “iki nokta sınır değer problemi” olan “klasik (İki Cisim) Lambert Problemi”nden farklı olarak söz konusu sistemde Dünya ve uzay aracına ek olarak Ay’ın da etkisi hesaba katılarak park yörüngesi ile AEA yörüngesi arasında uygun bir bağlantı yayı hesaplanmaktadır. Buradan şu sonuç çıkarılabilir: AEA yörüngelerinin simülasyonlarında ele alınan problemlere yeni yaklaşımlar getirilmesinde, ele alınabilecek problemlerin zenginleştirilmesinde ve bu sayede tüm Güneş Sistemi’ni kapsayabilecek genellikte bir yöntemin geliştirilmesinde Dinamik Sistemler Kuramı’na Lambert Problemi’nin eşlik etmesi bir gereklilik olarak ortaya çıkmaktadır. [7] no’lu kaynağın öz kısmında bu yeni ve daha zengin yaklaşım “Patching Conic – Manifolds Method” olarak adlandırılmıştır. Buna Türkçe karşılık olarak “Tünel – Yay Yöntemi” uygun görülmüştür.

Yukarıda yapılan saptamayı destekler nitelikte, literatürdeki başka çalışmalardan da bahsetmek yerinde olacaktır. Sadece iki ayrı sisteme ait değişmez tünellerin hesaplanan bir bağlantı hız değişimi aracılığı ile birleştirilmesi esasına dayanılarak, literatürde çeşitli çalışmalarda esas alınarak simülasyonu gerçekleştirilebilmiş olan “Eşmerkezli Birleşik Sistemler”in özelliği, iç içe dönmekte olan iki farklı üç cisim sistem için ortak olan en büyük kütleli cismin etrafında dolanmakta olan ikinci büyük kütleli cisimlerin birbirlerine yakın olmalarıdır. Bunun açıklaması şu şekilde yapılabilir: İçteki üç cisim sisteminin dış homoklinik yörüngeleri dıştaki sistemin iç değişmez torunun dışında kalmakta ve dıştaki üç cisim sisteminin iç homoklinik yörüngeleri ise, içteki sistemin dış değişmez torunun içinde kalmaktadır. Eşmerkezli Birleşik Sistemler’in simülasyonlarında iç içe konumlanmış durumda olan iki sistemin açılal hızlarındaki farkı hesaba katmayı sağlayacak şekilde geliştirilmiş dinamik Poincaré kesiti alıcı programlar kullanılmaktadır. [9] no’lu kaynakta böyle bir problem ele alınmıştır. Bu makalede, birbirine yukarıda tanımlanan koşulu sağlayacak yakınlıkta olan Jüpiter’in iki uydusu, Jüpiter’e daha yakın olan Europa ile Ganymede arasında bağlantı kuran bir AEA yörüngesinin simülasyonu ortaya konmuştur. Yazarların “Petit – Grand Tour (Küçük – Büyük Tur)” adını koydukları bu çalışma ile elde edilen yörünge Şekil: 24’te görülebilir. Bu yörüngeyi takip ettiği değişmez tünel yapısı da Şekil: 25’te verilmiştir. Değişmez tünel yapılarının görev tasarımı için yeterli olmadığı



Şekil: 24 – Küçük – Büyük Tur Yörüngesi [9]

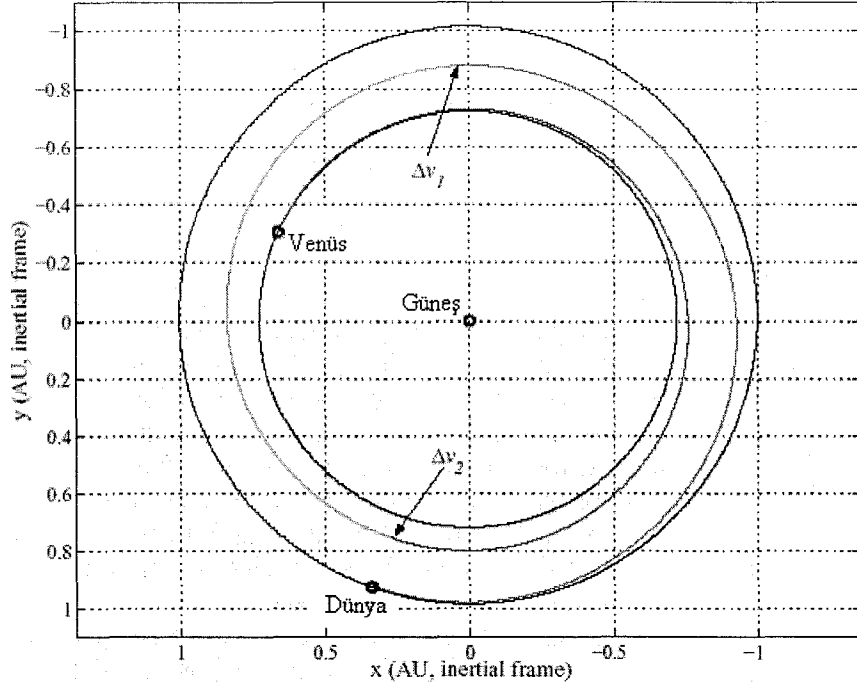


Şekil: 25 – Şekil: 24'teki Yörüngenin Takip Ettiği Değişmez Tünel Yapısı [9]

