

BÜYÜK GENLİKLİ NONLİNEER SALINIMLI KABLOLU KÖPRÜ MODELİNİN RASGELE YÜKLER ALTINDA DAVRANIŞININ İNCELENMESİ ÜZERİNE

Mehmet MERDAN¹ Erhan COŞKUN² ve Tahir KHANİYEYEV³

Özet

Bu çalışmada rüzgarlı bir havada asma kablolu köprünün rasgele yükler altında çözümünün davranışını, sönümdeki artışın ve köprüye etki eden dış kuvvetlerin üçgensel dağılıma sahip bir rasgele değişken olması durumunda Lazer ve McKenna asma kablolu köprü modeli ele alınmış, köprünün yatay konumdaki pozisyonun ilk dört momentleri hesaplanarak, beklenen değer, varyans, standart sapma, güvenlik aralığı, asimetre ve diklik katsayıları hesaplanmıştır. Ayrıca sayısal yöntemlerden yararlanarak köprünün yatay konumdaki pozisyonun için grafik simülasyonu oluşturulmuştur.

Anahtar Kelimeler: Stokastik diferensiyel denklemler, Lazer ve McKenna kablolu köprü modeli, Beklenen değer, Varyans, Güvenlik aralığı, Simülasyon

AMS(60H15)Stochastic ordinary differential equation

1.GİRİŞ

Asma köprü inşaat mühendisliği yapılarının en yaygın kullanılan tiplerinden biridir. Daha önceki çalışmalardan asma köprünün dışsal aerodinamik kuvvetler etkisi altında belirli salınımlar gösterdiği bilinir. Güçlü bir rüzgar etkisi altında, özellikle dar ve çok esnek asma köprüler tehlikeli salınımlara maruz kalabilirler. Washington eyaletindeki Tacoma Narrows Köprüsü, 7 Kasım 1940 tarihinde saatte 42 mil hızla esen rüzgarın neden olduğu türbülans yüzünden köprünün çöküşü, bu duruma verilebilecek çok çarpıcı örneklerden birisidir.

Asma köprülerin matematiksel modellemesi ile ilgili ilk çalışmalar 1950 yılında F. Bleich, C. B. McCullough, R. Rosecrans and G. S. Vincent tarafından gerçekleştirildi. O tarihten beri asma köprülerin dinamiği ile ilgili yoğun çalışmalar E. G. Willes(1960), B. Pittel ve V. Jakubovic(1969), R. H. Scanlan(1978), A. M. Abdel-Ghaffer(1982) tarafından yapıldı. Asma köprüler üzerine yapılan çalışmalar 1987 yılında Lazer ve McKenna tarafından geliştirilen yeni modeller ile hız kazanmıştır. Yeni modeller lineer olmayan kısmi diferensiyel denklem sistemi ile ifade edilmişlerdir. Bu çalışmalar arasında en göze çarpanı asma köprülerin büyük genlikli periyodik salınım ve lineer olmayan salınım modelidir.

Rüzgar yükü köprülerin yapısal tasarımında her zaman çok önemli olmuştur. Fakat rüzgar yükünün güvenilirlik ve doğruluk tanımı için rüzgarın özelliklerini ifade etmede belirsizlikler bulunmaktadır. Yapılan rüzgar analizi çalışmalarında, rüzgarın yatay olarak her yönde esebileceği ve yüksekliğe bağlı olarak da değişim gösterebileceği ifade edilmektedir. Ölçülen bu büyüklüklerin değerlendirilmesi, analizi ve ileriye yönelik tahminlerinin ya dabelli zaman aralıkları içerisindeki büyüklüklerinin belirlenmesi için deterministik ve stokastik yaklaşımlardan faydalanılmaktadır. Deterministik yaklaşımda olaylar matematiksel ifadeler yardımı ile kesin olarak belirlenmektedir. Sıcaklık ve rüzgar gibi doğa olaylarında

¹ Karadeniz Teknik Üniversitesi, Gümüşhane Mühendislik Fakültesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü
email:merdan@ktu.edu.tr

² Karadeniz Teknik Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü email:erhan@ktu.edu.tr

³ Karadeniz Teknik Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, İstatik ve Bilgisayar Bilimleri Bölümü
email:khanিয়েvtahir@yahoo.com.tr

ise pek çok değişken etkili olduğundan, bu büyüklüklerin kesin olarak belirlenmesi mümkün olmamaktadır. Bu tür problemlerin çözümünde stokastik etkenler yardımıyla mühendislik yapılarına etkiyen büyüklüklerin modellenmesi mümkün olacaktır.

Rüzgarın yatay olarak her yönde esebileceği ve yüksekliğe bağlı olarak da değişim gösterebileceği gerçeğinden yola çıkarak rüzgarlı bir havada asma kablolu köprüye etki eden dış kuvvetler sabit hızlı olmayıp rasgele olacağından, aşağıda tanımlanan modelde rüzgarın etkisini rasgele olarak aldık. Bu rasgele değişkenin de üçgensel dağılıma sahip olduğunu kabul ediyoruz, çünkü parametrenin değişimi hep bir noktanın civarında gerçekleşecektir.

