

## ÜÇ CANLI TÜRÜNÜN OLUŞTURDUĞU BESİN ZİNCİRİ MODELİNDE KAOS

Rukiye KARA<sup>1</sup> ve Mehmet CAN<sup>2</sup>

### ÖZET

Bu çalışmada, aynı ekosistem içerisinde yaşayan üç farklı canlı türü arasındaki etkileşimi inceleyen bir besin zinciri modeli ele alınmış ve bu modelin denge noktalarında sistemin kararlılık analizleri yapılmıştır. Ayrıca sayısal çözüm yöntemleri ile sistemin dinamiklerinin üç boyutlu faz uzayı çizilmiş ve başlangıç koşullarına hassas bağıllığı incelenmiştir.

*Anahtar kelimeler:* popülasyon dinamikleri, kaos, nonlinear sistemler.

### GİRİŞ

Ekolojik sistemlerin matematiksel modelleri, bu modellerin bilgisayar simülasyonları ve bunların gerçek ekolojik verilerle karşılaştırılması, bu tür sistemlerin kontrol edilmesinde ya da kısa vadede sistemin geleceğinin tahmin edilmesinde yardımcı olurlar.

Bu çalışmada, aşağıda gösterilen, üç tane birinci mertebeden nonlinear adi diferansiyel denklemden oluşan, besin zinciri modeli göz önüne alınmıştır:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= x(a_1 - b_1x - c_1y), \\ \frac{dy}{dt} &= y(-a_2 + c_2x - d_1z), \\ \frac{dz}{dt} &= z(-a_3 + d_2y).\end{aligned}\tag{1}$$

Yukarıdaki modelde  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , sırasıyla, en alt basamaktaki av (zararlı böcek), orta basamaktaki avcı ve en üstteki avcı türlerinin nüfus yoğunluğunu göstermektedir.

Yukarıdaki besin zinciri modeline ait lineer olmayan diferansiyel denklem sistemi, A.Clark [1] tarafından hazırlanmış olan dinamik sistemler paketi yardımıyla, seçilen bir parametre değerleri kümesine ve belli başlangıç değerlerine göre sayısal olarak çözüldü. Sistemin denge noktaları bulundu ve incelendi. Düzensizlik çeşitleri ve kaosu varlığını görebilmek için biyolojik parametreler çeşitli aralıklarda değiştirildi. Bunun sonucunda, bazı parametrelerde uygun değerlerin seçimi ile modelin kaotik dinamikler ürettiği görüldü.

### KARARLILIK ANALİZİ

Bu bölümde sistem (1)'in denge noktaları bulunup bu noktalarda sistemin kararlılık analizi yapılacaktır.

<sup>1</sup> İstanbul Teknik Üniversitesi, Matematik Bölümü, 34469 İstanbul, Türkiye, 0212 5408334, ru\_kara@yahoo.com

<sup>2</sup> International University of Sarajevo, Faculty of Engineering and Natural Sciences, Paromlinska 66, 71000 Sarajevo, Bosnia Herzegovina, mcun@iis.edu.ba

Sistem (1)'in denge noktalarını bulmak için denklemlerin sağ tarafları sıfıra eşitlenir:

$$\begin{aligned}x(a_1 - b_1x - c_1y) &= 0, \\y(-a_2 + c_2x - d_1z) &= 0, \\z(-a_3 + d_2y) &= 0.\end{aligned}$$

Bu eşitliklerin çözümünden bulunan biyolojik olarak anlamlı denge noktaları:

$$E_0 = (0, 0, 0), \quad E_1 = \left(\frac{a_1}{b_1}, 0, 0\right), \quad E_2 = \left(\frac{a_2}{c_2}, \frac{a_2b_1 - a_1c_2}{c_1c_2}, 0\right) \text{ ve}$$

$$E_3 = \left(-\frac{a_3c_1 - a_1d_2}{b_1d_2}, \frac{a_3}{d_2}, -\frac{a_3c_1c_2 + a_2b_1d_2 - a_1c_2d_2}{b_1d_1d_2}\right) \text{ dir.}$$

$E_0 = (0, 0, 0)$  denge noktasına karşılık gelen özdeğerler:

$\lambda_1 = a_1, \lambda_2 = -a_2, \lambda_3 = -a_3$  dir ve tüm katsayılar pozitif olduğundan dolayı  $E_0$  denge noktası eyer noktadır.