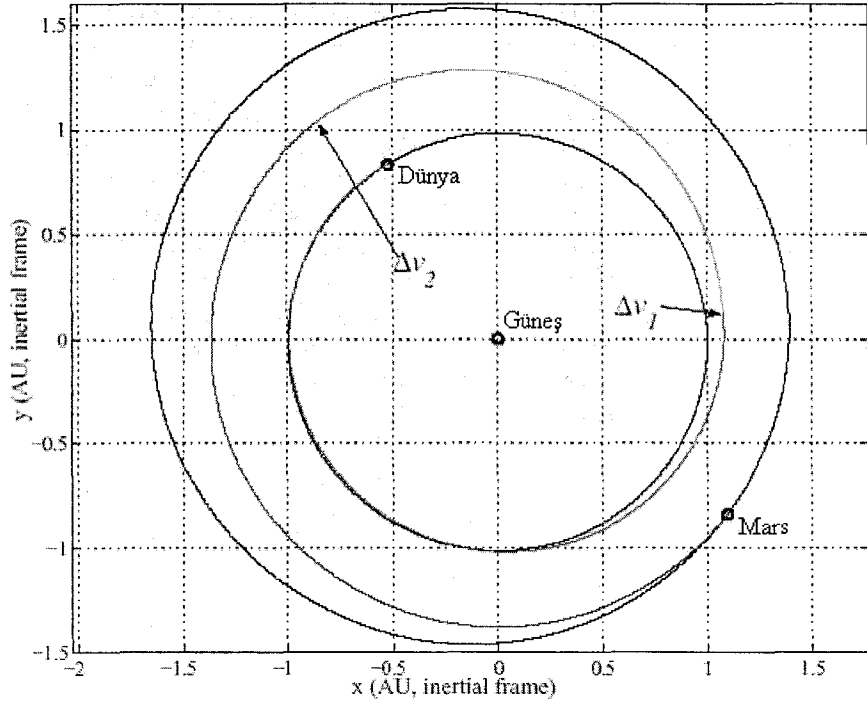
Eşmerkezli Birleşik Sistemler için ise “Tünel – Yay Yöntemi”ne başvurulma zorunluluğu vardır. Neredeyse tüm gezegenlerarası seyahat problemleri bu tip sistemlere örnek oluşturduğundan, Güneş Sistemi ölçeğinde görev tasarımları söz konusu olduğunda, DSK Lambert Problemi ile desteklendiği takdirde işlevsellik kazanmaktadır. [7] ve [8]'de ele alınmış olan Dünya'dan Venüs'e ve Dünya'dan Mars'a gidiş problemlerinde, en büyük kütleli cisim olan Güneş ortak merkezde bulunmakta ve ayrı sistemlerin ikinci büyük kütleli cisimlerinin (Dünya ile Venüs ve Dünya ile Mars) birbirlerine mesafeleri değişmez torlar ile ilgili koşulu sağlamaktan oldukça uzak olacak şekilde büyüktür. Bu durumda iç içe sistemler arasındaki bağlantı İki Cisim Lambert Problemi'nin çözülmesi yoluyla elde edilen aktarım yayları aracılığı ile sağlanmaktadır. Bu tür simülasyonlarda, Dünya'dan Ay'a gidiş probleminden farklı olarak klasik Lambert Problemi'nden yararlanılmasının nedeni iki sistem arasında kalan, her iki sisteme ait ikinci büyük kütleli cisimlerin çekim etkilerinin az olduğu bölgede uzay aracına etki eden çekim kuvvetinin sadece Güneş'ten kaynaklandığı kabul edilebileceğinden aracın hareketinin iki cisim problemi yaklaşımı ile ele alınabilmesinin mümkün olmasıdır. Değişmez tünelleri izleyerek Hill bölgelerinden mümkün olduğunca uzaklaşarak birbirlerine yaklaşan iki ayrı sisteme ait yörüngeler, uç noktaları için çözülen sınır değer problemi ile bulunan uygun bir Lambert yayı ile birbirlerine bağlanmaktadır. [7] no'lu kaynakta belirtildiği gibi, Tünel – Yay Yöntemi'ne dayanılarak yapılabilecek gezegenlerarası yolculuk için gerekli  $\Delta V_{\text{toplam}}$  dört bileşene sahiptir. Birinci bileşen uzay aracını Dünya etrafındaki bir park yörüngesinden Güneş-Dünya-uzay aracı (GDU) sisteminin Venüs'e gidilmekte ise  $L_1$  civarından, Mars'a gidilmekte ise  $L_2$  civarından ayrılan kararsız değişmez tüneli oluşturan yörüngelerden birine oturtmak için gerçekleştirilen manevradır ve  $\Delta V_S$  ile gösterilir. İkincisi aracın tünel yörüngesinden Lambert yayına geçişini sağlayan hız değişimi olan  $\Delta V_1$ 'dir. Üçüncüsü Lambert yayından aracı gidilmekte olan gezegene taşıyacak olan kararlı tüneli oluşturan yörüngelerden birine geçiş için gerekli olan manevradır ( $\Delta V_2$ ). Son bileşen, Güneş-Gezegen-uzay aracı sisteminin Venüs'e gidilmekte ise  $L_2$  civarına, Mars'a gidilmekte ise  $L_1$  civarına uzanan kararlı değişmez tünel yörüngesini takip ederek gezegen yakınına varan uzay aracının bu gezegen çevresinde bir kapalı yörüngeye oturtulması için hızın değiştirilme değeri olan  $\Delta V_E$ 'dir:

$$\Delta V_{\text{toplam}} = \Delta V_S + \Delta V_1 + \Delta V_2 + \Delta V_E \quad (6)$$

Söz konusu makalelerde üzerinde durulan bu iki simülasyon sonucunda elde edilmiş olan yörüngeler Şekil: 26 ve 27'de görülmektedir.



Şekil: 26 – Tünel – Yay Yöntemi İle Dünya'dan Venüs'e Gidiş Yörüngesi [8]



Şekil: 27 – Tünel – Yay Yöntemi İle Dünya'dan Mars'a Gidiş Yörüngesi [8]

## Sonuç

Genel itibariyle, yeni bir yöntem ile ilgili araştırma yapılarak esaslarının anlaşılmasına ve anlatılmaya çalışılması şeklinde gerçekleştirilen bu çalışmada, Dinamik Sistemler Kuramı'nın Güneş Sistemi'ndeki çoğu gök cismi ile ilgili görev tasarımlarına imkan verdiği; bunlardan birbirlerine yakın olanlar arasındaki alçak enerjili aktarım yörüngelerinin, tek üç cisim sistemi ya da mafsallı veya eşmerkezli birleşik sistemler olarak adlandırılan dört cismin meydana getirdiği iki üç cisim problemi yaklaşımları ile, uzak olanlar arasındaki AEA yörüngelerinin ise, Tünel – Yay Yöntemi kullanılarak elde edilebildiği ortaya konmuştur.

Hem bilimsel açıdan, hem de mühendislik açısından önemli ve ilgi çekici olan Dinamik Sistemler Kuramı'nın, Lambert Problemi gibi Astrodinamik'in klasik bir aracı ile tümlendirilebiliyor olması, araştırmacının diğer Gök Mekaniği alanlarında arayışlara girmesine önayak olarak, onun ufkunun genişlemesine vesile olabilir. Esas itibariyle sayısal yöntem kullanımına dayanan uygulanma biçimi ile de, araştırmacının kendisini bu yönden geliştirmesini gerekli kılar. Dolayısıyla, çok yönlü bir araştırma ve uzmanlaşma alanı olarak değerlendirilebilecek bu yöntemden, Dünya genelinde yakın gelecek için planlanan uzay çalışmalarında gittikçe artan bir oranla yararlanılacağı öngörülebilir.

## Kaynaklar

- [1] Lo, M. W., Ross S. D., "SURFing the Solar System: Invariant Manifolds and the Dynamics of the Solar System", JPL IOM 312/97, 1997.
- [2] Maccone, C., "Optimal Trajectories from the Earth-Moon  $L_1$  ve  $L_3$  Points to Deflect Hazardous Asteroids and Comets, International Academy of Astronautics, Italy.
- [3] Roy, E. A., Orbital Motion, Adam Hilger, New York, 1991.
- [4] Koon W. S., Lo M. W., Marsden J. E., Ross S. D., "Heteroclinic Connections Between Periodic Orbits and Resonance Transitions In Celestial Mechanics", Chaos, 10(2), 427-469, June 2000.
- [5] Ross, S. D., "Cylindrical Manifolds and Tube Dynamics in the Restricted Three-Body Problem", In Partial Fulfillment of the Requirements for the Degree of Doctor of Philosophy, California Institute of Technology, Pasadena, California, 2004.
- [6] Elvik, S., Optimization of a Low-Energy Transfer to Mars Using Dynamical Systems Theory and Low-Thrust Propulsion, Final Graduation Project of the Master of Science Program, Faculty of Aerospace Engineering of the Delft University of Technology, 2004.
- [7] Topputo F., Vasile M., Bernelli-Zazzera F.; Interplanetary and Lunar Transfers Using Libration Points; Dipartimento di Ingegneria Aerospaziale, Politecnico di Milano, Via La Masa, 34-20156-Milan, Italy.
- [8] Bernelli F., Topputo F., Massari M.; Assessment of Mission Design Including Utilization of Libration Points and Weak Stability Boundaries; Dipartimento di Ingegneria Aerospaziale, Politecnico di Milano, 2004.
- [9] Koon W. S., Lo M. W., Marsden J. E., Ross S. D.; Constructing a Low Energy Transfer Between Jovian Moons; Proceedings of the International Conference on Celestial Mechanics, Northwestern University, Chicago, Illinois, 15-19 December, 1999.