1.1 Tek Boyutlu köprü salınım modeli:

Toplam potansiyel enerji $V = V(y, \theta)$ ve Toplam kinetik enerji $T = T(y, \theta)$ olmak üzere

$$V = \frac{k}{2} \left[\left((y - L \sin \theta)^2 \right)^+ + \left((y + L \sin \theta)^2 \right)^+ \right] - mgy - \frac{1}{3} mL^2 f(t) \theta \quad (1)$$

$$T = \frac{1}{2} m \dot{y}^2 + \frac{1}{6} mL^2 \dot{\theta}^2$$

ile verilir. Çözüm, $L = T - V$ ile tanımlanan enerji fonksiyonelinin minimizasyonu için gerek şartlar (Euler-Lagrange) denklemleri

$$\begin{aligned} \frac{\delta L}{\delta \theta} &= \frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = 0 \\ \frac{\delta L}{\delta y} &= \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

ile verilir. Daha açık olarak,

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = kL \cos \theta \left[(y - L \sin \theta)^+ - (y + L \sin \theta)^+ \right] + \frac{1}{3} mL^2 f(t)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = -k \left[(y - L \sin \theta)^+ + (y + L \sin \theta)^+ \right] + mg$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m \dot{y}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = \frac{d}{dt} m \dot{y} = m \ddot{y}$$

eşitliklerinden

$$\ddot{\theta} = \frac{3k}{mL} \cos \theta \left[(y - L \sin \theta)^+ - (y + L \sin \theta)^+ \right] + f(t) \quad (4)$$

$$\ddot{y} = -\frac{k}{m} \left[(y - L \sin \theta)^+ + (y + L \sin \theta)^+ \right] \quad (5)$$

elde edilir. Burada $(y - L \sin \theta)^+ = \max(0, y - L \sin \theta)$ olarak tanımlanmaktadır.

(4) denklemine $\delta\dot{\theta}$ sönüm terimi ilave ederek

$$\ddot{\theta} = -\delta\dot{\theta} + \frac{3k}{mL} \cos \theta \left[(y - L \sin \theta)^+ - (y + L \sin \theta)^+ \right] + f(t) \quad (6)$$

denklemini elde ederiz.

Kablolar da gevşemenin olmadığı kabul edilirse, $(y - L \sin \theta)^+ = y - L \sin \theta$ olup, (6) denklemini

$$\ddot{\theta} = -\delta\dot{\theta} - \frac{3k}{m} (\sin 2\theta) + f(t) \quad (7)$$

denklemine indirgenir. Aynı kabul altında (5) denklemine $\delta\dot{y}$ sönüm terimi ve g yerçekim ivmesini ilave ederek,

$$\ddot{y} = -\delta\dot{y} - \frac{2k}{m} y + g \quad (8)$$

elde ederiz.

Aşağıdaki bölümde (7)-(8) sisteminin istatistiksel karakteristiklerini uygun başlangıç koşulları ve $\varphi = 2.\pi.rand$ yada $\varphi \in (0, 2\pi)$ aralığında değişen düzgün dağılıma sahip bir rasgele değişken olmak üzere $f(t) = \lambda \sin(\mu t + \varphi)$ etkisi altında inceleyeceğiz.

1.2 Köprü salınlı modelinin istatistiksel karakteristikleri

Bu bölümde $f(t) = \lambda \sin(\mu t + \varphi)$ rasgele kuvvet fonksiyonu etkisi altında (7)-(8) sisteminin bazı istatistiksel karakteristiklerini belirliyoruz.

1.2.1. Korelasyon fonksiyonu

$X(t) = \sin(\mu t + \varphi)$, $\varphi \in [0, 2\pi]$ düzgün dağılıma sahip bir rasgele değişken olması durumuna

$X(t)$ sürecinin ortalaması

$$\bar{X} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i \quad (9)$$

olmak üzere, kovaryans fonksiyonu

$$Co(k) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{n-k} (X_{t+k} - \bar{X})(X_t - \bar{X}) \text{ ile verilir. Bu durumda korelasyon fonksiyonu}$$

$$K_x(k) = Co(k) / Co(0) = \frac{\sum_{t=1}^{n-k} (X_{t+k} - \bar{X})(X_t - \bar{X})}{\sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})^2} \quad (10)$$

şekilde tanımlanır.

$$\begin{aligned}
 K_x(\tau) &= E[\sin(\varphi) \cdot \sin(\mu\tau + \varphi)] = \frac{1}{2} E\{\cos(\mu\tau + \varphi - \varphi) - \cos(\mu\tau + \varphi + \varphi)\} \\
 &= \frac{1}{2} E\{\cos(\mu\tau) - \cos(\mu\tau + 2\varphi)\}
 \end{aligned} \tag{11}$$

Önerme 1:

$$E[\cos(\mu\tau + 2\varphi)] = 0$$

eşitliği sağlanır.

İspat:

$$K_x(\tau) = E\left[\frac{1}{2}\cos(\mu\tau)\right] = \begin{cases} \frac{1}{2} \int_0^\infty \cos(v\tau) dF_\mu(v), & \mu \neq \text{sabit} \\ \frac{1}{2} \cos(\mu\tau), & \mu = \text{sabit} \end{cases} \tag{12}$$

olur.

$$L(\theta) : \theta'' + \delta\theta' + \frac{6k}{m} = X(t),$$

$$K_y(\tau) = L^* . L.(K_x(\tau))$$

Örnek 1:

$$\omega \in \text{üstel}(\beta) \Rightarrow K_x(\tau) = \frac{\beta}{2} \int_0^\infty \cos(v\tau) e^{-\beta v} dv = \frac{\beta^2}{2(\beta^2 + \tau^2)} \tag{13}$$

