

MANTIK, MATEMATİK

ve

FELSEFE

IV. Ulusal Sempozyumu

# OLASILIK

Kitabı Yayına Hazırlayanlar

**Doç.Dr. Ünal UFUKTEPE**

İzmir Ekonomi Üniversitesi, Matematik Bölümü

**Yard.Doç.Dr. Arzu ŞEN**

İstanbul Kültür Üniversitesi, Matematik-Bilgisayar Bölümü

Asistanlar:

**Göknur YAPAKÇI**

İzmir Ekonomi Üniversitesi, Matematik Bölümü

**Hande TUNÇEL**

İzmir Ekonomi Üniversitesi, Matematik Bölümü

**Kerem TÜRKYILMAZ**

İzmir Ekonomi Üniversitesi, Matematik Bölümü

2006 FOÇA-İZMİR  
İstanbul Kültür Üniversitesi Yayınları  
Yayın No:##

ISBN:###-####-##-#  
©Her türlü yayın hakkı İstanbul Kültür Üniversitesi'ne aittir.

TC İstanbul Kültür Üniversitesi  
Fen-Edebiyat Fakültesi

Ataköy Yerleşkesi, D100 Yanyol, 34156 Bakırköy İstanbul  
**Tel:** (+90 212 6619451)  
**Fax:** (+90 212 6619274)  
**Web:**  
[www.iku.edu.tr](http://www.iku.edu.tr)  
[fen-edebiyat.iku.edu.tr](http://fen-edebiyat.iku.edu.tr)



TC  
İSTANBUL  
KÜLTÜR  
ÜNİVERSİTESİ



# MANTIK, MATEMATİK ve FELSEFE IV. ULUSAL SEMPOZYUMU **OLASILIK**

05-08 Eylül 2006  
Foça- İZMİR



**Katılım için son başvuru tarihi: 11 Ağustos 2006**  
**Bildirili katılım için son başvuru tarihi: 21 Nisan 2006**

## BİLİM KURULU

Prof.Dr. Erol BALKANAY (İstanbul Kültür Üniversitesi)  
Prof.Dr. Çetin BOLCAL (İstanbul Kültür Üniversitesi)  
Prof.Dr. Erhan GÜZEL (İstanbul Üniversitesi)  
Prof.Dr. Ahmet İNAM (Orta Doğu Teknik Üniversitesi)  
Prof.Dr. Erdal İNÖNÜ (Feza Gürsey Enstitüsü)  
Prof.Dr. Rennan PEKÜNLÜ (Ege Üniversitesi)  
Prof.Dr. Hülya ŞENKON (İstanbul Kültür Üniversitesi)  
Prof.Dr. Şafak URAL (İstanbul Üniversitesi)  
Prof.Dr. Osman DEMİRCAN (Onsekiz Mart Üniversitesi)

## DÜZENLEME KURULU

Prof.Dr. Dursun KOÇER (İstanbul Kültür Üniversitesi)  
Doç.Dr. Neşe YELKENKAYA (İstanbul Kültür Üniversitesi)  
Yard.Doç.Dr. Hikmet ÇAĞLAR (İstanbul Kültür Üniversitesi)  
Yard.Doç.Dr. Adnan İLERÇİ (İstanbul Kültür Üniversitesi)  
Yard.Doç.Dr. Mehmet ÖZER (İstanbul Kültür Üniversitesi)  
Yard.Doç.Dr. Gürsel HACİBEKİROĞLU (İstanbul Kültür Ün.)  
Yard.Doç.Dr. Arzu ŞEN (İstanbul Kültür Üniversitesi)  
Yard.Doç.Dr. Ayten KOÇ (İstanbul Kültür Üniversitesi)  
Araş.Gör. Sinan ATASEVEN (İstanbul Kültür Üniversitesi)  
Araş.Gör. Suzan BAYHAN (İstanbul Kültür Üniversitesi)  
Araş.Gör. Esra ÖZKAN (İstanbul Kültür Üniversitesi)  
Araş.Gör. Emel YAVUZ (İstanbul Kültür Üniversitesi)  
Araş.Gör. Fatih UÇAR (İstanbul Kültür Üniversitesi)  
Fizikçi Hande ÖZER (İstanbul Kültür Üniversitesi)

## İLETİŞİM

<http://fen-edebiyat.iku.edu.tr/mmf4>

Yard.Doç.Dr. Arzu ŞEN

E-Posta: a.sen@iku.edu.tr

Tel: 0 212 498 43 57 Faks: 0 212 661 92 74



*Mantık, Matematik ve Felsefe Gurubu'na değerli katkıları dolayısıyla bu kitabı  
İstanbul Kültür Üniversitesi Rektörü  
Prof.Dr. Tamer KOÇEL'e  
ithaf ediyoruz.*

## İçindekiler

|                                                                                                                                  |         |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------|
| Olasılığın Matematiksel Temelleri,<br>Timur Karaçay                                                                              | 1-22    |
| Kavramlar Ağı İçinde Olasılık,<br>Ahmet İnam                                                                                     | 23-28   |
| Beynin Alfa Aktivitesinin Zihnin Evriminde Rolü,<br>Erol Başar-B.Güntekin                                                        | 29-40   |
| Maxwell-Boltzmann Eşitliğinin Öngörü Gücü,<br>E. Rennan Pekünlü                                                                  | 41-50   |
| Hume'un Bilgi Öğretisinde Olasılık,<br>Ali Taşkın                                                                                | 51-68   |
| Olasılık Tabanlı Asal Sayı Sınama Algoritmalarında Hata<br>Olasılık Sınır Değeri İçin Yeni Bir Taban Önerisi,<br>Ahmet Koltuksuz | 69-78   |
| Olasılık Yoğunluğu Kavramındaki Süper Mantık,<br>Ülker Onbaşı-Özden Aslan-Zeynep Güven Özdemir                                   | 79-90   |
| Dahi Matematikçi Andrey N. Kolmogorov,<br>A.Azimli-G.Kemalbay                                                                    | 91-108  |
| Bulanıklık ve Olasılık,<br>Serkan Karataş-Naim Çağman                                                                            | 109-124 |
| Yörünge Metodu İle Dinamik Sistemin Elde Edilmesi,<br>Kasım Koçak-Hasan Tatlı                                                    | 125-138 |
| Süreklilik ve Rassallık,<br>Ünal Ufuktepe-Günnur UFUKTEPE                                                                        | 139-152 |
| Regresyon Analizi'nin Geometrisi,<br>Gülhayat Gölbaşı Şimşek-Seher Arıkan Tezergil                                               | 153-178 |

|                                                         |         |
|---------------------------------------------------------|---------|
| Pozitronların Çeşitli Kalınlıktaki Alüminyum.....       | 179-190 |
| Filmlerden İleri Geçiş Olasılıkları,<br>G.İnlek-A.Aydın |         |
| Değişik Ortamlardaki Gama Etkileşmelerinde.....         | 191-196 |
| Toplam Saçılma Olasılığı Hesabı,<br>A.Böke-C.Özmutlu    |         |
| $\pi$ 'nin Sanal Deneyle Tahmini,.....                  | 197-222 |
| Mustafa Y. Ata                                          |         |

# GİRİŞ

Mantık, Matematik ve Felsefe IV. Ulusal Sempozyumu 05-08 Eylül 2006 tarihlerinde yine Foça’da gerçekleşti. DİNAMİK SİSTEMLER ve KAOS kuramı, geçmiş MMF sempozyumlarının konusuydu.

Bilim, nesnel dünyanın varolduğu ve tarafımızdan bilinebileceği temel düşüncesinden hareket etmesine karşın “bilemeyiz” kavramını Olasılık kuramı ile hafifletmeye, bilinebilir-fikir yürütülebilir konuma getirmeye çalışır. Olasılık kuramının temel olgularından olan raslantı bilgimizi zaafa uğratarak düşünsel özgürlüğümüzü sakatlar. MMF Sempozyumunun düşün emekçileri, özgürlüğün ancak bilmekle mümkün olduğuna, daha çok şey bildikçe daha özgür olabileceğimizi savunan insanlar. Görelilik Kuramını bir yıl önce ele almış olan MMF düşün emekçilerin özgür iradesi bu yılın konusunun OLASILIK olmasını zorunlu kılmış. Her zamanki gibi bu konu da Felsefi, Kuramsal ve Uygulama yönleriyle ele alınmış. Sonuçta ortaya bu kitap çıkmış, birilerini daha özgür kılsın diye.

Ünal UFUKTEPE



# Olasılığın Matematiksel Temelleri

**Timur KARAÇAY**

Başkent Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi  
İstatistik ve Bilgisayar Bilimleri Bölümü  
Bağlıca Yerleşkesi, 06530, Ankara  
Tel. (0312) 234 10 10 Faks. (0312) 234 10 41  
[tkaracay@baskent.edu.tr](mailto:tkaracay@baskent.edu.tr)

## ÖZET

Matematiğin bir dalı olarak olasılık kuramının doğuşu 17.yüzyılın ortalarına raslar. 20.yüzyılda olasılığın formalizasyonu yönünde, iki önemli adım atıldı. Birincisi, 1933 yılında *Andrey Nikolaevich Kolmogorov (1903–1987)* tarafından ortaya konulan aksiyomlardır. Bu aksiyomlar, olasılık kuramını, bir ölçüm uzayına taşıyor ve o zamana kadar olasılıkla ilgili yapılan bütün *discrete hesaplamaları* özel haller olarak içeren çok genel bir yapıya yükseltiyordu. İkincisi ise *Richard Threlkeld Cox (1898-1991)* tarafından ortaya konulan aksiyomlarıdır. Cox, olasılığı, daha basite indirgenemez bir ilkel (primitive) kavram olarak aldı ve onun sağladığı temel özellikleri ortaya koydu. 1960 lı yıllarda birbirlerinden habersiz olarak, Ray Solomonoff, Anrey Kolmogorov, Gregory J. Chaitin *algoritmik seçkisizlik* (randomness) kavramını ortaya attılar. Bu yeni kavram, olasılık kuramının dayandığı rasgelelik kavramına açıklık getirmekle kalmayıp, *informasyon* kuramına da yeni açılımlar getirdi. Gödel'in eksiklik teoremine benzer bir niteliğe sahip algoritmik seçkisizlik, günümüzde çok aktif bir konudur ve görünüşe göre olasılığı bulunduğu yerden alıp daha yükseklerle taşıyacaktır.

**Anahtar Sözcükler:** Olasılık, seçkisizlik, Ölçü Kuramı, Aleatorik Belirsizlik, Epistemik Belirsizlik, Algoritmik Olasılık, Kolmogorov Karmaşıklığı.

## GİRİŞ

İnsanoğlu tarih öncesi zamanlardan beri seçkisiz (rasgele) fiziksel olaylarla karşı karşıyadır. Öngörülemeyen doğa olaylarını yorumlamak (gaipten haber vermek) ve şans oyunları bunlara tipik örneklerdir. Bu tür olgular, hemen her dönemde ve her kültürde varolmuştur. Dolayısıyla, olasılık kavramının insan düşüncesinde yer edişini binlerce yıl geriye götürmek mümkündür. Ama matematiğin bir dalı olarak olasılık kuramının doğuşu 17.yüzyılın ortalarına kadar gecikmiştir. Elbette, bilim tarihinde buluşların, çoğunlukla unutulmuş ya da bilinmeyen öncülleri vardır. 1494 yılında Fra Luca Paccioli'nin yazdığı *Summa de aritmetica, geometria, proportioni e proportionalita* adlı kitap, olasılığı konu edinen ilk kitap olarak bilinir. Bu kitaptan esinlenen Geronimo Cardano, 1550 yılında *Liber de Ludo Aleae* (Şans Oyunları Üzerine bir Kitap) adlı kitabı yazdı. Ama bunlar avrupada filizlenmeye başlayan matematiğin ilgi alanına giremedi.

Olasılık Kuramının doğuşu bir kumarbazın ihtirasıyla başlar. Chevalier de Méré adlı soylu bir Fransız, kumar oynayarak servetini büyütme ihtirasına kapılmıştır. Oynadığı oyunun kuralı şudur: Bir zarı dört atışta en az bir kez 6 getiren kazanır. Ama Chevalier oyunun kuralını değiştirerek daha çok kazanmak istemektedir. Yeni kural şudur: Çift zarı 24 atışta bir tane düşüş (toplam  $6+6=12$ ) getiren kazanacaktır. Ama kısa sürede, bu kuralın daha az kazandırdığını gördü. Bunun nedenini arkadaşı Blaise Pascal (1623-1662) 'a sordu. Pascal, o dönemin iyi matematikçilerinden biriydi. O ana kadar, matematik dünyası şans oyunlarının matematikle bir ilişkisi olduğunu bilmiyordu. Pascal, kendisine sorulan sorunun yanıtını, bir matematikçi gözüyle araştırdı. Sonunda basit ama kesin çözümü ortaya koydu. Eski kuralda Chevalier 'in kazanma şansı %51.8 iken yeni kuralda %49.1 idi. Chevalier 'in kaybetme nedeni buydu.

Pascal, bu basit problemi çözmekle yetinmedi. Sorunun gerisinde daha büyük bir matematik kuramın yattığını anlamıştı. Çağdaşı Pierre de Fermat ile mektuplaşarak fikir alışverişinde bulunmaya başladı. Sonunda, matematiğin önemli bir dalı olan Olasılık Kuramını yarattılar. Bu gün, olasılık kuramı, şans oyunlarına uygulanma özeliğini çoktan aşmış bilim, endüstri, ekonomi, spor, yönetim gibi çağdaş insanın yaşamını etkileyen her alana girmiştir. Örneğin bankacılık, sigortacılık, endüstride kalite kontrolü, genetik, gazların kinetik teorisi, istatistiksel mekanik, kuantum mekaniği gibi pek çok alan olasılık kuramı olmadan ayakta duramaz.

Olasılık Kuramını geliştiren önemli matematikçilerden bazıları şunlardır:

Blaise Pascal (1623-1662), Pierre de Fermat (1601-1665), Christiaan Huygens (1629-1695), Jakob Bernoulli (1645-1705), Abraham de Moivre (1667-1754), Daniel Bernoulli (1700-1782), Comte de Buffon (1707-1788), Pierre-Simon Laplace (1749-1827), Augustus De Morgan (1806-1871), Thomas Bayes (1702-1761), Andrei Andreyvich Markov (1856-1922), Richard von Mises (1883-1953).