$E_1 = \left(\frac{a_1}{b_1}, 0, 0\right)$  denge noktasına karşılık gelen özdeğerler :

$\lambda_1 = -a_1, \lambda_2 = -a_3, \lambda_3 = -a_2 + \frac{a_1c_1}{b_1}$  olacaktır. Buradan  $a_2 > \frac{a_1c_1}{b_1}$  ise denge noktası düğüm,

$a_2 < \frac{a_1c_1}{b_1}$  ise denge noktası eyer noktadır.

$E_2 = \left(\frac{a_2}{c_2}, \frac{a_2b_1 - a_1c_2}{c_1c_2}, 0\right)$  pozitif denge noktasının varlığı için  $a_2b_1 > a_1c_2$  olmalıdır. Bu

durumda özdeğerler:

$$\lambda_1 = \frac{-a_2b_1 - \sqrt{a_2^2b_1^2 + 4a_2^2b_1c_2 - 4a_1a_2c_2^2}}{2c_2}$$

$$\lambda_2 = \frac{-a_2b_1 + \sqrt{a_2^2b_1^2 + 4a_2^2b_1c_2 - 4a_1a_2c_2^2}}{2c_2}$$

$$\lambda_3 = -a_3 - \frac{(a_2b_1 - a_1c_2)d_2}{c_1c_2}$$

dir.  $a_2^2 b_1^2 + 4a_2^2 b_1 c_2 - 4a_1 a_2 c_2^2 > 0$  olduğundan özdeğerler reeldir ve  $\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 < 0$  olup  $E_2$  denge noktası eyer noktadır.

$$E_3 = \left( -\frac{a_3 c_1 - a_1 d_2}{b_1 d_2}, \frac{a_3}{d_2}, -\frac{a_3 c_1 c_2 + a_2 b_1 d_2 - a_1 c_2 d_2}{b_1 d_1 d_2} \right)$$
 pozitif denge noktasının varlığı için

$a_1 d_2 > a_3 c_1$  ve  $a_1 c_2 d_2 > a_3 c_1 c_2 + a_2 b_1 d_2$  olmalıdır.  $E_3$  denge noktasındaki sistemin özdeğerlerini bulmak için Jacobien matris hesaplanır:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \\ \frac{\partial F_3}{\partial x} & \frac{\partial F_3}{\partial y} & \frac{\partial F_3}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 - 2b_1 x - c_1 y & -c_1 x & 0 \\ c_2 y & -a_2 + c_2 x - d_1 z & -d_1 y \\ 0 & d_2 z & -a_3 + d_2 y \end{bmatrix}$$

$E_3$  denge noktası Jacobien matriste yerine konulduğunda;

$$J(E_3) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & 0 & a_{23} \\ 0 & a_{32} & 0 \end{bmatrix}$$

$$a_{11} = \frac{a_3 c_1 - a_1 d_2}{d_2}, \quad a_{12} = \frac{c_1 (a_3 c_1 - a_1 d_2)}{b_1 d_2}, \quad a_{23} = -\frac{d_1 a_3}{d_2}, \quad a_{21} = \frac{c_2 d_3}{d_2},$$

$$a_{32} = \frac{a_1 c_2 d_2 - a_2 b_1 d_2 - a_3 c_1 c_2}{b_1 d_1}$$

olarak bulunur.  $J$  Jacobien matrisinin karakteristik denklemini yazılırsa:

$$f(\lambda) = \text{Det}(J - \lambda I) = \lambda^3 - a_{11} \lambda^2 - (a_{23} a_{32} + a_{21} a_{12}) \lambda + a_{32} a_{23} a_{11}$$

$$A_1 = -a_{11}, \quad A_2 = -(a_{23} a_{32} + a_{21} a_{12}) \quad \text{ve} \quad A_3 = a_{32} a_{23} a_{11} \quad \text{olmak üzere}$$

$\lambda^3 + A_1 \lambda^2 + A_2 \lambda + A_3 = 0$  şeklinde yazılabilir. Burada;

$$A_1 = \frac{a_1 d_2 - a_3 c_1}{d_2} > 0 \quad (\text{Pozitif denge noktası olduğundan})$$

$$A_2 = -a_{23} a_{32} - a_{21} a_{12} > 0 \Rightarrow \frac{a_3}{d_2} \cdot \frac{a_1 c_2 d_2 - a_2 b_1 d_2 - a_3 c_1 c_2}{b_1} - \frac{c_2 d_3}{d_2} \cdot \frac{c_1 (a_3 c_1 - a_1 d_2)}{b_1 d_2} > 0$$

(pozitif denge noktası olduğundan) olacaktır.