Korelasyon fonksiyonu

$$K_y(\tau) = L^* . L.(K_x(\tau)) = L(L(K_x(\tau)))$$

$$\begin{aligned}
 K_y(\tau) &= \frac{192\beta^2}{(\beta^2 + \tau^2)^5 \tau^4} - \frac{144\beta^2}{(\beta^2 + \tau^2)^4 \tau^2} + \frac{12\beta^2}{(\beta^2 + \tau^2)^3} - \frac{24\alpha\beta^2}{(\beta^2 + \tau^2)^4 \tau^3} + \frac{12\alpha\beta^2}{(\beta^2 + \tau^2)^3 \tau} \\
 &+ \frac{4\beta^3}{(\beta^2 + \tau^2)^3 \tau^2} - \frac{\beta^3}{(\beta^2 + \tau^2)^2} \\
 &+ \alpha \left[-\frac{24\beta^2}{(\beta^2 + \tau^2)^4 \tau^3} + \frac{12\beta^2}{(\beta^2 + \tau^2)^3 \tau} + \frac{4\alpha\beta^2}{(\beta^2 + \tau^2)^3 \tau^2} - \frac{\alpha\beta^2}{(\beta^2 + \tau^2)^2} - \frac{\beta^3}{(\beta^2 + \tau^2)^2} \right] \\
 &+ \beta \left[\frac{4\beta^2}{(\beta^2 + \tau^2)^3 \tau^2} - \frac{\beta^2}{(\beta^2 + \tau^2)^2} - \frac{\alpha\beta^2}{(\beta^2 + \tau^2)^2 \tau} + \frac{\beta^3}{2(\beta^2 + \tau^2)} + c \right] + c
 \end{aligned}$$

1.2.2 Çözüm eğrileri:

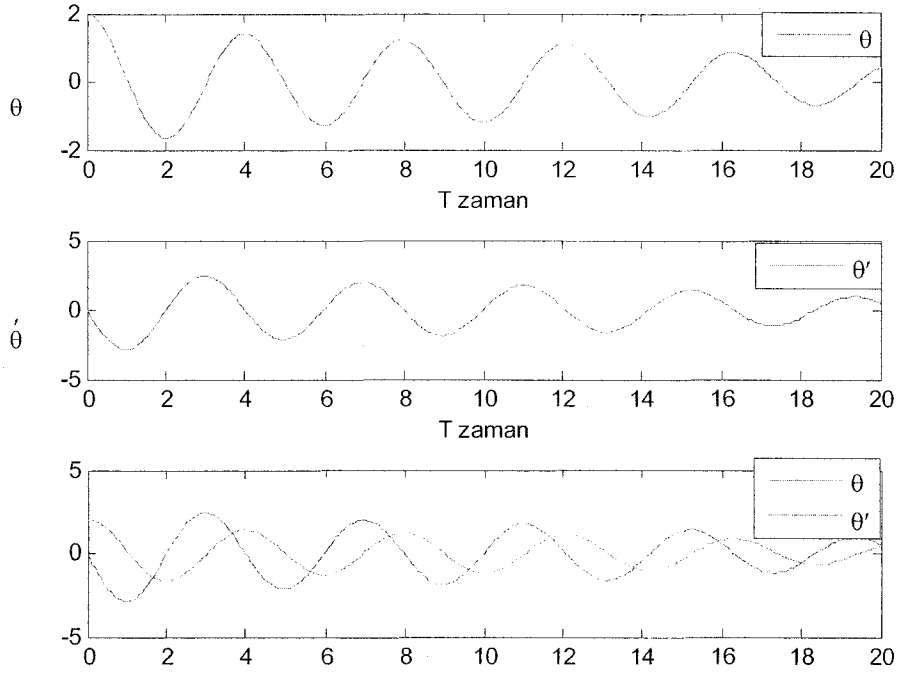
Bu bölümde

$$\delta = (1 - rand + rand) \in \Delta(0, 2),$$

$$\frac{6k}{m} = (2 + rand - rand) \in \Delta(1, 3)$$

$$\lambda = rand \in \Delta(0, 1)$$

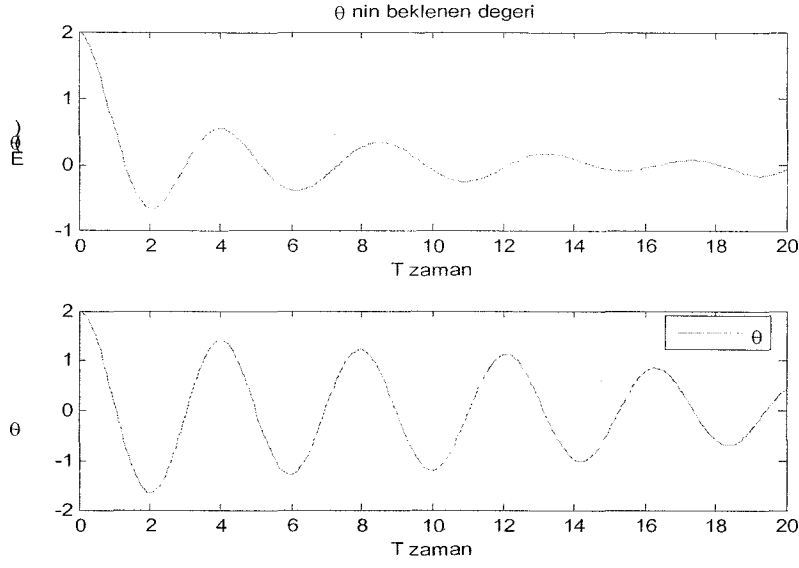
olmak üzere sayısal çözümün davranışını inceliyoruz.