Modern zamanlarda, olasılığın yönelişlerinde önemli katkıları olan Andrey Nikolaevich Kolmogorov (1903 – 1987) , Richard Threlkeld Cox (1898- 1991) , Ray Solomonoff (1926 - ...) ve Gregory J. Chaitin'in yaptıklarından aşağıda kısaca sözedeceğiz.

## KAVRAMLAR

En basit anlamıyla, olasılık, bir süreçte gelecekte ne olacağını tahmin etme eylemidir. Ama, biz, olasılıktan bundan fazlasını bekleriz. Olasılık, tahmin ettiği şeye ne kadar güvenilebileceğinin de ölçüsünü vermelidir. *Gaipten haber vermek* ile olasılık bilimi arasındaki önemli fark buradan gelir. Bunu başka türlü söylersek, olasılık belirsizliğin (uncertainty) ölçüsüdür.

Klasik anlamda, olasılık ile seçkisizlik (randomness) eşanlamlıdır. Seçkisiz bir süreçte, olayların (çıktıların) olma olasılıkları birbirlerine eşittir. Başka bir deyişle, bir süreçte **seçkisizlik** “*amaç, neden, sıra ve öngörü yokluğu*” diye tanımlanabilir. Bu nedenle, seçkisiz süreç, çıktısı öngörülebilir bir biçime (pattern) sahip olmayan ardışık oluşumlar zinciridir. Özel olarak, istatistikte, yanlı (bias) olmayan ya da bağılılaşımli (correlated) olmayan olayları belirlemek için kullanılır. İstatistiksel seçkisizlik, daha sonraları bilgi kuramında *bilgi entropisi* kavramı içine alınmıştır.

Zaman içerisinde olasılığa yüklenen kavramlar giderek çeşitlenmiştir. Hatta, klasik olasılık aksiyomlarının dışına taşan olasılık kuramları da vardır. Dolayısıyla, olasılığın tam bir sınıflandırmasını yapmak zordur. Biz, burada, olasılık aksiyomları içinde kalan olasılığın günümüzdeki asıl akış mecrasına bakmaya çalışacağız.

## SEÇKİSİZLİĞİN UYGULAMALARI

Seçkisizlik kavramı, başlangıçta şans oyunlarından çıkmıştır. Örneğin zar atma, rulet oyunu, oyun kartlarını karma vb. Daha sonra yapılan elektronik kumar makinalarında da seçkisiz sayı üretimi için esastır. Ama bu işte çok hile yapılabileceği için, bu tür oyun makinaları bir çok ülkede ya yasaklıdır ya da devletin sıkı denetimi altındadır. Bizde olduğu gibi, bazı ülkelerde, seçkisiz sayı üretimine dayalı piyangolar ülke genelinde serbestçe oynanabilir. Bundan farklı olarak, çıktısı önceden öngörülemez spor karşılaşmaları, at yarışları vb. oyunlar da seçkisizliğin (olasılığın) ilgi alanındadır.

19.yüzyılda fizikçiler gazların özelliklerini ve termodinamik kurallarını açıklamak için olasılığa dayalı istatistiksel mekanik kullandılar. Kuantum mekaniğinde olasılık kullanılmaktadır. Evrim Kuramı, farklı canlı türlerinin oluşumunu, mutasyonun seçkisizliğine bağlar. İletişim kuramında seçkisizlik gürültü (noise) diye adlandırılır. Gürültü, nedenli olarak belirlenen dizinler dışında kalan dizinlerdir. *Seçkisizlik* kavramı ile *öngörülemezlik* kavramlarının bazı örtüşen yanları olsa bile, esasta birbirlerinden farklıdır. Örneğin, şifrelenmiş bir mesaj, nedensel olarak sıralanmış bir dizidir ve şifre anahtarına sahip kişi tarafından çözülebilir. Ama bu anahtara sahip olmayan başka birisi için, öngörülemez içerikli bir dizidir. Böyle bir dizi seçkisiz değildir. Kutsal kitaplarda evrenin ve canlıların doğaüstü bir güç tarafından istençle yaratılmış olmaları varsayımı ile doğadaki seçkisizlik arasında bağdaşmaz çelişkiler vardır. Bu çelişkileri gidermeye çalışan din bilginlerinin başarı sağladığı söylenemez.

## SEÇKİSİZ SAYI ÜRETİMİ

Olasılık kavramının geçtiği her yerde, olabilecek olayları sayılarla ifade etmek mümkündür. Dolayısıyla, konu, esasında seçkisiz sayı üretimine dayalıdır. Stephan Wolfram' a göre, seçkisiz sayı üretme işi üç ayrı sınıfa ayrılabilir. Bu üç sınıfta üretilen sayıların nitelikleri birbirlerinden farklıdır.

1. *Çevreden gelen seçkisizlik.* Örneğin, çoğalmayı açıklayan hareket (Brownian motion).
2. *Başlangıç koşullarına hassas bağlı seçkisizlik.* Örneğin, kaos.
3. *Sözdeseçkisizlik.* Bu sayılar tasarlanan bir sistem tarafından üretilir. Örneğin, bir bilgisayarla üretilen seçkisiz sayılar... Bu tür sayılar belli bir algoritma ile üretilir. Algoritma çok ağır hesaplamalara dayandırılarak, çıktı hiç kimsenin öngöremeyeceği duruma kolayca getirilebilir. Ama üretilen sayılar gerçek anlamıyla seçkisiz sayılamaz.

## FELSEFİ BAKIŞ

Felsefi açıdan bakıldığında, belirsizlik (uncertainty), iki önemli dala ayrılır. Birinci tür belirsizlikte, olayın oluşu tamamen seçkisizdir, önceden öngörülemez. İkinci tür belirsizlik ise olay hakkındaki bilgi eksikliğimizden doğar. Birinci tür belirsizlikle ilgili olasılığa *aleatorik olasılık*, ikinci tür belirsizlikle ilgili olasılığa da *epistemik olasılık* denir. Bu ikisi arasındaki önemli farkı bilmeliyiz.

*Aleatorik (seçkisiz) belirsizlik:* Bu tür belirsizlik, olayları seçkisiz biçimde olduran bir neden (cause, fenomen) varolduğu varsayımına dayanır. Örneğin, bir para attığımızda tura gelme olasılığının  $\frac{1}{2}$  ve yazı gelme olasılığının da  $\frac{1}{2}$  olduğunu söyleriz. Parayı ne kadar atarsak atalım, kim atarsa atsın, bu olasılıklar değişmez ve birbirlerine eşittirler. Kesinlikle, seçkisizdirler; bilgi ya da deneyle bu olasılıklar değiştirilemez. Oyun kağıdı destesinden bir kart çekme, rulet oyunu, zar atma gibi olayların hepsi (hilesiz olmaları koşuluyla) seçkisiz belirsizliklerdir. İstatistik dersleri, genellikle bu tür (aleatorik) olasılıkları inceler.

*Epistemik (bilgisel) belirsizlik:* Bu tür belirsizlik, olayları yaratan nedenler (fenomen) hakkındaki bilgi eksikliğimizden doğar. Onlar hakkında bilgi edindikçe, belirsizlik azalır ve tam bilgi edindiğimizde belirsizlik yok olur. Bunu şu örnekle açıklayalım. Bir torbaya beyaz ve siyah tavla pulları doldurulmuş olsun. Torbada kaç tane pul olduğunu, kaçının beyaz, kaçının siyah olduğunu bilmiyor olalım. Torbadan bir pul çektiğimizde siyah mı, beyaz mı olacağını bize bildiren bir bilgi ve deney olmadığını varsayalım. Bu durumda çektiğimiz pulun beyaz olma olasılığı  $[0,1]$  aralığında bir sayıdır. Sözelimi, bu olasılığın da  $\frac{1}{2}$  olduğunu söyleyebiliriz. Ama burada yaptığımız tahmin, yukarıdaki *tura gelme* olasılığı gibi seçkisiz değildir; hiçbir nesnel nedene dayanmaz. Arka

arkaya pul çekmeye devam ettikçe, torba içindeki pulların renkleri hakkında daha fazla bilgi edinmeye başlarız. Çektiğimiz beyaz pulların sayısını, çektiğimiz siyah pulların sayısı ile karşılaştırarak, bir sonraki pulun beyaz olma olasılığını daha iyi tahmin etmeye başlarız. Sonunda bütün pulları bitirdiğimizde, pulların sayıları ve renkleri hakkında kesin bilgilere sahip oluruz. Bu olaydaki belirsizlik, bilgi eksikliğimiz giderildikçe azalmakta ve giderek ortadan kalkmaktadır.

Epistemik belirsizliğe çok örnek verilebilir. Örneğin, Ankara'nın nüfusunu bilmeyen iki kişiden birincisi nüfusun 2 milyon, ikincisi 3 milyon olduğunu tahmin edebilir. Bu tahminler birer epistemik olasılıktır. Birinci kişi, Devlet İstatistik Enstitüsünden Ankara'nın nüfusunu tam öğrenebilir ve bu konudaki belirsizliği kendisi için ortadan kaldırabilir. Ama ikincisi, bunu öğrenmezse, onun için belirsizlik devam edecektir. Buradan anlaşıldığı üzere, epistemik belirsizlik, kişiye bağlıdır, ama aleatorik belirsizlik kişiye bağlı değildir.

## ACABA?

Bu konuyu geçmeden önce, bu iki belirsizlikle ilgili bir felsefi tartışmaya dikkat çekmek gerekiyor. Bir parayı attığımızda, onun yazı ya da tura gelmesi tamamen ona etki eden fiziksel kuvvetlerin bileşkesinin sonucudur. Biz, bu günkü bilgilerimizle (ya da araçlarımızla), atılan paraya etki eden fiziksel kuvvetleri eksiksiz hesaplayamıyoruz. O nedenle, yazı mı yoksa tura mı geleceğini bilemiyoruz ve bu olayı seçkisiz diye niteliyoruz. Eğer, günün birinde, atılan paraya etki eden bütün kuvvetler hesaplanabilir hale gelirse, bu olay seçkisiz olmaktan çıkacaktır. Bu düşüncüyü genelleştirirsek, hiçbir olay nedensiz oluşmaz. Öyleyse seçkisiz olay yoktur. Bütün aleatorik belirsizlikler, esasta epistemiktirler.

Akla kolayca yatan bu düşüncenin yaşama geçebilmesi için, fizikçilerin yürüyeceği daha çok yol olduğu apaçıktır. Ama matematikçiler o kadar sabırlı değildirler, o yola çoktan düşmüşlerdir. Bu yazının, bundan sonraki konusu bu olacaktır.

## OLASILIĞIN FORMALLEŞMESİ

Başta Blaise Pascal olmak üzere olasılık kuramını başlatan 17.yüzyıl matematikçileri, olasılık hesaplarında sonlu “combinatoric” hesaplama yöntemlerini geliştirdiler. 20.yüzyılın başlarından itibaren, matematiğin hemen her dalı kümeler kuramına dayandırılarak daha soyut ve daha sağlam ayaklar üzerine, yani aksiyomlar üzerine oturtulmaya başlandı. Olasılık bu gelişimin dışında kalamazdı. Olasılığın formalizasyonu yönünde, bu gün de geçerli olan iki önemli adım atıldı.

Birincisi, 1933 yılında *Andrey Nikolaevich Kolmogorov (1903–1987)* tarafından ortaya konulan aksiyomlardır. Bu aksiyomlar, olasılık kuramını, bir ölçüm uzayına taşıyor ve o zamana kadar olasılıkla ilgili yapılan bütün *discrete hesaplamaları* özel haller olarak içeren çok genel bir yapıya yükseltiyordu.

İkincisi ise *Richard Threlkeld Cox (1898-1991)* tarafından ortaya konulan aksiyomlardır. Cox, olasılığı, daha basite indirgenemez bir ilkel (primitive) kavram olarak alıyor ve onun sağladığı temel özellikleri ortaya koyuyor.

Kurgu yöntemleri farklı olmakla birlikte, Kolmogorov ile Cox tarafından ortaya konulan yapılar pratik uygulamalarda birbirlerine denktirler. Aradaki önemli fark Cox olasılığının sonlu toplamsal, Kolmogorov olasılığının ise sigma toplamsal (sayılabilir sonsuz toplamsal) oluşudur.

## OLASILIK YASALARI

1. Bir olayın olma olasılığı  $[0, 1]$  aralığında bir sayıdır. 0 olasılığı olayın olamazlığını, 1 ise kesin olurluğunu belirtir.
2. Bir olayın olabilirliği ile olamazlığının olasılıklarının toplamı daima 1 dir.
3. İki olayın birlikte olma olasılığı, birincinin olma olasılığı ile ikincinin birinci olayla birlikte olma olasılığının çarpımına eşittir.

Bu yasaların matematiksel ifadeleri,  $p$  olasılık fonksiyonu,  $A$  olay,  $A^c$  onun tümleyeni olmak üzere, aşağıdaki bağıntılarla verilir.

1.  $0 \leq p(A) \leq 1$
2.  $p(A^c) = 1 - p(A)$
3.  $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B | A)$

**Dağılım:** Olaylar (ya da önermeler) üzerinde tanımlı ve bir olayın kaç kez olduğunu gösteren bir fonksiyondur. Olasılığın bir uygulaması olan istatistikte önem taşır.

## YENİ ARAYIŞLAR

Buraya kadar yapılanlar olasılık kuramını önemli bir dalı olarak ortaya koyuyor. Ama, konu üzerindeki tartışmalar sürmektedir. Olasılık dediğimiz şey neyi ifade ediyor? *Bayesçiler*, buna şu yanıtı veriyor: Belirsizliğin olduğu her mantıksal önermede olasılığı kullanırız. Buna karşıt görüşte olanlar, yani *frekansçılar* ise şu tezi savunuyor: Olasılık yalnızca seçkisiz olaylara (aleatorik belirsizliğe) uygulanır. Tabii, böyle iki karşıt görüş olunca, uzlaştırmacı olduğunu savunan çok sayıda karma görüş ortaya çıkmaktadır. Öyleyse, matematik, konuyu biraz daha yukarıdan görmeye başlamalıdır.

## SEÇKİSİZLİĞE SAĞLAM TEMELLER ATMA

Yukarıda seçkisizliği (randomness), bir süreçte “*amaç, neden, sıra ve öngörü yokluğu*” diye tanımlamıştık. Bu tanım oldukça sezgiseldir ve matematikçileri tatmin edecek açıklığa sahip değildir.