$$A_3 = a_{32} a_{23} a_{11} = -\frac{a_1 c_2 d_2 - a_2 b_1 d_2 - a_3 c_1 c_2}{b_1} \cdot \frac{a_3}{d_2} \cdot \frac{a_3 c_1 - d_2 a_1}{d_2} > 0 \quad \text{bulunur ve}$$

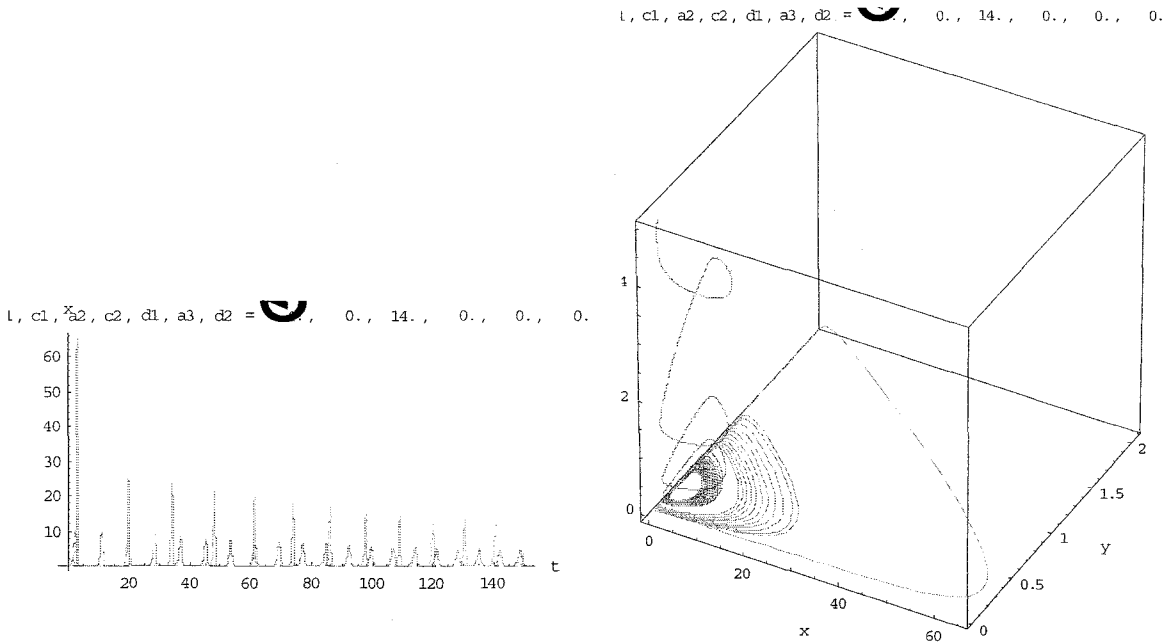
$$A_1 A_2 = A_3 + \frac{(a_1 d_2 - a_3 c_1)^2 c_1 c_2 d_3}{b_1 d_2^3} > A_3 \quad \text{dir.}$$

Bu durumda  $E_3$  denge noktası asimptotiksel kararlıdır.

### SAYISAL ÇÖZÜMLER:

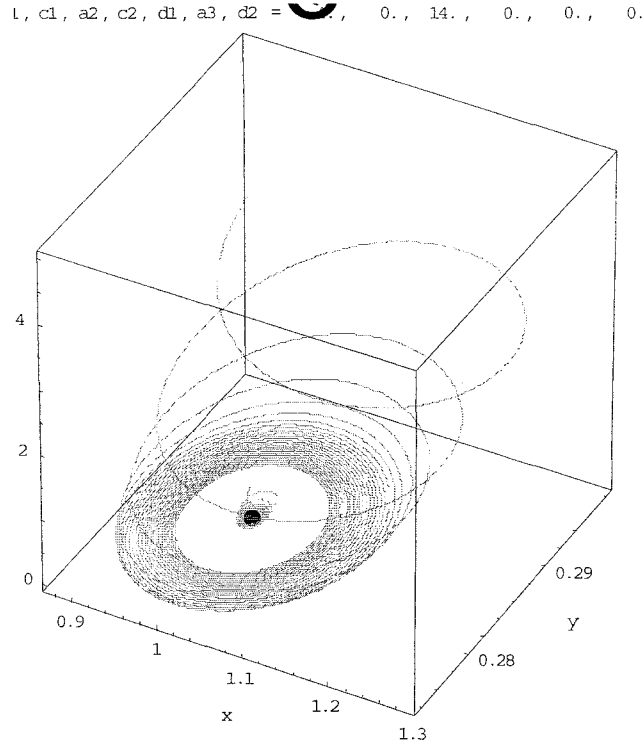
$$a_1 = 4, a_2 = 0.3, a_3 = 0.15, b_1 = 0.01, c_1 = 14, c_2 = 0.3, d_1 = 0.1, d_2 = 0.05$$

parametre değerleri,  $x_0 = 0.001, y_0 = 0.001, z_0 = 0.01$  ve  $x_0 = 0.05, y_0 = 0.1, z_0 = 0.5$  başlangıç koşulları altında sistemin faz portresi çizdirildiğinde aşağıdaki grafikler elde edilir