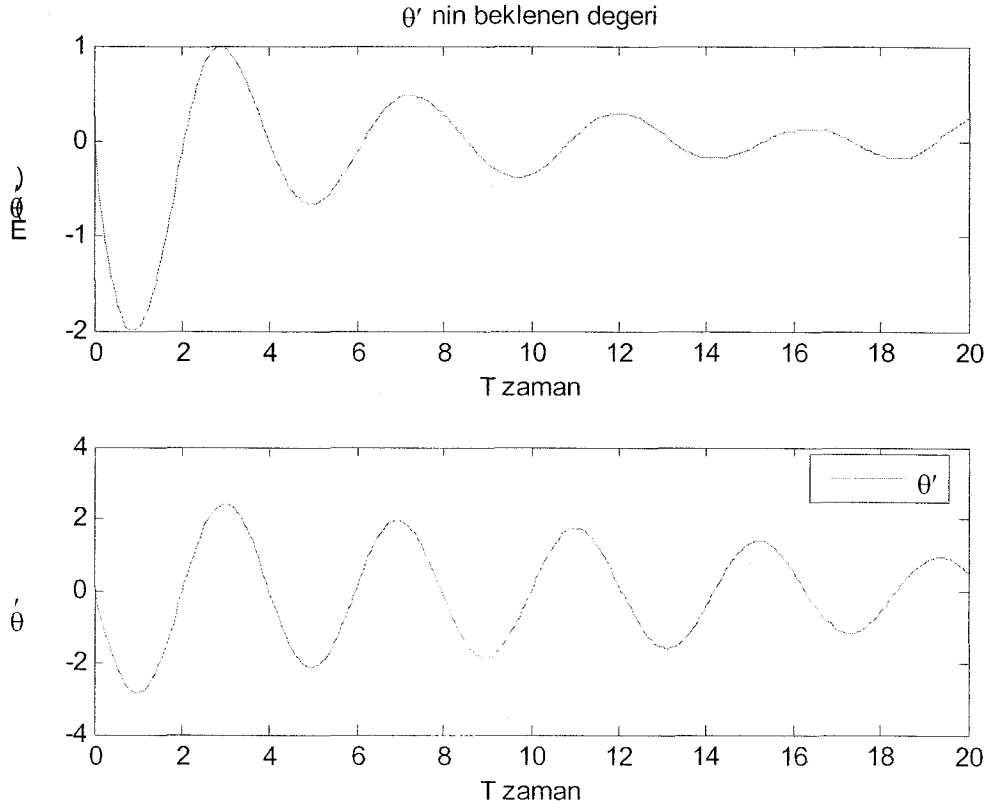
Şekil 1. θ ve θ' 'nin zamana göre değişimleri

1.2.3 θ 'nin birinci ve ikinci Momenti:

$E(\theta(t)) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \theta_i(t)$; $E(\theta'(t)) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \theta'_i(t)$; olmak üzere Şekil 2 de θ ve $E(\theta)$ 'nin zamana göre değişimleri sunulmaktadır.



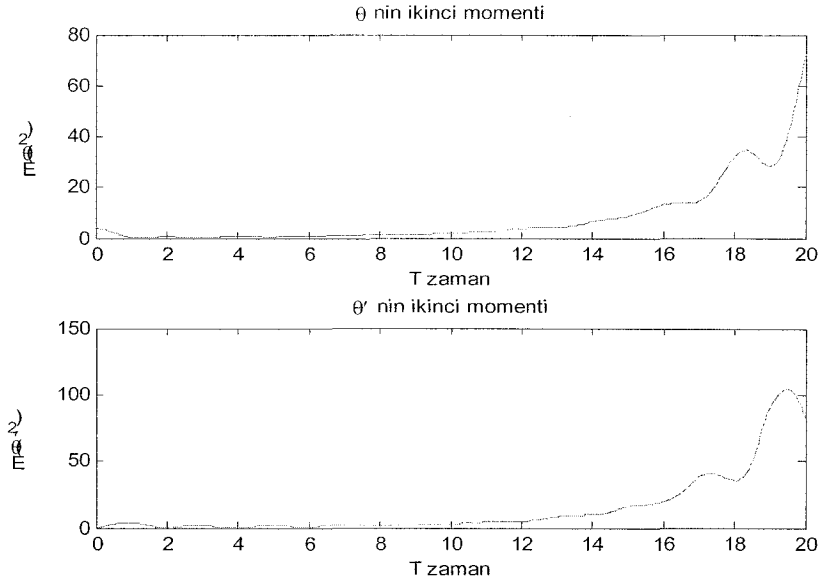
Şekil 2. θ ve $E(\theta)$ 'nin zamana göre değişimi