1960 yılında *Solomonoff*, bilimsel teorinin basit bir açıklamasını vermeye uğraşırken, *algoritmik olasılık* kavramını ilk ortaya atan kişidir. Bundan 5 yıl sonra, Solomonoff’dan ve birbirlerinden habersiz olarak *Kolmogorov* ve *Chaitin* aynı algoritmik seçkisizlik kavramını ortaya koydular. Kolmogorov o zamanının en ünlü

matematikçilerinden birisidir, Chaitin ise henüz üniversitede matematik bölümü son sınıf öğrencisidir. Bu öğrencinin, daha sonra yaptığı çalışmalar olasılığa ve informasyon teorisine büyük katkılar sağlayacaktır. Şimdi, bu üçünün birbirlerinden habersiz olarak ortaya koydukları “*algoritmik seçkisizlik*” ya da “*algoritmik olasılık*” kavramını açıklama hazırlığına başlayabiliriz. Konuya Chaitin’in örnekleriyle anlatmaya girelim.

**Örnek 1.** Dünyadaki Uzak Merkezi (UM) çok uzaktaki bir gezegene bir araştırmacı göndermiştir. Dalgın araştırmacımız, yapacağı hesaplar için kendisine mutlaka gerekli olan trigonometri cetvelini yanına almayı unutmuştur ve onun bir iletişim aracıyla kendisine acele gönderilmesini istemektedir. Bu uzak gezegenle telgraf, telefon, faks vb iletişim araçlarıyla iletilen mesajların çok pahalıdır. UM, pahalı iletişim ücretini ödemeyi göze alarak, *sin*, *cos*, *tan*, *cot*, *sec*, *cosec* fonksiyonları için hazırlanmış, yirmi haneli geniş bir trigonometri cetvelini bir iletişim aracıyla ile göndermek zorunda kalmıştır. Ama UM’de bir matematikçi varsa, işi çok ucuza getirebilir. Koca bir kitap olan trigonometri cetvelini göndermek yerine,  $\exp(ix) = \cos x + i \sin x$  formülünü göndermesi sorunu çözecektir. Bu kısa mesaj, araştırmacının istediği bütün bilgiyi içermektedir.

**Örnek 2.** Aradan binlerce yıl geçmiş olsun. Bilginimiz yorulmuştur ve hobilerine biraz zaman ayırmak için geçmiş yıllara ait basketbol maçlarını, skorları ve kimin hangi maçta kaç sayı yaptığını bilmek istemektedir. UM bu isteği çok haklı görmüş ve istenen bilgilerin gönderilmesini emretmiştir. Bu kez, matematikçiler de dahil olmak üzere, hiç kimse istenen maçlarla ilgili bilgileri tamamen içeren daha kısa bir mesaj (formül) yazamamıştır. Çaresiz, yüksek ücretler ödenerek, istenen bilgi gönderilecektir.

Bu iki örnekten çıkardığımız sonuç şudur. Bazı mesajları, anlamını aynen koruyarak, kısaltabiliriz. Bazı mesajları asla kısaltamayız.

Algoritmik Seçkisizlik tanımı, yukarıda verilen tanımda olduğu gibi insan sezgisine dayalı olmasın diye bilgisayar terminolojisine dayandırılacaktır. Günümüz bilgisayarları ikili (binary) sayıtlama dizgesine dayanır. İkili (binary) sayıtlama dizgesinde yalnızca 0 ve 1 sayakları (digit) vardır. Bilgisayar terminolojisinde ikili sayı sistemindeki hanelere *bit* denir. Bir bit’te (hanede) ya 0 ya da 1 sayağı yer alır.

İkili sayı dizgesini kullanarak her bilgiyi (mesajı) karşı tarafa gönderebiliriz. Başka bir deyişle, 0 ile 1 lerden oluşan dizilerle istediğimiz her bilgiyi yazabiliriz. Bunun için, örneğin, bir dildeki harfleri, kelimeleri, cümleleri, kavramları,... vb 0 ile 1 lerin belirli

bir sırada sıralanmasıyla oluşan birer diziye karşılık getirmek yetecektir. Diziler sonlu ya da sonsuz olabilir. Mesajın ne kadar uzağa gideceğinin ve mesajın anlamının, şu andaki hedefimiz için bir önemi yoktur. O nedenle, mesajları 0 ile 1 lerden oluşan diziler olarak, uzak gezegeni de bilgisayarın çıktısı olarak düşüneceğiz. Amacımız, mesajın (dizinin) bilgisayar çıktısı olarak elde edilmesidir. O zaman mesajı yerine iletilmiş varsayacağız. Mesajı iletmek için, bilgisayara komutlar vermeliyiz. Verilecek komutlar herhangi bir bilgisayar dilinde yazılmış bir programdır. Biz buna *algoritma* diyeceğiz. Fiziksel kısıtlamaları yok sayıp, mesajın gönderilmesi için gerekli zamanın olduğunu ve algoritma doğru ise mesajın daima yerine ulaşacağını varsayalım.

Bir parayı 20 kez atalım. Yazı gelince 0, tura gelince 1 yazalım. Tesadüfen aşağıdaki dizi oluşsun.

010101010101010101 (1)

Para atma olayını tekrarlayalım. Bu kez tesadüfen aşağıdaki dizi oluşsun.

01101100110111100010 (2)

Birinci dizi (mesaj) '01' in on kez ardışık yazılmasından oluşmuştur. İkinci dizi (mesaj) ise, onu daha kısa ifade edecek bir biçime (pattern) sahip değildir.

Bu iki dizinin bir insanda ve bir bilgisayarda yarattığı etkiye bakalım. Azıcık eğitilmiş ve biçimleri (pattern) algılayabilecek yetenekteki her insan, birinci dizinin istençle oluşturulmuş (seçkili) bir dizi, ikincinin ise rasgele oluşturulmuş (seçkisiz) bir dizi olduğu izlenimini edinir. Oysa bilgisayar bu farkı görmeyecektir. Esasta, her ikisi de bir paranın 20 kez atılmasıyla oluşturulabilecek  $2^{20}$  (= 1 048 576) seçenekten birer tanesidir. Her ikisinin yazı-tura ile oluşturulması olasılıkları aynıdır ve  $2^{-20}$  dir.

Klasik olasılığın dayandığı rasgelelik (seçkisizlik) her ikisinde aynı olduğu halde, biz insanlar, başka bilgi ve deneyimlerimizle, bu iki dizinin oluşturuluşunu farklı imiş gibi seziyoruz. Bize göre, birinci dizi istençle (seçkili) oluşturulmuştur, ikinci dizi ise rasgele (seçkisiz) oluşturulmuştur. Bu insanın yanılgısıdır. Oysa, bilgisayar bu yanılgıya düşmüyor, dizilerin oluşturuluşu hakkında bir yorum yapmıyor.

Bilgilerimize ya da sezgilerimize dayalı olarak bir dizi hakkında vereceğimiz *seçkili/seçkisiz* kararlarımızın ne kadar yanıltıcı olabileceğine bir çok örnek gösterebiliriz. Örneğin, 3,1451... dizisini gören iki kişi düşünelim. Bunlardan birisi  $\pi$  sayısını biliyor olsun, ötekisi bilmiyor olsun. Birinci kişi bu diziyi istençle yazılmış (seçkili) bir dizi olarak,

yani  $\pi$  sayısı olarak algılarken, ikinci kişi bunu tamamen rasgele dizilmiş (seçkisiz) bir dizi olarak görebilir.

Görülüyor ki klasik seçkisizlik (randomness) tanımımız kişiden kişiye değişebilmektedir. Diziyi gören kişinin önceki bilgilerine, deneyimlerine ve ‘pattern’leri seçebilme yeteneğine bağlıdır. Böylesine kişiye bağlı seçkisizlik (randomness) kavramına dayalı olasılık kuramının önemli bir açığı olduğunu kabul edip, bu açığı kapatacak sağlam bir kurgu aramalıyız.

## ALGORİTMİK OLASILIK

Tekrar baştaki dizilere dönelim. Birinci diziyi (mesajı) iletme için “on kez 01 yaz” algoritması bilgisayara yetecektir. *[Tabii, kullanılan dile göre, bu algoritma bir for döngüsü, while döngüsü vb olabilir. O ayrıntının önemi yok. Konuşma dilinde yazdığımız algoritmanın bilgisayar tarafından anlaşıldığını varsayacağız.]* İkinci diziyi (mesajı) iletme için “01101100110111100010 yaz” algoritmasından başka bir yol bulamıyoruz. Bu algoritma, esas mesajdan daha kısa değildir.

Şimdi mesajların 20 bit değil, 20 katrilyon bit olduğunu, birinci mesajda 01 lerin ardışık dizildiğini, ama ikinci mesajdaki 0 ve 1 lerin rasgele dizildiğini, algılanabilir bir pattern olmadığını varsayalım. O zaman birinci mesajı iletme için “on katrilyon kez 01 yaz” algoritması yeterlidir. Ama ikinci mesaj için, 20 katrilyon biti olduğu gibi içeren

“01101100110111100010... yaz”

algoritmasından başka bir algoritma bulamıyoruz. Bit sayısı arttıkça, algoritmanın uzunluğu ona koşut olarak artmaktadır. Başka bir deyişle, mesajı yazdıran algoritma mesajdan kısa olamamaktadır.

## BİLİMSEL TEORİ NEDİR?

Konuya açıklık getirmek için bir örnekle başlayalım. İnsanoğlu varoluşundan beri gök cisimlerinin hareketlerini merak etmiş, o hareketleri gözlemiştir. *Batlamyus, al Sufi, Uluğ Bey* ve daha yüzlercesi gözlem sonuçlarını kataloglar halinde yazmışlardır. Örneğin, Batlamyus'un kataloğunu ele alalım. Bu katalog, gök haritasında gezegenlerin ve diğer yıldızların koordinatlarını zamana bağlı olarak belirten sayılardan ibarettir. Henüz gezegenlerin güneş etrafında elips yörüngeler çizdiğinin bilinmediği çok eski zamanlardayız. Yalnızca çıplak gözle yapılan gözlem sonuçlarının yer aldığı bu katalogdaki veriler, elbette çok duyarlı değildir. Ama, o veriler Batlamyus'un bize iletmek istediği bilgidir (mesaj). Batlamyus, binlerce sayıdan oluşan bu katalogu önümüze koyarsa, çoğumuz o verilerden hiçbir şey anlamayız. O nedenle, Batlamyus, o katalogun içerdiği bilgiyi yorumlayıp bir *teori* olarak bize sunmalıdır. Gerçekten, Batlamyus, katalogun içerdiği verileri yorumlamış ve *yerküre merkezli evren* modelini kurmuştur. Bu bir teoridir. Bu teori Kopernik'e kadar ayakta kaldı. Kopernik, kendisinden önce yapılan gözlemlere, teleskopla yaptığı kendi gözlemlerini de katarak, Batlamyus'un teorisini çürüttü ve güneş merkezli evren modelini kurdu. Bu modelde, gezegenler güneş merkezli çember yörüngeler çizer. Bu da bir teoridir. Sonunda, Kepler, bütün gözlem sonuçlarını yeniden yorumlayarak, gezegenlerin güneş odaklı birer elips yörüngede dolaştıkları görüşünü ortaya koydu. Bu da bir teoridir. Bu teoriyi kullanarak, gezegenlerin ne zaman nerede olduklarını hesaplayabiliyoruz. Başka bir deyişle, teori, bize gözlem sonuçlarını geri veriyor.

Görüldüğü gibi, gözlemlerden ya da deneylerden elde edilen verilerin tablolar halinde yazılması bir teori yaratmıyor. Söz konusu ham verilerin yorumlanarak, herkesin anlayacağı *kısa* bir dille anlatılması gerekiyor. O da yetmiyor, teorinin gelecekte olacaklar hakkında bilgi içermesi gerekiyor. Gezegenin yörüngesini biliyorsam, onun ne zaman nerede olacağını hesaplayabiliyorum. Bu iş, *kehanetten* çok farklı bir şeydir. Bunlar olduğunda, ham veriler bir teoriye dönüşmüş oluyor. Elbette, toplanan verilerin duyarlılığı, kullanılan gözlem/deney aletlerinin gelişmişliğine bağlı olduğu gibi, verilerin yorumlanması da bilim adamının bilgi ve yetenekleriyle sınırlıdır. Şu anda, bir teorinin doğru ya da yanlışlığı amacımız için önem taşıyor. Yanlış teoriler, nasıl olsa, bir gün bilimsel bilgilerin biriktiği ambardan atılacaktır. Bilimin gücü burada yatar. Bilimin bilgi

ambarı çok dinamiktir, yanlış olduğu kanıtlanan teoriler hemen yerlerini yeni teorilere kendiliğinden bırakırlar.

Şimdi, bir teori kurma olgusunu algoritmik seçkisizlik kavramıyla ifade edeceğiz. Algoritmik seçkisizlik tanımını vermeden önce, Solomonoff'un bilimsel teoriyi açıklamak için kullandığı "*inductive inference*" yönteminden söz etmeliyiz. Bilim adamı bir sürü deney/gözlem yapar. Bunları bitlerden oluşan bir dizi (mesaj) olarak düşünelim. Bilim adamı bu mesajı iletmek istemektedir. Bu mesajı gönderen en az bir tane algoritma vardır ve o da dizinin kendisidir. Bundan başka algoritmalar da olabilir. Bilim adamı mesajı gönderen bir algoritma kurmuş olsun. Algoritma, ilettiği mesajdan kısa değilse bir teori olamaz. Algoritma ilettiği mesajdan daha kısa ise, diziyi aynen iletmekle kalmayıp gelecek gözlemler için de öngörü yapıyorsa, bu algoritma bir teoridir. Bu koşulu sağlayan birden çok algoritma varsa, daima en kısa (bit sayısı en az) olan algoritma tercih edilir. Bu tercih **Occam's razor** diye bilinir: *Aynı işi yapan teoriler arasından en basiti tercih edilmelidir.*

**Algoritmik Seçkisizlik:** Yukarıdaki örneklerden hareketle, Chaitin ve Kolmogorov, seçkisiz diziyi şöyle tanımladılar:

*Kendisinden daha kısa bir algoritma ile yazılamayan dizi seçkisizdir.*

Bu tanım, sezgisel kavrama dayalı olasılık kuramını sağlam bir temel üzerine taşımaktadır. Elbette, seçkisizliğin bu yeni tanımı, olasılık kuramının aksiyomlarını yoketmiyor, olasılığın hiçbir uygulamasını değiştirmiyor, yalnızca temeli sağlamlaştırıyor. Olasılık açısından peşinde olduğumuz şey, gözlemlerden çıkan seçkisiz bir  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  dizisi verilmişken, bir sonraki terimin, yani  $x_{n+1}$  teriminin ne olacağını öngörebilmektir.  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  dizisini ileten ve  $x_{n+1}$  teriminin ne olacağını öngören ve diziden kısa olan algoritma bir teoridir.