Şekil 1. Sistem (1)'in zaman grafiği ve faz portresi.  $x_0 = 0.001, y_0 = 0.001, z_0 = 0.01$  başlangıç koşuluna ait yörüngeler kırmızı,  $x_0 = 0.05, y_0 = 0.1, z_0 = 0.5$  başlangıç koşuna ait yörünge ise mavi renktedir.

$E_0 = (0, 0, 0)$  denge noktasının bir komşuluğundan seçilen yörüngeler zamanla birbirlerinden uzaklaşmaktadır.  $x_0 = 0.05, y_0 = 0.1, z_0 = 0.5$  popülasyon değerlerinden başlayan yörünge süreç içerisinde kaotik spiral şeklinde kıvrılarak başlangıç noktasından uzaklaşmaktadır.



Şekil 2.  $a_1 = 4, a_2 = 0.3, a_3 = 0.15, b_1 = 0.01, c_1 = 14, c_2 = 0.3, d_1 = 0.1, d_2 = 0.05$  parametre değerleri altındaki sistemin  $E_2 = (1, 0.285, 0)$  denge noktasının bir komşuluğunda seçilen başlangıç popülasyonlarının sonucunda sistemin yörüngeleri.

$\{1, 0.285, 0.01\}$  başlangıç koşulu altında sistemin çizdiği yörünge kırmızı,  $\{1, 0.285, 0.5\}$  başlangıç koşulu altında sistemin çizdiği yörünge ise mavi ile gösterilmiştir. Şekil 2 den de görüldüğü gibi başlangıç popülasyonu arttıkça sistem denge noktasından uzaklaşmaktadır.

Parametre değerleri

$$a_1 = 2, a_2 = 0.3, a_3 = 0.01, b_1 = 0.0002, c_1 = 1, c_2 = 0.3, d_1 = 0.05, d_2 = 0.005$$

olarak alındığında sistemin özdeğerleri ve bu özdeğerlere karşılık gelen öz vektörler aşağıdaki gibi olacaktır:

$$E_0 = (0, 0, 0) \text{ denge noktasına karşılık gelen öz değer } E_0 : \{2., -0.3, -0.01\},$$

$$E_1 = (10000., 0., 0.) \text{ denge noktasına karşılık gelen öz değer } E_1 : \{2999.7, -2., -0.01\},$$

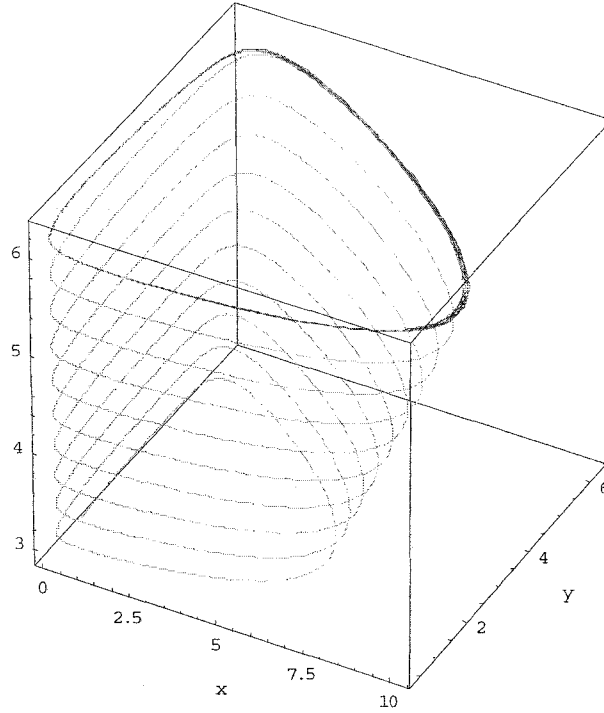
$$E_2 = (1., 1.9998, 0.) \text{ denge noktasına karşılık gelen öz değer}$$

$$E_2 : \{-0.0001+0.77458i, -0.0001-0.77458i, -1.10^{-6}\} \text{ ve son olarak}$$

$E_3 = (1.1028 \times 10^{-13}, 2, -6)$  denge noktası elde edilir. Fakat  $E_3$  denge noktası biyolojik olarak anlamlı değildir.