Şekil 3. θ' ve $E(\theta')$ 'nün zamana göre değişimleri

1.2.4 İkinci Moment

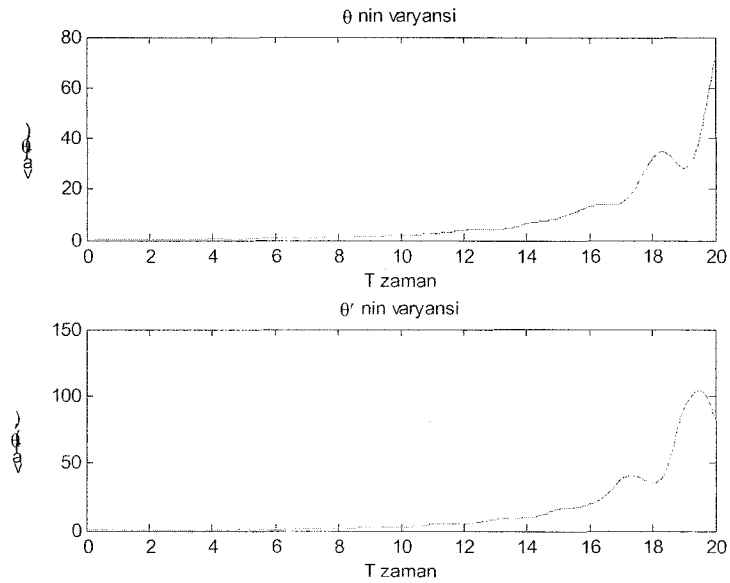
$$E(\theta^2)$$



Şekil 4. $E(\theta^2)$ ve $E(\theta'^2)$ 'nin yerel değişimleri

1.2.4 Varyans:

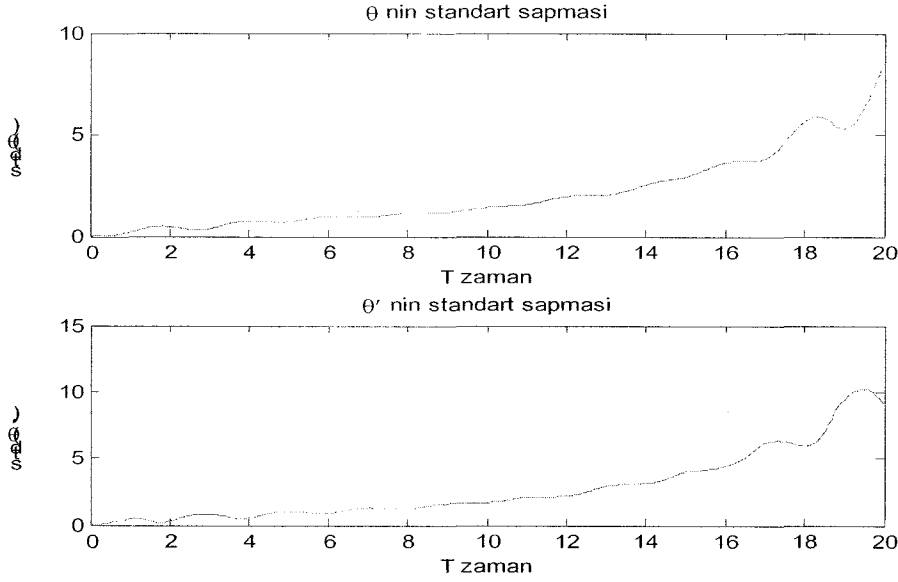
$$M_2 = E(\theta - E\theta)^2 = Var(\theta) = E(\theta^2) - E(\theta)^2$$



Şekil 5. $Var(\theta)$ ve $Var(\theta')$ 'nin yerel değişimleri

1.2.5 Standart Sapma:

$$\sigma(\theta) = \sqrt{Var(\theta)}$$

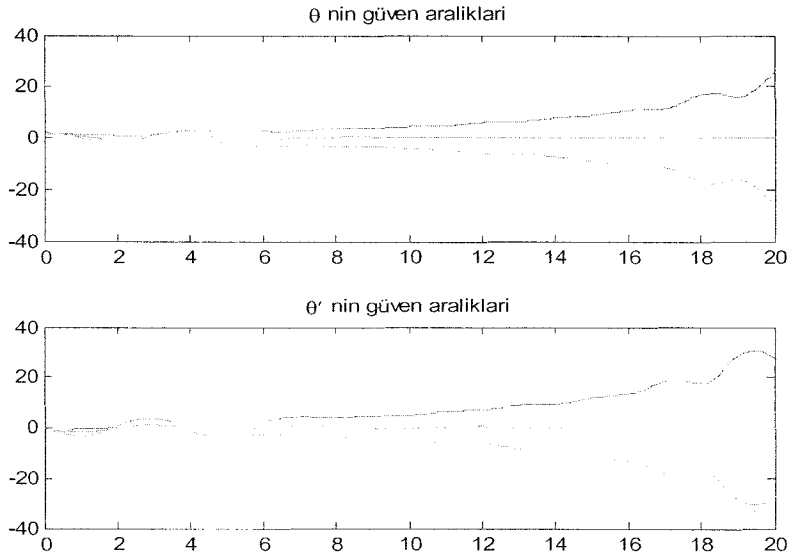


Şekil 6. $\sigma(\theta) = \sqrt{Var(\theta)}$ ve $\sigma(\theta') = \sqrt{Var(\theta')}$ 'nin yerel değişimleri