## KOLMOGOROV KARMAŞIKLIĞI (complexity)

Verilen bir diziyi ileten sonsuz sayıda algoritma kurulabilir. Örneğin, "233 e 1 ekle", "235 ten 1 çıkar", "117 yi 2 ile çarp" gibi algoritmaların hepsi 234 dizisini iletir. Bu tür algoritmalardan sonsuz sayıda yazılabileceği açıktır. Bizim için ilginç olanı en küçük

olanıdır. Aynı diziyi ileten algoritmalar arasında en kısa olana **minimal algoritma** diyeceğiz. Bir dizi için bir tane minimal algoritma olabileceği gibi, bir çok minimal algoritma da olabilir.

İlettiği dizi ister seçkili, ister seçkisiz olsun minimal bir algoritmanın kendisi daima seçkisiz olmak zorundadır. Aksi taktirde, onu ileten daha kısa bir algoritma var olur ve dolayısıyla söz konusu algoritma minimal olamaz.

Karakterlerden (harf ve simgeler) oluşan bir  $s$  stringi düşünelim.  $s$  stringini yazdıran bir  $P$  programına  $s$  stringini iletiyor diyelim.  $P$  nin uzunluğu,  $P$  içindeki karakterlerin sayısıdır.

*$s$  stringini ileten en kısa  $P$  programının uzunluğuna  $S$  stringinin karmaşıklığı denir.*

$s$  stringini, yukarıdakiler gibi bitlerden oluşan bir dizi olarak düşünürsek, bu dizinin karmaşıklığı o diziyi ileten minimal algoritmanın uzunluğuna eşit olur. Buradan, seçkisizlik için şu denk tanımı elde ederiz:

*Bit sayısı Kolmogorov karmaşıklığına eşit olan dizi seçkisizdir.*

Tabii, buradaki *eşitlik* yaklaşıklık anlamındadır. Dizilerin bit sayıları çok çok büyüdüğünde, aradaki farkın önemi kalmamaktadır. Kolmogorov karmaşası, seçkisizliği tanımlamakla kalmıyor, seçkisizliğin ölçümünü de veriyor.

## SEÇKİSİZ SAYILARIN ÇOKLUĞU

Algoritmik seçkisizliği açıklayan yöntemimiz seçkisiz sayıların çokluğu hakkında da bilgi verir.  $0$  ya da  $1$  sayaklarının dizideki dağılım frekansları önemli ipucu olabilirler.

$s$  dizisi bitlerden oluşan bir dizi olsun.  $s$  nin *algoritmik karmaşıklığı*, onu ileten minimal algoritmanın uzunluğu idi. Öyleyse, onu ileten bir algoritmanın uzunluğu  $s$  nin algoritmik karmaşıklığından daha küçük olamaz.

Bazı dizilerde tekrarlanan patternler olabilir.  $d$  dizisi  $s$  içinde periyodik olarak tekrarlanan bir altdizi olsun. Örneğin,  $s = 0101010101010101$  dizisi  $d = 01$  altdizisinin  $10$  kez tekrarlanmasıyla oluşmuştur.  $P = "n \text{ kez } d \text{ yaz}"$  algoritması  $s$  dizisini

iletken algoritmalarından birisidir. O halde,  $s$  dizisinin algoritmik karmaşıklığı,  $P$  algoritmasının uzunluğundan büyük olamaz. Asıl amacımız,  $P$  nin uzunluğu ile  $s$  dizisinin bit uzunluğunu karşılaştırmaktır. Bu karşılaştırma bize,  $s$  dizisinin seçkisiz olup olmadığı konusunda bir ölçü verecektir.

Önce  $P$  algoritmasının uzunluğunu irdeleyelim.  $n$  sayısının algoritmik karmaşıklığı yaklaşık olarak  $\log_2 n$  dir. Yaklaşık diyoruz, çünkü algoritmanın gerçek uzunluğu kullanılan makina diline bağlıdır. Yeterince büyük  $n$  sayıları için  $\log_2 n$  sayısı  $n$  sayısından çok küçüktür, dolayısıyla algoritmanın uzunluğu  $s$  dizisinin uzunluğu ile karşılaştırılırken görece olarak ihmal edilebilir. Geriye kalan “kez” ve “yaz” stringlerinin uzunluğu zaten yok denilecek kadardır, onlar da ihmal edilebilir. O halde,  $P = “n \text{ kez } d \text{ yaz}”$  algoritmasının uzunluğunu,  $s$  dizisinin uzunluğu ile karşılaştırırken belirleyici olan tek etmenin  $d$  dizisinin uzunluğu (bit sayısı) olduğu sonucuna varırız.

Buradan yola çıkarak  $n$  bit uzunluğundaki dizilerin algoritmik karmaşıklıklarını  $n-1$ ,  $n-10$ ,  $n-100$ ,  $n-1000$ , ... gibi sınıflara ayırabiliriz. Artık  $P$  nin uzunluğu ile  $d$  nin uzunluğunu yaklaşık eşit sayarak, aşağıdaki inductive yöntemi uygulayabiliriz.

Uzunluğu 1 olmak üzere  $n$  bitlik dizi ileten kaç tane algoritma vardır? “ $n \text{ kez } 0 \text{ yaz}$ ” ve “ $n \text{ kez } 1 \text{ yaz}$ ” algoritmaları bu işi yapan iki algoritmadır. Birincisi  $000...0$  dizisini, ikincisi ise  $111...1$  dizisini iletir. Bu algoritmaların ilkinde  $d$  dizisi yalnızca ‘0’ dan, ikincisinde ise yalnızca ‘1’ den ibarettir. Her ikisinin de uzunluğu 1 bittir. Bir bitlik başka algoritma yoktur. 1 bitlik algoritmaların sayısını  $2^1$  biçiminde gösterebiliriz. Benzer olarak, 0 ile 1 sayaklarından elde edilecek 2 bitlik dizilerin sayısı 4 dür: 00, 10, 11, 10. O halde, İki bitlik algoritmaların sayısı  $2^2$  dir. Benzer düşünüşle, üç bitlik algoritmaların sayısı  $2^3$ , ...,  $n-11$  bitlik algoritmaların sayısı  $2^{n-11}$  olacaktır. Bunların toplamı  $(2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{n-11}) = 2^{n-10} - 2$  dir. Demek ki, uzunluğu  $n-10$  dan az olan algoritmaların sayısı  $2^{n-10}$  dan daha azdır. Öte yandan  $n$  bit uzunluğundaki dizilerin sayısı  $2^n$  dir. Görüldüğü gibi, bunlar arasında ancak  $2^{n-10}$  tanesinin algoritmik karmaşıklığı  $n-10$  dan küçüktür.  $2^{n-10} / 2^n = 1 / 1024$  olduğuna göre, 1024 diziden ancak 1 tanesinin algoritmik karmaşası  $n-10$  dan küçüktür. Bundan anlaşılıyor ki seçkili sayılar çok seyrek, sayıların çoğunluğu seçkisizdir.

Yukarıda yaptıklarımızdan şu sonuç çıkmaktadır: Bir dizi verildiğinde onun seçkili olduğunu göstermek için, diziyi ileten ve diziden daha kısa olan bir algoritma olduğunu

göstermek yetecektir. Bulunacak bu algoritmanın minimal olması gerekmiyor. Ama bir dizinin seçkisiz olduğunu göstermek için onu ileten daha kısa bir algoritmanın var olmadığını göstermek gerekir.

## FORMAL SİSTEMLER

Gödel'in formal sistemler için ispatladığı eksiklik teoreminin benzerinin seçkisiz sayılar için de geçerli olduğu gösterilmiştir. Chaitin'in yaptığı bu işin önemini anlayabilmek için, formal sistemlerden söz etmemiz gerekiyor.

20.yüzyılın başında Georg Cantor (1845-1918)'un ortaya koyduğu kümeler kuramı, matematikte bir devrim yarattı! Bundan sonra matematiğin temelleri kümeler üzerine kurulmalıydı!.. İşin doğası olarak, matematikçiler şu soruya yanıt arıyordu: “Geçerli bir ispat nedir? Bir ispatın geçerli olduğunu nasıl anlayacağız?” Bu sorunun yanıtı, matematiğin temellerinde aranmalıydı. Ne varki, bu temeller kazıldıkça ortaya paradokslar çıkıyordu. Sağlam temeller oluşturmak yönünde yapılan çalışmaları üç okula ayırabiliriz: *Mantıksallık, sezgisellik ve biçimsellik*.

**Mantıksallık:** Russel ve Whitehead matematiğin temellerinde oluşan boşlukları yoketmek için matematiği mantığın içine almaya çalıştılar. 1910-1913 yıllarında yayımlanan üç ciltlik *Principia Mathematica* adlı yapıtta bütün matematiğin mantıksallığa (logicism) indirgenebileceğini savundular. Modern matematiksel mantığın doğmasına yol açan *Principia Mathematica*, Aristotle'in *Organon* adlı ünlü yapıtından sonra, mantık alanında yazılmış en önemli yapıt sayılır.

**Sezgisellik (intuitionism):** Matematiği sezgisel olarak kurmayı amaçlayan bu okul esas olarak Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881-1966)'in ortaya koyduğu sistemdir. Cantor'un kümeler kuramına dayalı yapıyı şiddetle yadsırken, Russell'in usbilimselliğine de karşı durur.

**Biçimsellik (formalism):** 1927 yılında David Hilbert (1862-1943), adına *Kanıt Kuramı (Proof Theory)* dediği formal bir matematik dili kurdu. Bu dilin sonlu bir alfabesi, apaçık bir grameri, sonlu sayıda aksiyomları, teoremleri elde etmek için sonlu sayıda çıkarım kuralları (lojik ve aritmetik kurallar) vardı. Böyle bir sisteme *formal sistem* denir. Bir formal sistemde iki önemli nitelik istenir.

1. Tamlık (completeness): İçindeki her teorem kanıtlanabiliyorsa sistem tamdır. Başka bir deyişle, sistemdeki her  $p$  önermesi için ya ' $p$  doğrudur' ya da ' $p$  yanlıştır' teoremlerinden biri kanıtlanabiliyorsa  $M$  sistemi tamdır.
2. Tutarlılık (çelişkisizlik, consistency):  $M$  sistemindeki her  $p$  önermesi için ya ' $p$  doğrudur' ya da ' $p$  yanlıştır' teoremlerinden ancak birisi geçerliyse  $M$  sistemi tutarlı, her ikisi aynı anda varsa  $M$  sistemi tutarsızdır.

## KALEYİ YIKAN ADAM!

Matematik Dünyası, o zamanın dahi matematikçisi Hilbert'in inşa ettiği formal yapıdan hiç kuşku duymadı. Bu formal sistemi matematikteki krizi tamamen çözen bir yapı, sağlam bir kale gibi görüyordu. Ta ki, 1931 yılında Kurt Gödel (1906 -1978) bir fiskeyle Hilbert'in kalesini yerle bir edene kadar... O zamana kadar kimse Hilbert'in yanılmış olabileceğini düşünmüyordu. Gödel, bir formal sistem içinde ispatlanamayan doğru bir önerme olduğunu gösterdi. Bu sonuç, bir formal sistemin tam olup olmadığının o sistem içinde kanıtlanamayacağını söylüyor, dolayısıyla, Hilbert formalizmini yıkıyordu.

Kaleyi fetheden *Kurt Gödel*, Aristoteles'ten sonra gelmiş en büyük mantıkçı ününü kazanacaktır. Gödel'in kaleyi yıkan ispatı, Giritli Epimenides'in ünlü paradoksuna dayanır. Epimenides,

*"Bütün Giritliler yalancıdır."*

der. Kendisi de Giritli olduğuna göre, acaba Epimenides'in bu söylemi doğru mu, yoksa yanlış mı? Mantıktaki basit çıkarım kuralıyla şu sonuca ulaşıyoruz: Söylemi doğru kabul edersek söylemin yalışlığı çıkar. Söylemi yanlış kabul edersek, söylemin doğruluğu çıkar. Bu söylemi, daha basit biçime dönüştürebiliriz:

*"Bu söylediğim şey yanlıştır."*

Gödel, bu paradoksu dahice kullandı. Önce formal sistem içinde, sistemin kurallarına uyarak pozitif tamsayılarla ilgili doğru bir önerme kurdu. “Doğru” kavramı yerine “*ispatlanabilir*” kavramını koyarak, kurduğu doğru bir önermenin sistem içinde ispatlanamadığını gösterdi.

Bir formal sistem içerisinde bir önermenin ispatlanması demek, sistemin aksiyomlarına ve çıkarım kurallarına (aritmetik kurallar) uyularak o önermenin doğruluğunun gösterilmesi demektir. 1937 yılında, Alan Turing, bir mantıksal sistem içerisinde hesaplanabilir (computable) her işlemi yapan bir algoritma (bilgisayar programı) olduğunu göstermiştir. Bu algoritmaya Turing Makinası diyoruz. Bazan buna, ‘*mekanik işlemlerle ispat*’ da denir. Turing Makinası metalden yapılmış bir araç değil, hesabı (computation) yapan bir bilgisayar programıdır. O halde, bir sistem içinde bir önermenin doğruluğunun gösterilebilmesi ile o işi yapan bir algoritmanın (Turing Makinası) var olmasını denk sayacağız. Hemen belirtelim ki, Turing, Gödel’in eksiklik teoremini daha genel olarak kanıtlamıştır: Bir formal sistemde ancak sayılabilir sayıda teoremi ispatlayan algoritma kurulabilir. Sayılamayan sonsuz sayıda teoremin ispatı için algoritma kurulamaz. Bu genelleme nedeniyle, Turing’in yaptığı işin, Gödel’in yaptığı işten çok daha büyük olduğunu söyleyen matematikçiler vardır. Ama, bilimsel gelişme böyledir. Gödel olmasa, belki Turing olmazdı. O nedenle, biz, Gödel’in hakkını Gödel’e vermekten yanayız.