Sistemin, parametre değerlerine hassas bağlılığını göstermek için  $d_2$  parametresine küçük bir artım verelim ve bu artımın sistemin dinamiklerini nasıl etkilediğini inceleyelim. Şekil 3 de her iki parametre değerlerinde sistemin faz portresi görülmektedir.

,  $c_2, d_1, a_3, d_2 = 0.00, 0.00, 1.00, 0.01, 0.30,$



Şekil 3.  $a_1 = 2, a_2 = 0.3, a_3 = 0.01, b_1 = 0.0002, c_1 = 1, c_2 = 0.3, d_1 = 0.05, d_2 = 0.005$  parametre değerleri altındaki sistemin yörüngeleri. Mavi ile gösterilen  $d_2 = 0.005$  değerine karşılık gelen, kırmızı ile gösterilen ise  $d_2 = 0.0025$  parametre değerine karşılık gelen yörüngedir.

### SONUÇLAR:

Bu çalışmada lojistik olarak büyüyen üç canlı türü arasındaki ilişkinin modellendiği bir sistem ele alındı ve sistemin kararlılık analizleri yapıldı. Karasız olan denge noktasının bir komşuluğunda seçilen farklı başlangıç popülasyonlarında sistemin yörüngelerinin çok farklı yollar izlediği gözlemlendi.

### KAYNAKÇA:

- [1] Van Lenteren JC, Woets J. Biological and integrated pest control in greenhouses. *Am Ann Ent* 1988;33:239–50.
- [2] Van Lenteren JC. Measures of success in biological of anthropoids by augmentation of natural enemies. In: Wratten S, Gurr G, editors. *Measures of success in biological control*. Dordrecht: Kluwer Academic publishers; 2000. p. 77–89.
- [3] Brauer F, Soudack AC. Coexistence properties of some predator-prey systems under constant rate harvesting and stocking. *J Math Biol* 1981;12:101–14.
- [4] Brauer F, Soudack AC. Constant-rate stocking of predator-prey systems. *J Math Biol* 1981;11:1–14.
- [5] Ballinger G, Liu X. Permanence of population growth models with impulsive effects. *Math Comput Model* 1997;26:59–72.
- [6] Roberts MG, Kao RR. The dynamics of an infectious disease in a population with birth pulses. *Math Biosci* 1998;149:23–36.
- [7] Tang SY, Chen LS. Density-dependent birth rate, birth pulse and their population dynamic consequences. *J Math Biol* 2002;44:185–99.
- [8] Klebano. A, Hastings A. Chaos in three species food chains. *J Math Biol* 1994;32:427–51.

- [9] Hsu SB, Hwang TW, Kuang Y. A ratio-dependent food chain model and its applications to biological control. *Math Biosci* 2003;181:55–83.
- [10] Gakkhar S, Naji MA. Order and chaos in predator to prey ratio-dependent food chain. *Chaos, Solitons & Fractals* 2003;18:229–39.
- [11] Liu XN, Chen LS. Complex dynamics of Holling type II Lotka–Volterra predator–prey system with impulsive perturbations on the predator. *Chaos, Solitons & Fractals* 2003;16:311–20.
- [12] May RM. Biological populations with non-overlapping generations: stable points, stable cycles, and chaos. *Science* 1974;186:645–7.
- [13] May RM, Oster GF. Bifurcations and dynamic complexity in simple ecological models. *Am Natur* 1976;110:573–99.
- [14] Zhang S, Chen L, Chaos in three species food chain system with impulsive perturbations, *Chaos, Solitons & Fractals* 2005;24:73–83.
- [15] Hastings, A., Powell, T. 1991. Chaos in a three-species food chain, *Ecology* 72:896.
- [16] Gakkar, S., Naji, R.K., 2003. Order and chaos in predator to prey ratio-dependent food chain, *Chaos, Solitons and Fractals* 18:229-239
- [17] Kara, R., Can, M., 2006. Ratio-Dependent Food Chain Models with Three Trophic Levels, *International Journal of Computer Science*, Volume 1, No: 2, pp. 85-92,
- [18] Kara, R., Can, M., 2006. Hopf Point Analysis for Ratio-Dependent Food Chain Models, *Mathematical Biosciences*, (submitted).
- [19] Kara, R., Can, M., 2006. Four and Five Dimensional Metapopulation Models, *Iranian Journal of Science and Technology*, (submitted), 2006.
- [20] Kara, R., Can, M., 2006. Chaos in Food Chain Models, *Journal of Contemporary Mathematics*, (submitted).