1.2.6 Güven Aralıkları:

K=3 için

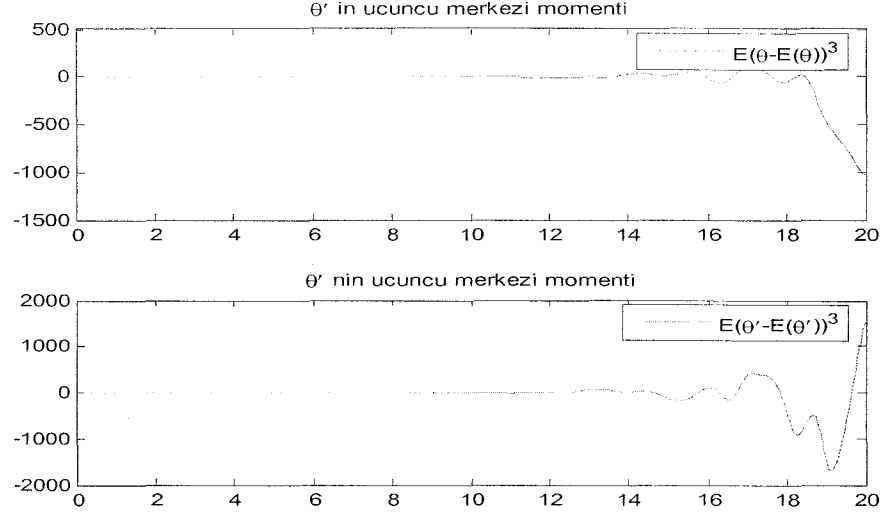
$$[E(\theta) - K\sigma(\theta); E(\theta) + K\sigma(\theta)]$$



Şekil 7. $[E(\theta) - K\sigma(\theta); E(\theta) + K\sigma(\theta)]$ ve $[E(\theta') - K\sigma(\theta'); E(\theta') + K\sigma(\theta')]$ 'nin zamana göre değişimleri

1.2.7 Üçüncü Merkezi Moment:

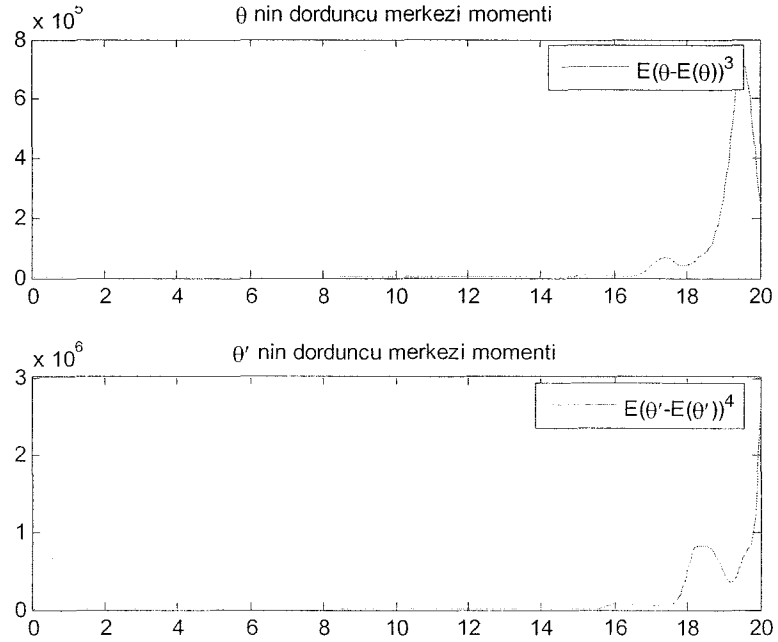
$$M_3 = E(\theta - E\theta)^3 = E(\theta^3) - 3E\theta E(\theta^2) + 2(E\theta)^3$$



Şekil 8. θ ve θ' 'nin üçüncü merkezi momentinin zamana göre değişimleri

1.2.8 Dördüncü Merkezi Moment:

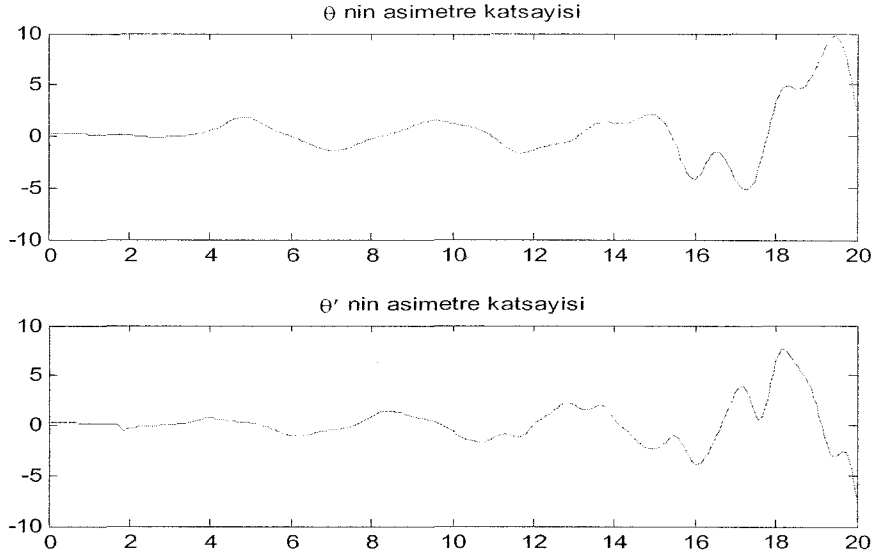
$$M_4 = E(\theta - E\theta)^4 = E(\theta^4) - 4E\theta E(\theta^3) + 6(E\theta)^2 E(\theta^2) - 3(E\theta)^4$$