Buraya kadar söylediklerimizden şu sonucu çıkarabiliriz: Bir formal sistemde yalnız mantık ve aritmetik işlemler içeren *recursive* süreçle ispatı yapan/denetleyen bir algoritma vardır. Daha ileri giderek, Hilbert zamanında olmayan bir şeyi bu gün yapabiliriz. İspatı yapan/denetleyen algoritmayı bilgisayarda çalıştırabiliriz.

Bununla da yetinmeyerek, en azından kuramsal olarak, şunu da düşünebiliriz. Formal sistemimizde ispatlanabilecek bütün teoremleri listeleyebiliriz. Bunu yapmak için, ilk adımda, sistemde bir karakter (harf diyelim) uzunluğundaki bütün sembolleri sözlük sırasına dizelim. Sonra her birine ispat algoritmasını uygulayalım. Bu işin sonunda, eğer varsa, bir karakterden oluşan bütün teoremleri elde ederiz. İkinci adımda, benzer işi iki karakter uzunluğundaki sembolere uygulayarak iki karakter uzunluğundaki bütün teoremleri listeleyelim. Üçüncü, dördüncü, ... adımları atmaya devam edelim. Bu işin sonunda, ispatlanabilen bütün teoremleri uzunluklarına göre sıralamış oluruz. Tabii, bu eylemde kuramsal düşünüyor, işi bitirmek için gerekli zamanın olduğunu kabul ediyor ve fiziksel bir kısıt öngörmüyoruz.

Turing Makinasını kullanırsak, Gödel'in algoritma yaratmak için giriştiği zor ve uzun işlemlerden kurtuluruz. Dolayısıyla, eksiklik teoreminin çok kısa ve zarif ispatları ortaya çıkar. Aşağıda, bunlardan ikisi verilmiştir.

**1. Yöntem.** Doğal sayılardan oluşan ama hiçbir algoritma tarafından numaralanamayan (sayılamayan) bir küme oluşturan aşağıdaki ispat yöntemi, gerçel sayıların sayılamazlığını göstermek için Cantoru'un kullandığı köşegen yönteminden esinlenmiştir ve Russel'in berber paradoksuna dayanmaktadır.

Doğal sayı (alt)kümelerini numaralayan bütün programların  $P$  kümesini düşünelim. Bu programların kümesini numaralayabiliriz:  $P = \{p_1, p_2, \dots, p_r, \dots\}$  olsun. Bu programların çıktıları doğal sayılardır. Bazı programların çıktısı içinde kendi numaraları vardır, bazılarında yoktur. Örneğin,  $P$  ye ait bir  $p_r$  programının çıktısı içinde  $r$  sayısı varsa, bu program kendi numarasını numaralıyor, değilse numaralamıyor olacaktır. Kendi numarasını numaralamayan bütün programların numaralarından oluşan  $K$  kümesini düşünelim. Bunun  $K'$  tümleyenini kendi numarasını numaralayan bütün programların numaralarından oluşan kümedir. Numarası  $K$  da olan bütün programların kümesine  $P_K$ , bunun  $P$  ye göre tümleyenine de  $P_{K'}$  diyelim.

$$P = P_K \cup P_{K'}, \quad P_K \cap P_{K'} = \emptyset$$

olacaktır.  $K$  kümesini numaralayan bir algoritma var mı?  $K$  kümesini numaralayan bir  $p_k$  programı varsa, bu program  $P$  içindeki programlardan birisidir. Öyleyse, ya  $P_K$  kümesine ya da  $P_{K'}$  tümleyenine ait olacaktır. Öte yandan,

$$p_k \in P_K \Leftrightarrow k \notin K \Leftrightarrow k \in K' \Leftrightarrow p_k \in P_{K'}$$

olur. Bu bir çelişkidir. Bu çelişkiyi yaratan neden, başta yaptığımız kabuldür; yani  $K$  kümesini numaralayan bir  $p_k$  programı var kabul edilmişti. Sistemimizde çelişkiye yer veremeyeceğimize göre, bu kabulü yapamayız. O halde, doğal sayıların bir altkümesi olan  $K$  kümesini numaralayan (sayan) bir program yoktur. Oysa  $K$  doğal sayıların bir alt kümesi olduğu için numaralanabilir (sayılabilir) bir kümedir. Ama onu sayan bir algoritma yoktur. Algoritma yoktur demek, formal sistemimiz içinde  $K$  kümesi sayılamıyor demektir.

**2. Yöntem.** Eğer kendi zamanında Turing Makinası biliniyor olsaydı, Gödel, eksiklik teoremini şöyle ispatlardı:

1. Her soruyu doğru yanıtlayan bir makina var olsun. Buna Evrensel Turing Makinası (ETM) diyelim. Bunu, metalden yapılmış bir araç değil, bir algoritma olarak algılayacağız. Bu makinanın tasarımı çok karmaşık olabilir, ama daima sonlu işlem sonunda doğru yanıtı ulaşmaktadır. Başka bir deyişle, formal sistem içinde her doğruyu ispatlayan bir algoritmadır.
2. Gödel, ETM' e onun yapısıyla ilgili bir soru sorsun. Makina bunun yanıtını bir algoritma ile verecektir. Bu algoritma, ETM'in kendi algoritmasının bir fonksiyonu olacağı için, Gödel'in sorusuna verilecek yanıtı  $P(ETM)$  algoritmasıyla göstereyim. Bu da yeni bir Turing Makinasıdır.
3. Karşısındaki akıllı makinayla küçük bir oyun oynamaya hazırlanan Gödel, yüzünde kendinden emin bir gülümsemeyle şu tümceyi yazar: " $P(ETM)$  bu cümleye asla doğrudur demez." Kısalık adına, bu cümleye G diyelim. O zaman Gödel'in cümlesi bir önerme olarak şöyle yazılabilir:

G: " $ETM$  asla  $G$  ye doğrudur demez." (\*)

4. Gödel son hamlesini yaparak, ETM'e G nin doğru olup olmadığını sorar ve rakibini mat etmek üzere olan usta satranççı edasıyla geriye yaslanıp bekler.
5. Bundan sonra biraz dikkat isteyen mantıksal çıkarımları izleyebilmek için, (\*) ifadesinde G nin iki farklı yerde yer aldığına dikkat edelim. Birisi ifadenin başındaki G, ötekisi tırnak içinde yazılan cümledeki G. Bu iki G birbirinin aynısıdır.
6. Eğer ETM, (\*) ifadesinin başında olan tırnak dışındaki G yi kastederek, " $G$  doğrudur" derse, tırnak içindeki ifade doğru olacaktır. Tırnak içindeki ifadenin doğru olması için, tırnak içindeki G nin yanlış olması gerekir. O halde ETM, G ye " $doğrudur$ " dediğinde G ye " $yanlıştır$ " demiş olur.
7. Eğer ETM, (\*) ifadesinin başında olan tırnak dışındaki G yi kastederek, " $G$  yanlıştır" derse, tırnak içindeki ifade yanlış olacaktır. Tırnak içindeki ifadenin yanlış olması için, tırnak içindeki G nin doğru olması gerekir. O halde ETM, G ye " $yanlıştır$ " dediğinde G ye " $doğrudur$ " demiş olur.

Bu oyunda, biz G nin ne olduğunu çok iyi açıklamadan biraz bulanık ifade kullandık. Gödel, bu oyunu oynasaydı, 1931 yılında yaptığı gibi, G yerine yanıtını iyi bildiği bir matematiksel ifade koyacak,  $P(ETM)$  yerine de, kendisinin oluşturduğu ve ancak G doğru olduğunda çözümü var olan karmaşık bir polinom koyacaktı.

Gödel, formal sistem içinde doğru olduğunu bildiği bir soruyu ETM (Evrensel Doğruluk Makinası)'e soruyor, yanıt alamıyor. Demek ki, ETM, Gödel'den daha akıllı değil, diyerek kendimize bir pay çıkaramayız. Çünkü, ETM ile yer değiştirecek olsak, biz onun durumuna düşeriz. Burada çıkan sonuç, bizim ETM'den akıllı oluşumuz değil, sistemde giderilmesi olanaksız olan kalıtsal eksikliktir. Bu basit oyunun gerisinde, bilim dünyasının bilgiye bakışını değiştiren çok önemli bir sonuç yatar:

Her formal sistemde ispatlanamayacak doğrular vardır.

Chaitin, bu önemli sonucu olasılık kuramına taşımıştır:

Seçkisizliği ispatlanamayan seçkisiz sayılar vardır.

Bu sonuç, olasılıkta ve informasyon teorisinde önemli sonuçlar doğurmaktadır.

### Kaynakça

1. Chaitin, G. (1977), "Algorithmic Information Theory", *IBM Journal of Research and Development*. 21 , pp. 350-359.
2. [Cox](#), R. T. (1946), "Probability, Frequency, and Reasonable Expectation", *Am. Jour. Phys.*, 14, 1-13.
3. [Cox](#), R. T. (1961), "*The Algebra of Probable Inference*", Johns Hopkins University Press, Baltimore, MD.
4. [Fine](#), T.L. (1973), "Theories of Probability; An examination of foundations", *Academic Press, New York*.
5. Solomonoff, R. J. (1964), "A Formal Theory of Inductive Inference", *Info.Control* 7, 1- 224.
6. Solomonoff, R. J. (1960), "A Preliminary Report on a General Theory of Inductive Inference" (*Revision of Report V-131, Feb 4, 1960*), Contract AF 49(639)-376, Report ZTB-138, Zator Co., Cambridge, Mass., Nov, 1960.
7. Solomonoff, R. J. (1997), "The Discovery of Algorithmic Probability", *Journal of Computer and System Sciences*, Vol. 55, No. 1, pp. 73-88.
8. Li, M. - Vitanyi, P. (1997), "*An Introduction to Kolmogorov Complexity and Its Applications*", Springer-Verlag, N.Y.

## YAZARIN ÖZGEÇMİŞİ

### Timur KARAÇAY

1942 yılında Kayseri'nin Pınarbaşı ilçesine bağlı Halitbeyören köyünde doğdu. Doğduğu köyün ilkokulunu 1953 yılında, Pınarbaşı Ortaokulunu 1956 yılında, Sivas İlköğretmen Okulunu 1959 yılında bitirdi. Aynı yıl Ankara Atatürk Lisesi bitirme sınavlarını başardı ve üstün başarılı öğrencilerin seçildiği Ankara Yüksek Öğretmen

Olasılığın Matematiksel Temelleri, Timur Karaçay

Okuluna girdi ve aynı zamanda Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümüne kaydoldu.

1963 yılında Fen Fakültesini ve Ankara Yüksek Öğretmen Okulunu bitirerek Sivas 4Eylül Lisesine matematik öğretmeni olarak atandı. Bir yıl öğretmenlik yaptıktan sonra, 1964 yılında Ege Üniversitesine asistan olarak girdi. Profesör Lothar Koschmieder'in yönetiminde yaptığı Fourier Analizi konulu doktorasını 1967 yılında tamamladı.

1967-1968 yıllarında UNECO tarafından Aarhus (Danimarka) Üniversitesinde açılan uluslararası Fonksiyonel Analiz Okulu'na katıldı. 1969 yılında Hacettepe Üniversitesine geçti ve Matematik Enstitüsü Müdürü olarak bölümün kuruluşunda görev aldı.

Asıl çalışma alanı Fonksiyonel Analiz olan T.Karaçay 1974 yılında Doçent, 1979 yılında Profesör ünvanını aldı. 1976-1977 Akademik yılında Liverpool (İngiltere) Üniversitesinde, 1989-1990 Akademik yılında Tübingen (Almanya) Üniversitesinde araştırmacı olarak çalıştı. 1990-91 Akademik Yılında IBM Bilgisayar Destekli Eğitim Programında görev aldı. Ulusal ve uluslararası dergilerde yayınlanmış 18 bilimsel makalesi ile kimisi İngilizce yazılmış 30 dan fazla kitabı vardır.

TÜBİTAK ve Milli Eğitim Bakanlığı (MEB) tarafından yürütülen Modern Matematik ve Fen Öğretimi Projesi, MEB Talim ve Terbiye Kurulu Matematik Öğretim Programlarını Geliştirme Projesi, EARGET Projesi gibi ulusal projelerde Bilimsel Komisyon üyeliği yaptı.

Karadeniz Teknik Üniversitesi Elektronik Hesap Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü, Başkent Üniversitesi Bilgi İşlem Daire Başkanlığı, Dekan Yardımcılığı, Bölüm Başkanlığı gibi idari görevlerde bulundu. Halen Başkent Üniversitesi İstatistik ve Bilgisayar Bilimleri Bölümünde öğretim üyesidir. Evli ve iki çocukludur.

## KAVRAMLAR AĞI İÇİNDE OLASILIK

**Ahmet İnam**

ODTÜ Fen Edebiyat Faköltesi Felsefe Bölümü, 06531 Ankara, Tel: 0312 210 31 41,  
Fax:0312 210 79 74, ainam@ metu.edu.tr

### ÖZET

Bu alışma olasılık kavramını költür yaşamı içinde bağlantılı olabileceği düşünölen diğer kavramlarla ilişkiye sokarak, onun fenomenolojik açıdan bir betimlemesini yapmayı amaçlıyor.

**Anahtar Sözcükler:** Olasılık, Olanak, Olabilirlik, Mathema-noetik, Trans-noetik

### GİRİŞ

“Olasılık”, özellikle matematiğin üzerinde çalıştığı, bilimlerce kullanılan bir kavramdır. Bu kavramın bilimlerce yorumunun ve kullanımının yanında, insanın bu gezegendeki varoluşuna ilişkin, alışılmış “olasılık felsefesi”ni aşan anlamlandırmaları da gerçekleştirilebilir. Bu çalışmada amaçlanan, “olasılık” kavramının ilişkili olabileceği diğer kavramlarla bağlantısını kurarak, insanın “geleceğe duruşu” konusunda yorumlar yapmaktır.