Şekil 9. θ ve θ' 'nin dördüncü merkezi momentinin yerel değişimleri

1.2.9 Asimetri Katsayısı:

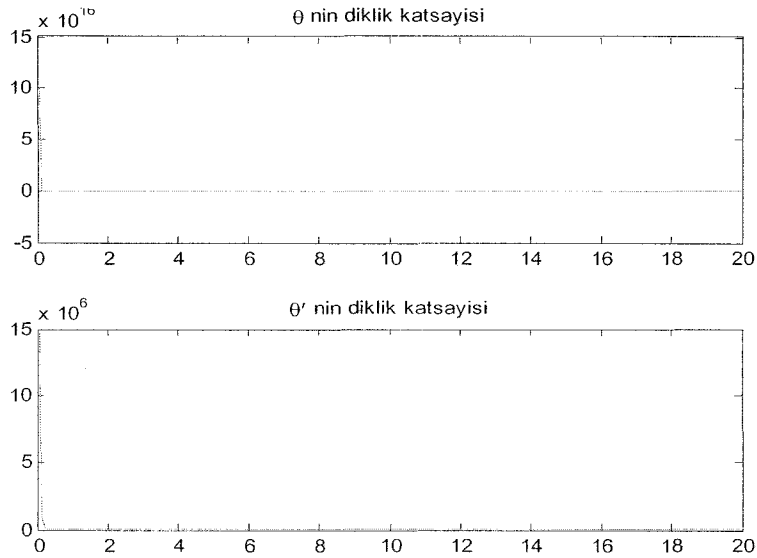
$$\gamma_3 = \frac{M_3}{(\sqrt{M_2})^3}$$



Şekil 10. θ ve θ' 'nin asimetre katsayısının zamana göre değişimleri

1.2.10 Diklik Katsayısı:

$$\gamma_4 = \frac{M_4}{(M_2)^2} - 3$$



Şekil 11. θ ve θ' 'nin diklik katsayısının yerel değişimleri

1.3 Sayısal Simulasyonlar

1.4 Bir boyutlu deterministik lineer köprü salınım modeli:

$$\ddot{\theta} = -\delta\dot{\theta} - \frac{6k}{m}\theta + \lambda \sin(\mu t), \theta(0) = \theta_0, \theta'(0) = \theta_1 \quad (14)$$

$$\ddot{y} = -\delta\dot{y} - \frac{2k}{m}y + g, y(0) = y_0, y'(0) = y_1 \quad (15)$$

ayrışık(decoupled) lineer sistemini göz önüne alalım. (14) denkleminde $\theta = \theta_1, \theta_1' = \theta_2$ seçilirse, sistem

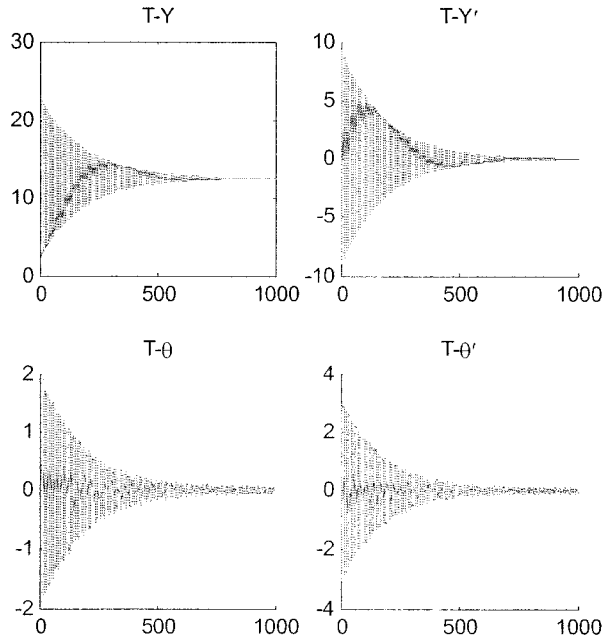
$$\begin{bmatrix} \theta_1' \\ \theta_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_2 \\ -\delta\theta_2 - \frac{6k}{m}\theta_1 + \lambda \sin(\mu t) \end{bmatrix} \quad (16)$$

birinci basamaktan diferansiyel denklem sistemine dönüşür. Benzer biçimde (15) denkleminde $y = y_1, y_1' = y_2$ seçilirse,

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_2 \\ -\delta y_2 - \frac{2k}{m}y_1 + g \end{bmatrix} \quad (17)$$

diferansiyel denklem sistemine dönüşür.

şeklinde yazılabilir. (16),(17) sistemini MATLAB Ode çözücülerinden Ode15s ile çözüyoruz. $\mu = 0.05, \lambda = 1.26$ değerleri için $t \in [0,1000]$ aralığında köprünün boyuna ve burkulma salınımı Şekil 12 de gösterilmiştir.