## GELECEĞE DURMA TARZI OLARAK OLASILIK

İnsan, kâhinleri, mucize sahiplerini bir yana bırakırsak, geleceği ancak “tahmin” edilebilir, bir diğer deyimle, kestirilebilir. Geçmişte yaşananları anımsar. Kayıtları, belgeleri varsa, onları **şimdiye aktararak**, bilmeye çabalar.

Olasılık, matematiksel bir model olarak, bilinmeyene karşı bir **epistemolojik duruş** tarzıdır. Bilinmeyen, gelecekte olacak olanlarla, geçmişte olup da **bilgi alanımıza**, henüz girmemiş, belki de, Kant’ı anımsarsak, hiç girmeyecek olanlardan oluşur.

Varlığın, oluşum sürecinde, olabilecek olanlarla, olamayacak olanlar söz konusudur. Bu, varlığın bilgimizden bağımsız oluşum sürecindeki işleyişi onun “olabilirlik”i ile ilgilidir. **Olabilirlik**, içine **olanak**, **olasılık**, **oluş** kavramlarını alan, en geniş, **ontolojik** yapıyı gösteren bir kavramdır. Olan **olabilir** olduğu için olmuştur. “Olanak”, olabilir olanın, bizce bilinebilen, düşünebilen, epistemolojik alana girebilen öbeğine verdiğimiz addır. Olasılık ise, olanaklı olanı matematiksel model içinde kavrama çabasının adıdır. Oluş ise olanağın gerçekleşip, bir süreç olarak ortaya çıkmasıdır.



Yukarıdaki çizelgeye göre, 1. geçiş, olabilirliğin, bilinir, düşünülebilir duruma gelmesini gösteriyor! 2. geçiş, bu olanağın matematiksel bir modelle hesaplanması 3. geçiş ise olanağın gerçekleşmesiyle son buluyor.

Bilgi ve düşünme alanımıza giren olanakları, bir açıdan üçe ayırabiliriz: 1. Olabilecekler 2. Olmuş olanlar 3. Olanlar. Bu ayırım, gelecek, geçmiş, “şimdi” ayırımına dayanıyor. Yaşantı açısından bakıldığında ise olanaklar yine üçe ayrılabilir: 1. Yaşanacaklar 2. Yaşanmış olanlar 3. Yaşanmakta olanlar. Yaşanmakta olanlar, yaşantılardır; yaşandıkları “süre” de, olanakları tüketilmiş olur. Bu anlamda yaşantıların olanakları yoktur, artık kalmamıştır.

Olasılık, Anglo-Amerikan literatür’deki alışılan anlamıyla, öznel olasılık (subjective probability), yaşanacaklar üzerinde olabilir.

Yaşanacakların ilginç bir durumu vardır: Bir bölümü geçmişte yaşanmış, belleğe aktarılmış, bellekte izi olan ya da olmayan (bir biçimde izi silinmiş), anımsanarak ya da izi

bulunarak yeniden yaşanacak olan yaşantılardır. Bir bölümü ise henüz yaşanmamıştır. Yaşanacak yaşantılar, olanakları olduğu yaşanır. Bu olanaklar bilginin dahilinde matematiksel bir modelle hesaplanabilirse olasılıkları meydana getirirler.

Öyleyse olasılık, hesaplayabileceğimizi düşündüğümüz olanaklardır. Olanaklar metaforik bir söyleyişle bize gelecekte gelir. Geleceğe karşı, şu anki bilgilerimize dayanarak hesaplama tutumudur, **olasılık tutumu**.

## OLANAKLAR KARŞISINDA BAZI DURUŞLARIMIZ

Olanakların bir öbeğini **olacaklar** olarak ayırabiliriz. Bunlar, öngördüğümüz, beklediğimiz, öndeyide (prediction) bulunduğumuz, tahmin ettiğimiz, belki de bir tür “kehânet”le ulaştığımız olanaklardır. Örneğin, on yabancı dili konuşabilme olanağım olduğu hâlde, bunlardan dördünü **olacaklar** öbeğine ayırıp, üzerlerinde çalışabilirim.

Olanaklar karşısında onların **anlamlarını** düşünebildiğim gibi, aralarında **seçme** de yapabilirim. Seçmenin ardından ya da seçme öncesi **karara** varıp, bunları gerçekleştirmek için **eyleme** de geçebilirim.

Bir başka açıdan, olanaklar karşısında tavırlarımı şu dört öbekte sınıflandırabilirim:

a) Tümüyle edilgin bir tutum içinde yalnızca **beklerim**. Bir benzetmeyle söylersek, yerinde saymamdır, bu.

b) **Umarım**. Bu durumda olanaklardan bir öbeği seçer, onları olacak kılarım. Olacak kılma süreci, eylemle bitecek, eylem ardında da, diğer tutum ve eylemlerle sürecek olan **oldurma** sürecinin bir parçasıdır. Olacak kılma sürecim, kararım, kararlılığımla sürebilir. Yine bir benzetmeyle söylersek, **ileriye** gitme sürecidir bu. Kararımın ardından **planlama** süreci başlayabilir. İşte bu süreçte olasılığı kullanabilirim. Olasılık, olacakları **matematik ışığında** görebilmektedir. Bilim ve teknoloji odağında yaşayan çağımız insanın bir duruşudur, “muhtemel” olana. Bu tutuma Eski Yunanca’dan çıkarak **Mathema-noetik** duruş diyebiliriz (Bu yazıda “tutum” ve “duruş” ayırımı yapmıyorum!). “Mathema” burada modern anlamıyla matematiği, “noetik” ise içinde bulunduğum durumu anlamlandırmayı

göstermektedir. **Mathema-noetik** duruş, olacaklara matematiksel gözlükle anlam yükler (Elbette daha farklı anlam yüklemelerle birlikte!).

**Mathema-noetik** tutum, salt anlama tutumu olabildiği gibi (alışlagelen deyimiyle, “seyir”den kaynaklanan teorik tutum!) eylemle (praksis), bir üretim süreciyle (poiêsis!) bir **oldurma** tutumu da olabilir.

c) **Vazgeçerim.** Benzetmeli söyleyişle bu durum “geri gitme” durumudur! Vazgeçme, karar ya da hesap sürecinin sonunda gerçekleşebileceği gibi başında da olabilir.

d) Tüm bu umma, karar alma, seçme, hesaplama, planlamaların dışında geleceğe **açılma** içinde de olabilirim. Açılma duruşu, bir **aşkın** duruştur, elbette noetik bir duruştur ama **mathema-noetik** duruş değildir! Hesap **ötesi** bu duruşta, geleceğe farklı bir çıkış söz konusudur. Geleceğe çıkış, geleceğe çıkışımızı etkileyecek olan **iklim** le yaşanır. İklim, fiziksel, toplumsal, kültürel, etik politik, ruhsal atmosferdir. Açılma **iklimi**, zaman zaman mistik bir iklim olabilirse de, Heidegger’in “Gelassen heit” adını verdiği duruşla da ilgilidir! Varlığın kendini bize açması için, bizim varlığa kendimizi açmamız, varlıkla, bizim kültürümüzden alınma bir deyimle, **hemhâl** olma durumudur. Heidegger’in **stimmung** adını verdiği duruma benzer bir durum söz konusudur burada. Bu tutuma **trans-noetik** tutum dersek, **mathema-noetik** tutumun tamamlayıcısıdır bu tutum, ne denli ona uzak görünse de. Elbette şimdilerde pek moda olan “empathy” ile karıştırmamalıdır! “Psikolojik” bir hâl değildir, psikolojik sonuçları gözlemlense de! Çağımız insanının neredeyse unuttuğu bir geleceğe çıkış yoludur. Denetimin, ele geçirmenin, egemen olmanın, hesaplanarak bilmenin ortadan kalktığı bir hâldir.

**Mathema-noetik** açıdan, böyle bir açılışın yaşanma olasılığı elbette sıfır değildir. Umut kapıdadır.

## YAZARIN ÖZGEÇMİŞİ

### Ahmet İNAM

1947 Sandıklı da doğdu. 1971’de ODTÜ Elektrik Mühendisliği Bölümünden mezun oldu. 1980’de Edmund Husserl’de Mantığın Yeri başlıklı teziyle İstanbul Üniversitesi Edebiyat Fakültesinde felsefe doktorasını tamamladı. 1980’den bu yana ODTÜ’de felsefe ve mantık dersleri vermektedir. 1989’da felsefe profesörlüğüne atandı. Altı yüzden fazla makalesi ve otuza yakın kitabıyla, bilim teknoloji, sanat konularında çalışmalarını sürdürüyor.



## BEYNİN ALFA AKTİVİTESİNİN ZİHNİN EVRİMİNDE ROLÜ

Erol BAŞAR<sup>1</sup> ve Bahar GÜNTEKİN<sup>1</sup>

<sup>1</sup>İstanbul Kültür Üniversitesi, Fen ve Edebiyat Fakültesi  
Ataköy Kampüsü, Bakırköy 34156 İstanbul  
Tel:0212 498 43 92  
e-posta: [e.basar@iku.edu.tr](mailto:e.basar@iku.edu.tr)

### Abstract

The work of the genius French philosopher Henri Bergson, who studied the work of Charles Darwin and came to the conclusion that the *superiority of the human brain* in comparison to lower species is its ability of “*intuitive and creative thinking*” gains importance according to our recent empirical studies and metaphysical essays. We extended our results on the role of brains electrical alpha activity during evolution of species.

Henri Bergson, who studied the evolution theory of Charles Darwin, emphasized three types of mental abilities during evolution of species: *instinct, intelligence and intuition* (1). Instincts are observed in low living beings as invertebrates, intelligent behavior belongs also to functional properties of lower vertebrates and mammals. However, only human beings have the ability of intuition. This is, also according to Descartes and John Locke, what makes the human being different from other species. At the beginning of 20<sup>th</sup> century the proposal of Bergson could not be analyzed by means of electric recordings. We have analyzed the electrophysiology of species consisting in recordings of spontaneous electrical activity and evoked potentials, jointly with the laboratory of T. H. Bullock in San-Diego (2,3). In addition to the conventional electrophysiological recordings we make use of the efficient method of oscillatory brain dynamics. In our experiments we used isolated ganglia of Aplysia, Helix Pomatia and brains of low vertebrates as goldfish and ray. We also analyzed cortical and sub-cortical structures of the cat brain and the scalp recordings from the human brain. Our analysis of brain oscillations included delta, theta, alpha, beta and gamma oscillations.

Our findings revealed that the alpha oscillations (10 Hz) can be pointed as a key indicator in evolution of species in ganglia of Aplysia and Helix Pomatia. 10 Hz oscillations were only scarcely recorded. The 10 Hz activity showed increasing amplitudes in low vertebrates and in the cat brain in comparison to invertebrates. In the human brain the alpha activity indicates high level wavelet entropy. Earlier studies of T.H. Bullock have

also showed that the alpha coherency in invertebrate ganglia is totally absent and reaches higher values from low vertebrates to the human brain.

According to the mentioned empirically grounded results, we tentatively propose that the changes in coherence, amplitude and entropy of alpha oscillations are key indicators for the development of mental activity during evolution of species. Is the superiority of the human brain manifested by intuition and creativity correlated with low entropy alpha activity in comparison to lower species? Is the second law of thermodynamics loses its validity in developing intelligent systems by evolution of intuitions. Although this question stays yet partially answered, it is clear that the evolution of alpha activity is a prominent candidate as “sign of intuitive behavior in human beings.

19 uncu asrın ikinci yarısında  nl  İngiliz bilim adamı Charles Darwin (4), evrimle ilgili teorisini geliştirmişti. Yakınlarda değişik y nleri ile kanıtlanan bu kuramın iki önemli temel taşını şu şekilde izah edebiliriz.

- 1) Evrim sırasında canlı varlıklar gelişirlerken kendilerinden evvel ortaya çıkan canlı varlıklardan önemli izler alırlar.
- 2) Gelişme sırasında canlı varlıklar yaşamlarının devam ettirebilmek için yeni gelişmelerde bulunurlar. Buna doğal seçilim (natural selectivity) denmektedir. Gene Charles Darwin’in (4) kuramına göre en ilkel canlı varlıklar olan omurgasızlardan insana kadar meydan gelen evrimde bu varlıklar gittikçe ustalaşmakta, yeteneklerini arttırmakta ve nihayet insanda en çok gelişmiş özellikleri göstermektedir.

Evrım sırasında beynin EEG salınımları sistematik olarak çok az laboratuarda incelenmiştir. Hatta şunu söyleyebiliriz Aplysia veya Helix Pomatia’dan başlayarak insan beynine kadar yapılan araştırmalar hemen hemen sadece Erol Başar ve arkadaşları ve Theodore Bullock tarafından ortak yürütülen tek analizlerdir. Bu makalede bundan evvel yayınlanmış bulgular ve  nl  Fransız düşünürü Henri Bergson’nun fikirleri bir araya getirilerek bir senteze varılmaya çalışılacaktır.

Henri Bergson 20’inci yüzyılın başlarında bellek, düşünce şekilleri ve evrim üzerine önemli görüşleri olan Fransız düşünürü, 20’inci yüzyılın ikinci yarısında bir unutulma evresine girdi. Ancak, Deleuze’in kitapları sayesinde ve son zamanlarda beyin ve kuantum teorisi üzerine yeni yaklaşımların olması yeniden Henri Bergson’nun kuramlarını inceleme ihtiya ını doğurmaktadır. Güncel beyin araştırmalarında elektrofizyolojik

yöntemlerle ve psikolojik testler ile bellek mekanizmaları, dikkat, algılama ve öğrenme konusunda ölçümler yapılabilmektedir. Hatta insanların duyguları üzerine dahi ölçümler artmaktadır. Ancak insanlardaki “sezgi” yeteneğine hiçbir yaklaşım bulunmamaktadır. Bu makalede Henri Bergson, Charles Darwin’in teorileri ve laboratuvarlarımızdaki verilerden yayınladığımız bilgileri bir araya getirerek beynin alfa aktivitesinin sezginin gelişmesinde oynamış olabileceği rolü anlamaya çalışacağız.

Henri Bergson, Charles Darwin’in evrim kuramını inceledikten sonra, evrim sırasında üç tip zihinsel yeteneğin mevcut olduğunu savundu: İçgüdü, zeka ve sezgi (1). Bergson, çok gelişmiş omurgalılarda otomatik davranış ile istemli davranış arasında çok kesin bir fark olduğunu söylemiştir. Otomatik işlerde omurilik, istemli işlemlerde ise beyin devreye girmektedir. Bütün az gelişmiş omurgalılarda, içgüdü vardır, bunların bazıları çok düzenli ve basittir. Daha karmaşık canlı varlığa yönelik davranış örüntüler de sergilenmektedir. Gene bir çok hayvanda insaninkine benzer bir zeka da gözlenmektedir. Diğer kelimeler ile otomatik olarak işlemini sürdüren içgüdü’nün dışında gelişmiş olan canlı varlıklarda da önemli zekaya da rastlanmaktadır. Ancak insanda bir üçüncü zihinsel işlev daha vardır: Buna “sezgi” diyoruz. Bergson’nun görüşüne göre insanı diğer canlı varlıklardan ayıran en önemli yetenek bu üçüncü tip bilişsel mekanizma yani sezgidir.

“Sezgi” nedir? Sezgi bir insanın herhangi bir problemi çözmekte veya olayı anlamakta tüm olarak bir takım yöntemler zinciri kullanmadan anında ve direkt olarak gösterdiği yetenektir. Genellikle bir olaya çözüm bulunduğu zaman bu çözüm sırasında yapılan işlevin farkında bile olmamaktayız. Sadece Henri Bergson değil René Descartes ve John Locke’da insanı diğer canlılardan ayıran yeteneğin sezgi olduğunu belirtmişlerdir. Aşağıdaki şekilde Rönesans’tan sonra ortaya çıkan filozofların görüşleri şematik olarak gösterilmektedir (Şekil 1).

| Renee<br>Descartes   | Blaise Pascal       | John Locke           | Bergson          |
|----------------------|---------------------|----------------------|------------------|
| <u>Düşünüyorum</u>   | <u>Matematiksel</u> | <u>Düşünüyorum</u>   | <u>Sezgisel</u>  |
| <u>öyleyse varım</u> | <u>zihin</u>        | <u>öyleyse varım</u> | <u>Zihin</u>     |
| <u>Matematiksel</u>  | <u>Sezgisel</u>     | <u>Süphecilik</u>    | <u>Substans,</u> |

| <u>zihin</u>      | <u>Zihin</u>           | <u>kompleks</u>  |
|-------------------|------------------------|------------------|
|                   |                        | <u>fikirler</u>  |
| <u>Süphecilik</u> | <u>İçgüdü, filetik</u> | <u>İçgüdü,</u>   |
|                   | <u>bellek</u>          | <u>filetik</u>   |
|                   |                        | <u>bellek</u>    |
|                   | <u>Substans,</u>       | <u>Hükümler</u>  |
|                   | <u>kompleks</u>        | <u>bilgiden</u>  |
|                   | <u>fikirler</u>        | <u>farklıdır</u> |
|                   | <u>Hükümler</u>        |                  |
|                   | <u>bilgiden</u>        |                  |
|                   | <u>farklıdır</u>       |                  |

#### Şekil 1: Rönesans’tan sonra ortaya çıkan filozofların görüşleri

Bu incelemeyi yapmak için sistem teorisi yöntemlerine dayanarak üç olayı inceleyeceğiz.

- 1) Entropi
- 2) Koherans
- 3) Salınımların farklılıkları

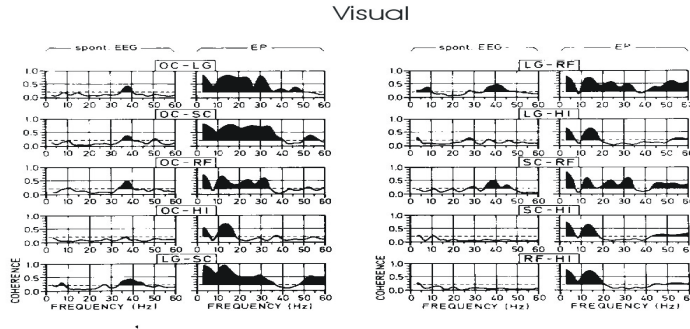
“Entropi” ve “Koherans” birbirleri ile ilintilidirler. Beyin dokusunda nöronlar ve nöron popülasyonlarının elektriksel aktivitesi yüksek Koherans değerleri gösterirlerse o dokuda “ Senkroni” gözlemlenir. Buna göre bir nöral sistemin içinde senkroni düzenli davranışı işaret eder. Bu da düşük entropi demektir.

“Entropi” nedir ? Entropi, bir sistemin içerisindeki düzensizlik derecesidir. Beyinde koheransın tanımı T.H. Bullock tarafından aşağıdaki gibi yapılmıştır. Koherans beyin iki bölgesi arasında her frekans diliminde korelasyonunu gösterir. Bu da iki bölge arasında senkroni olup olmadığının en iyi tanımlayıcısıdır. Aşağıdaki tabloda (Tablo 1) T.H. Bullock (5) insan beyninin korteksinin iki bölgesi arasındaki alfa frekans diliminde koherans değerlerini göstermektedir. Görüldüğü üzere bu değerler 0.5 civarındadır ve oldukça yüksektir. Buna mukabil T.H. Bullock ve E. Başar (6) Aplysia’da elektrotlar bir

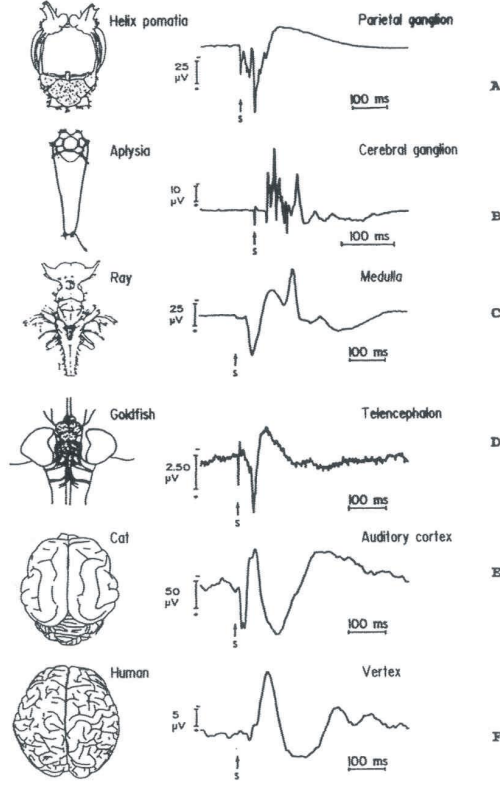
milimetreden daha az aralıkla yerleştirilmesine rağmen hiçbir frekans diliminde bir koherans izleyememişlerdir.  l t kleri balıklarda çok daha yüksek koherans değerleri bulunmuştur. Hatta kaplumbağa, kertenkele ve diğer memelilerde çok daha fazla koherans değerleri ölçülmüştür. Gene Başar ve ark. (7) tarafından yapılan ölçümlere göre kedi beyinde  ekil 2’de görüldüğü gibi alfa frekans diliminde çok yüksek koherans değerleri ölçülmüştür. Şekil 3’te gene Helix Pomatia ve Aplysia dan başlayarak evrimde iki değişik balık, kedi ve insan beyinin uyarılma potansiyelleri görülmektedir. Kedi ve insan beyinde alçak frekans dilimindeki cevaplar filtre işlemi uygulanmadan dahi gözlemlenmektedir.

| Filter band, Hz              | 2-5  | 5-8  | 8-13 | 13-20 | 20-35 | 35-50 |
|------------------------------|------|------|------|-------|-------|-------|
| Subdural C <sub>10mm</sub>   | 0.47 | 0.47 | 0.43 | 0.40  | 0.34  | 0.38  |
| Depth probe C <sub>0mm</sub> | 0.48 | 0.61 | 0.55 | 0.49  | 0.49  | 0.51  |

**Tablo 1: İnsan beyinin korteksinin iki bölgesi arasındaki alfa frekans diliminde koherans değerlerini gösteren tablo**



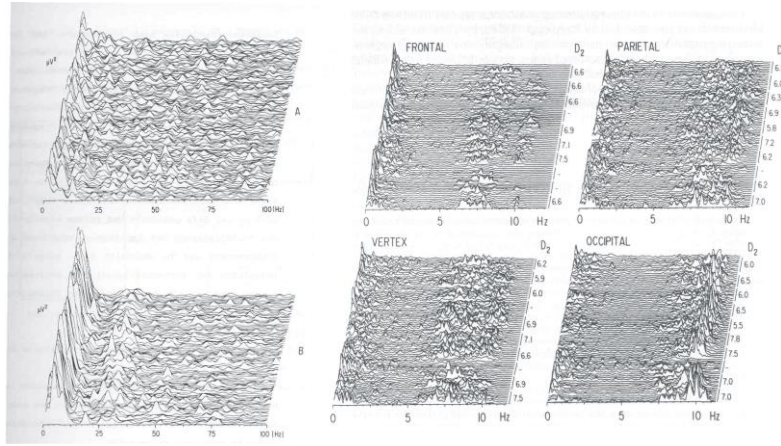
**Şekil 2: Kedi beyinde ölçülen koherans değerleri**



**Şekil 3: Helix Pomatia ve Aplysia dan başlayarak evrimde iki değişik balık, kedi ve insan beyinin uyarılma potansiyelleri görülmektedir**

Şekil 4'te ise yeniden dikkatimizi alfa frekans aktivitesine odaklıyoruz, şeklin sol tarafında Helix Pomatia'da spontane aktivitenin frekans spektrumu gösterilmektedir. Sağ tarafta da insanda saçlı deri üzerinden alınan g   spektrumları mevcuttur. Bu şekilde çok iyi izlendiği gibi insanda çok belirgin ve yüksek alfa aktivitesi bulunmasına karşın , Helix Pomatia'da önemli bir 10 Hz aktivitesine rastlanmamaktadır. Tablo 2'de ise değişik frekans dilimlerindeki frekans karakteristiklerinin maksimum değerleri işaretlenmiştir. Gene Helix ve Aplysia'da 10 Hz'de cevap kaydedilmemesine mukabil Vatoz balığında ve kırmızı

balık'ta alfa aktivitesi sıklığı artmaktadır. Kedide ve insanda ise alfa aktivitesi gözlemlenmektedir. Bu şekiller ve tablo değerleri incelendiğinde ortaya şöyle bir görüş çıkmaktadır: Omurgasızlarda ve aşağı omurgalılarda düzenli alfa aktivitesi kaydedilmemektedir. Bundan dolayı insan beynindeki düşük seviyeli alfa aktivitesinin entropisi önemli bir ayırt edici faktör olarak işaretlenebilir. Bu da ř  soruyu ortaya çıkarır: Acaba alfa aktivitesinin entropisin insanda düşük oluşu insanın sezgi gücünü m  aksettirir ?



Helix Pomatia Ganglionu

İnsan Beyni

**ş kil 4:Sol tarafta Helix Pomatia'da spontane aktivitenin frekans spektrumu, sağ tarafta insanda saçlı deri üzerinden alınan g c spektrumları gösterilmektedir.**

| Frequency band (Hz) | 1-8                                      | 8-15 | 15-30  | 30-48  | 52-100  |
|---------------------|------------------------------------------|------|--------|--------|---------|
| Species             | Maxima in frequency characteristics (Hz) |      |        |        |         |
| <b>Helix</b>        |                                          |      |        |        |         |
| Pleural r.          | 5                                        | —    | 20     | —      | —       |
| Parietal r.         | 2                                        | —    | 16     | 40     | 65      |
| Visceral            | 2                                        | —    | 15     | 35     | 60      |
| Parietal l.         | 2                                        |      | to     | 50     | —       |
| Pleural l.          | 2                                        | 9    | 18     | 40     | 75      |
| <b>Aplysia</b>      |                                          |      |        |        |         |
| Group I             | 2                                        | to   | 20     | 40     | 100     |
| Group II            | 3                                        | —    | 25     | —      | 60      |
| <b>Ray</b>          |                                          |      |        |        |         |
| Mesencephalon       | 5                                        | —    | 28     | —      | —       |
| Medulla             | —                                        | 9    | 16; 24 | 40     | —       |
| <b>Goldfish</b>     |                                          |      |        |        |         |
| Telencephalon       | 3                                        | 10   | —      | 35     | 90; 100 |
| Mesencephalon       | —                                        | —    | —      | 30     | 80; 100 |
| Medulla             | —                                        | —    | —      | —      | 80; 90  |
| <b>Cat</b>          |                                          |      |        |        |         |
| GEA                 | 5                                        | —    | 18     | 40     | 80      |
| RF                  | 5                                        | 11   | 25     | 40     | 85      |
| HI                  | 5                                        | 12   | —      | 45     | —       |
| <b>Human</b>        |                                          |      |        |        |         |
| C <sub>z</sub>      | 4                                        | 8    | 25     | 40     | —       |
| O                   | 3.5                                      | 10   | 25     | 45     | 75      |
| P                   | 6                                        | 10   | 20     | 40     | 70      |
| F                   | 4                                        | 8    | 20     | 35; 45 | —       |

**Tablo 2: Helix Pomatia, Aplysia, vatoz balığı, kırmızı balık ganglionlarında, kedi ve insan beyinde değişik frekans dilimlerindeki frekans karakteristiklerinin maksimum değerleri işaretlenmiştir**

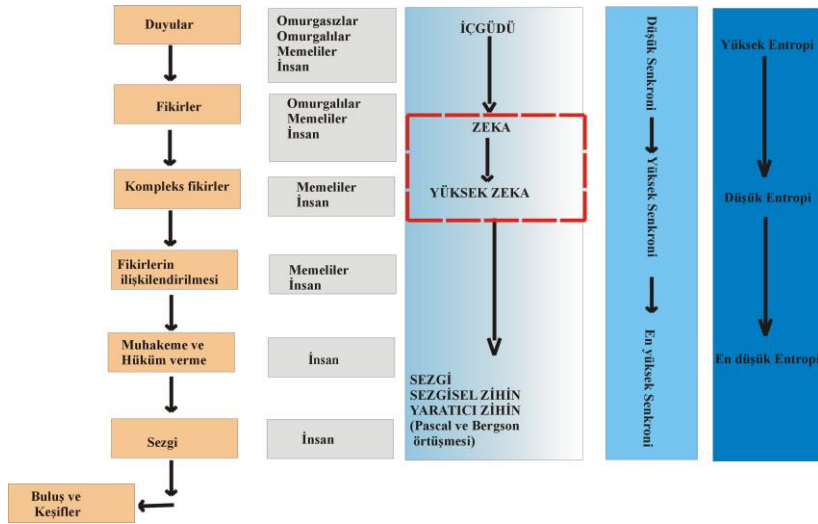
### SONUÇ:

T.H. Bullock ile ortak bilgilerimizi değerlendirdiğimiz zaman alfa aktivitesinde üç önemli değişikliği ortaya çıkarıyoruz.