Şekil 12: $\mu = 0.05, \lambda = 1.26$ için lineer ve ayrışık denklemin çözümü

1.5 Bir boyutlu lineer olmayan ayrışık köprü salınım modeli:

$$\ddot{\theta} = -\delta\dot{\theta} - \frac{3k}{m}\sin(2\theta) + \lambda \sin(\mu t), \theta(0) = \theta_0, \theta'(0) = \theta_1 \quad (18)$$

burada $f(t) = \lambda \sin(\mu t)$ dış kuvveti, δ sönüm katsayısı, k Hook kanunundan gelen yay sabiti, m kablolar ile asılan kütle olmak üzere bir boyutlu lineer olmayan köprü salınım modeli (19) diferansiyel denklemi ile ifade edilir. Burada θ burkulmayı temsil etmektedir. Ayrıca köprünün dikey yer değiştirmesi

$$\ddot{y} = -\delta\dot{y} - \frac{2k}{m}(y) + g, y(0) = y_0, y'(0) = y_1 \quad (19)$$

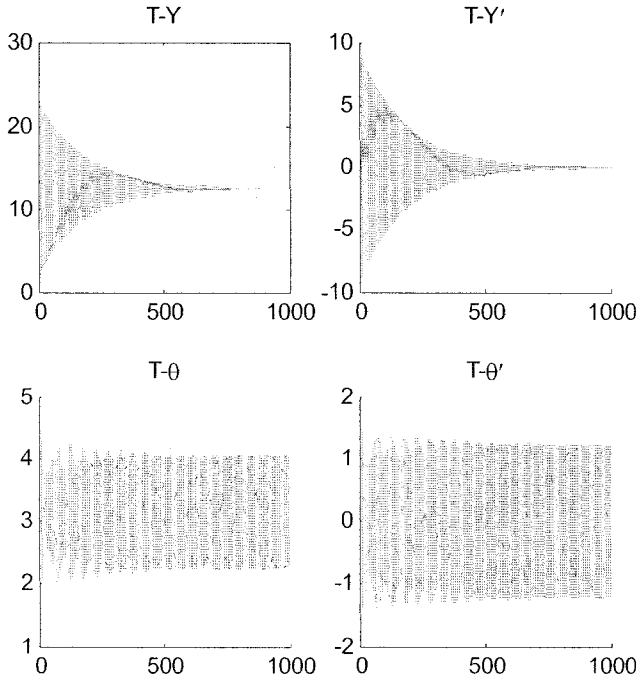
başlangıç değer problemini sağlar.

(18) denkleminde $\theta = \theta_1$, $\theta' = \theta_2$, (19) denkleminde $y = y_1$, $y' = y_2$ seçilirse, (18)-(19) sistemi birinci basamaktan

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \theta_1' \\ \theta_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_2 \\ -\delta y_2 - \frac{2k}{m}y_1 + g \\ \theta_2 \\ -\delta\theta_2 - \frac{3k}{m}\sin(2\theta_1) + \lambda \sin(\mu t) \end{bmatrix} \quad (20)$$

diferansiyel denklem sistemine dönüşür.

$\mu = 0.05$, $\lambda = 1.26$ değerleri için $t \in [0, 1000]$ aralığında (20) sistemi ile elde edilen boyuna ve burkulma salınımı Şekil 2 de gösterilmiştir.



Şekil 2: $\mu = 0.05$, $\lambda = 1.26$ için çözüm bileşenleri

1.6 Bir boyutlu nonlinear çiftleşik (coupled) köprü salınım modeli:

$$\ddot{\theta} = -\delta\dot{\theta} + \frac{3k}{mL} \cos \theta \left[(y - L \sin \theta)^+ - (y + L \sin \theta)^+ \right] + \lambda \sin(\mu t) \quad (23)$$

$$\ddot{y} = -\delta\dot{y} - \frac{k}{m} \left[(y - L \sin \theta)^+ + (y + L \sin \theta)^+ \right] + g \quad (24)$$

(23) denkleminde $\theta = \theta_1$, $\theta' = \theta_2$, (24) denkleminde $y = y_1$, $y' = y_2$ seçilirse, (23)-(24) sistemi birinci basamaktan

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \theta_1' \\ \theta_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_2 \\ -\delta y_2 - \frac{k}{m} \left[(y_1 - L \sin(\theta_1))^+ + (y_1 + L \sin(\theta_1))^+ \right] + g \\ \theta_2 \\ -\delta\theta_2 + \frac{3k}{mL} \left[(y_1 - L \sin(\theta_1))^+ - (y_1 + L \sin(\theta_1))^+ \right] + \lambda \sin(\mu t) \end{bmatrix}$$

diferansiyel denklem sistemine dönüşür.

Kaynaklar:

- [1] J. Glover, A. C. Lazer, and P. J. McKenna, Existence and stability of large-scale nonlinear oscillations in suspension bridges, *Z. Angew. Math. Phys.* 40 (1989) 171-200.
- [2] D. Jacover and P. J. McKenna, Nonlinear torsional flexings in a periodically forced suspended beam, *J. Comput. Appl. Math.* 52 (1994) 241-265.
- [3] Theodore von Karman, *The Wind and Beyond*, Theodore von Karman, Pioneer in Aviation and Pathfinder in Space, Little Brown and Co. Boston, 1967.
- [4] A. C. Lazer, and P. J. McKenna, Large amplitude periodic oscillations in suspension bridges: some new connections with nonlinear analysis, *SIAM Review* 32 (1990) 537-578.
- [5] A. C. Lazer, and P. J. McKenna, Large scale oscillatory behaviour in loaded asymmetric systems, *Analyse Nonlineaire Annales de L'Institut Henri Poincare* 4 (1987) 243-274.
- [6] P. J. McKenna, and W. Walter, Nonlinear oscillations in a suspension bridge, *Arch. Rat. Mech. Anal.* 98 (1987) 167-177.
- [7] P. J. McKenna, and W. Walter, Travelling waves in a suspension bridge, *SIAM J. Appl. Math.* 50 (1990) 703-15.