- 1) Alfa aktivitesin genliği ve bol miktarda ortaya çıkması beyin evrim sürecinde gelişirken artmaktadır.
- 2) Evrim sırasında değişik canlı varlıkların beyinlerde koherans değerleri artmaktadır.
- 3) Alfa aktivitesinin entropisi evrim sürecinde düşmektedir.

Bu analizlerdeki sonuçlar bizi hangi noktaya getiriyor? Eğer sezgi ancak insanlarda görülen bir zihinsel işlev ise acaba alfa aktivitesinin düzenli olarak ortaya çıkması ile sezginin uyumlu olduğu tartışılabilir mi? Sezgi sadece insanlarda var, bu denli düzenli alfa aktivitesi de ancak insanlarda görülüyor.

Şekil 5'in en sağ tarafındaki bölümde evrim sırasında entropi değerleri gösterilmektedir, bu şemaya göre alfa aktivitesinin entropisinin düşmesi ile birçok zihinsel mekanizmaların arttığı iyi bir şekilde sergilenmektedir.



Şekil 5: Evrim süresince, farklı türlerde duyu ve düşünce yapıları ve bu türlerin beyinlerinde açığa çıkan senkroni ve entropi değerlerinin şematik gösterimi

### Kaynakça:

- 1) Evolution Créatrice, 1907 Bergson, H., 1907. L'évolution Créatrice. Presse Universitaires de France, Paris

- 2) Bullock, T.H., Başar, E., 1988. Comparison of ongoing compound field potentials in the brains of invertebrates and vertebrates. Brain Res. Rev. 13,57–75.
- 3)Başar, E., Schütt, A., Bullock, T.H., 1999. Dynamics of potentials from the brain of amniotes (vertebrates). In: Başar, E. (Ed.), Brain Function and Oscillations: II. Integrative Brain Function. Neurophysiology and Cognitive Processes. Springer-Verlag, Heidelberg, pp. 109–116.
- 4) Darwin, C.The Origin of Species by Means of Natural Selection, or the Preservation of Favoured Races in the Struggle for Life. 1859
- 5)T.H. Bullock, McClune, M., Achimowicz, J., Iragui-Madoz, V.J., Duckrow, R.B. EEG Coherence has sturcture in the millimeter domain. Electroencephalogr Clin Neurophysiol 95: 161-177
- 6 ) Bullock TH, Başar E. Comparison of ongoing compound field potentials in the brain of invertebrates and vertebrates. Brain Research Reviews 13:57-75 (1988)
- 7) Başar E, Durusan R, Gönder A, Ungan P. Combined dynamics of EEG and evoked potentials I. Studies of simultaneously recorded EEG-EPograms in the auditory pathway, reticular formation and hippocampus of the cat brain during the waking stage. Biological Cybernetics 24:1-19 (1979)

## YAZARLARIN ÖZGEÇMİŞİ

### Erol BAŞAR

1938 yılında İstanbul’da doğdu. 1959- 1964 Münih ve Hamburg Üniversitelerinde Fizik tahsilini tamamladı, 1965 yılında master çalışmasını “Elementar parçacıkların yüksek enerji metotları ile analizi” üzerine yaptı. 1965-1968 yıllarında Hannover ve Hamburg Üniversiteleri müşterek programı ile Fizyoloji ve Biyofizik alanında doktora çalışmasını tamamladı. 1968-1970 A.B.D. New York Department of Mental Health bursu ile Research Center, Rockland State Hospital’ da doktora sonrası çalışmasını Beyin Araştırmaları konusunda gerçekleştirdi. 1971 Hacettepe Üniversitesi Tıp Fakültesinde Biyofizik Enstitüsü kurucu müdürü olarak göreve başladı. 1970 yılında TÜBİTAK Teşvik Ödülü’nü kazandı. 1973 yılında Doçentlik unvanı, aynı yıl TÜBİTAK Cumhuriyetin 50. Yıldönümü Bilim Ödülü’nü

kazandı. 1980 yılında Profesör unvanını kazandı. 1980-2000 yılları arasında Lübeck (Almanya) Tıp Üniversitesi Fizyoloji Enstitüsü Profesörü ve Nörofizyoloji  alışma Grubu Başkanı görevlerini üstlendi. 1993- 2002 yılları arasında TÜBİTAK Beyin Dinamiği Araştırma  nitesi Başkanı ve Beyin Dinamiği Multidisipliner  alışma Grubu Başkanı olarak görev aldı. 2000-2005 yılları arasında Dokuz Eylül Üniversitesi Beyin Dinamiği Multidisipliner Araştırma ve Uygulama Merkezi Müdürü ve Dokuz Eylül Üniversitesi , Tıp Fakültesi Biyofizik A.B.D. Başkanı görevlerini üstlendi. Ağustos 2006'da İstanbul Kültür  niversitesi'nde göreve başladı. 1964-2006 yılları arasında kendisinin  nc  olduğu çalışma konusu olan Beyin Salınımları (Brain Oscillations) konusunda toplam 195 uluslararası makale ve 15 uluslararası kitap yazdı, 7 Uluslararası konferans düzenledi. "International Organization of Psychophysiology" organizasyonunun yardımcı başkanı olarak 2003'de başladığı görevine halen devam etmektedir.

## **Bahar GÜNTEKİN**

1977yılında İzmir'de doğdu. 1995 yılında İzmir  zel Fatih Fen Lisesi'nden mezun oldu. 1995 yılında Dokuz Eylül Üniversitesi Fizik Tedavi ve Rehabilitasyon Yüksekokulu'na kaydolarak, 1999 yılında mezun oldu. Aynı yıl Dokuz Eylül Üniversitesi Sağlık Bilimleri Enstitüsü Ortopedik Rehabilitasyon dalında başladığı Yüksek Lisans öğrenimini 2002'de tamamladı. Ayrıca 1999 yılında Fizik Tedavi ve Rehabilitasyon Yüksekokulu'nda Araştırma Görevlisi olarak göreve başlamış ve 2002'de ayrılmıştır. 2003 yılında başladığı Dokuz Eylül Üniversitesi Sağlık Bilimleri Enstitüsü Biyofizik A.D. doktora programını 2006 yılında tamamlamış, 1 Nisan 2005-18 Ağustos 2006 tarihleri arasında TÜBİTAK Yurt İçi-Yurt Dışı bütünleştirilmiş doktora bursunu kazanmış ve Dokuz Eylül Üniversitesi Biyofizik A.D'da bu burs ile görev almıştır. 2006 yılının Ağustos ayında İstanbul Kültür Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi'ne  ğretim görevlisi olarak atanmıştır. Çalışma alanı beynin dinamik yapısını beyin salınımları yöntemleri ile araştırmaktır.



# MAXWELL – BOLTZMANN EŞİTLİĞİNİN ÖNGÖRÜ GÜCÜ

E. Rennan Pekünlü

EGE Üniversitesi, Astronomi ve Uzay Bilimleri Bölümü, Bornova, 35100 İZMİR, Tel:  
0232 3884000/1737, Fax: 2323881036, eposta: [rennan.pekunlu@ege.edu.tr](mailto:rennan.pekunlu@ege.edu.tr)

## ÖZET

Bu çalışmada Maxwell – Boltzmann eşitliğinin (MBE) öngörü gücü araştırılmıştır. Altı boyutlu *evre uzaydaki* plazma parçacıklarının *olası* yoğunluğu olarak tanımlanabilecek olan hız dağılım işlevinin evrimini betimleyen MBE momentleri, Güneştaçında yayılan Alfven dalgalarının kırınımına uğrayacağını, söneceğini, diğer bir deyişle erkelerini ortamdaki iyonlara aktaracağını öngörmüş ve bu öngörünün gözlemlerle tutarlı olduğu gösterilmiştir.

**Anahtar sözcükler:** Maxwell-Boltzmann eşitliği, evre uzay, olası yoğunluk, güneştaçı deliği

## 1. GİRİŞ

Plazma parçacıklarının  $R^3$  de, kartezyen konsayılardaki konumu  $(x, y, z)$  sıralı üçlüsüyle verilir. Bu konum, genellikle başlangıç noktasından  $(x, y, z)$  noktasına çizilen  $\mathbf{r}$  konum vektörüyle belirlenir.  $\mathbf{r}$  konum vektörünün uç noktasındaki küçük oylum  $d\mathbf{r} = dx dy dz$  ile gösterilir. Bir plazma parçacığının kütle özeğinin doğrusal hızı,  $\mathbf{u} = u_x \hat{\mathbf{x}} + u_y \hat{\mathbf{y}} + u_z \hat{\mathbf{z}}$

ile verilir.  $(x, y, z)$  sıralı üçlülerıyla tanımlanmış *konum uzayına* benzer biçimde,  $(u_x, u_y, u_z)$  konsayılarıyla *hız uzayı* tanımlanır.  $\mathbf{u}$  hız vektörü, konsayıları  $(u_x, u_y, u_z)$  olan ve başlangıç noktasından çizilen konum vektörü olarak düşünülebilir. Hız uzayında,  $\mathbf{u}$  vektörünün uç noktasındaki küçük birim oylum  $d\mathbf{u} = du_x du_y du_z$  dir.  $x, y, z, u_x, u_y, u_z$  konsayıları *evre uzayı* belirler. Belli bir anda, bir plazma parçacığının  $\mathbf{r}$  konumu ve  $\mathbf{u}$  hızı, birlikte, evre uzayın bir tek noktasınca belirlenir.

Hız uzayındaki  $d\mathbf{u}$  birim oylumu içindeki hız noktalarının zaman ortalaması, konum uzayındaki  $d\mathbf{r}$  birim oylumuyla da orantılıdır. Hız noktaları sayısı  $f(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t)$   $d\mathbf{r} d\mathbf{u}$  olarak gösterilebilir. Burada  $f(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t)$  hız dağılım işlevidir.  $d\mathbf{r} d\mathbf{u}$  birim oylumu içindeki temsilci noktaların  $dt$  zaman aralığındaki ortalama sayısı oylumun şeklinden bağımsız ancak boyutlarıyla doğru orantılıdır. Bu nedenle bu sayı  $f(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t)$   $d\mathbf{r} d\mathbf{u}$  olarak gösterilebilir. Hız dağılım işlevi  $f(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t)$  altı boyutlu *evre uzaydaki* temsilci noktaların *olası* yoğunluğudur.

MBE,  $f(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t)$  *olası* yoğunluğun evrimini betimler:

$$\frac{\partial}{\partial t} f(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t) + (\mathbf{u} \cdot \nabla_r) f(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t) + \left( \frac{\mathbf{F}}{m} \cdot \nabla_u \right) f(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t) = \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{çarp}} \quad (1)$$

(1) numaralı bağıntıda  $\nabla_r$  ve  $\nabla_u$  sırasıyla konum ve hız uzayına göre türevleri simgeler;  $\mathbf{F}$ , plazma parçacıkları üzerine etkiyen iç ve dış kuvvetler toplamıdır. Eşitliğin sağ tarafındaki terim, ikili *çarpışmalarla* *olası* yoğunluğun zamanla nasıl değiştiğini anlatır. MBE herhangi bir hız işlevi olan  $g(\mathbf{u})$  ile çarpılıp tüm hız uzayı üzerinden integrali alındığında “hız momenti” elde edilir:

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} g(\mathbf{u}) \frac{\partial}{\partial t} f(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t) d\mathbf{u} + \int_{-\infty}^{+\infty} g(\mathbf{u}) (\mathbf{u} \cdot \nabla_r) f(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t) d\mathbf{u} + \int_{-\infty}^{+\infty} g(\mathbf{u}) \left( \frac{\mathbf{F}}{m} \cdot \nabla_u \right) f(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t) d\mathbf{u} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(\mathbf{u}) \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{çarp}} d\mathbf{u} \end{aligned} \quad (2)$$

$g(\mathbf{u}) = m u^0 = m$  ;  $g(\mathbf{u}) = m u^1 = m u$  ;  $g(\mathbf{u}) = m u^2$  ;  $g(\mathbf{u}) = m u^3$  ...biçiminde alınarak sınırsız sayıda “taşınım eşitlikleri” elde edilir. Bu eşitlikler “kapalı” bir eşitlikler dizgesi oluşturamaz. Diğer bir deyişle, eşitliklerdeki bilinmeyen sayısı eşitlik sayısından daima bir fazladır. En yüksek dereceden “taşınım eşitliğinde” bir varsayımla eşitlikler dizgesi “kapalı” duruma getirilir ve çözüme geçilir [1].

## 2. MBEden Türetilen Taşınım Eşitlikleri

Yukarıda anlatılan yöntemle elde edilen eşitliklere “Taşınım eşitlikleri”, “Korunum eşitlikleri”, “Süreklilik eşitlikleri” de denir. Pekünlü ve arkadaşları, momentumun korunumu eşitliği, manyetik indüksiyon eşitliği ve evrende manyetik monopol olmadığını betimleyen Maxwell eşitliklerinden birini kullanarak, viskoz ve Lorentz kuvvetlerinin etkisiyle yayılan Alfven dalgalarının yayılma, kırınım ve sönme etkilerini inceledi [2].

Momentumun korunumu (3) numaralı eşitlikle betimlenir:

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} / \mu + \rho \nu \nabla^2 \mathbf{v} \quad (3)$$

burada  $\mu$  manyetik permeability;  $\nu$  kinematik viskozite katsayısı,  $\mathbf{B}$  manyetik indüksiyondur;  $\rho \nu = 2.21 \times 10^{-15} T^{5/2}(r) / \ln \Lambda \text{ g cm}^{-1} \text{ s}^{-1}$  [3]; ve konvektif türev,  $D/Dt \equiv \partial/\partial t + \mathbf{v} \cdot \nabla$  olarak verilir. Manyetik indüksiyon eşitliği manyetik alanın uzay ve zaman değişimini betimler:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \eta \nabla^2 \mathbf{B} \quad (4)$$

burada  $\eta = 5.2 \times 10^{11} T^{-3/2}(r) \ln \Lambda \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$  manyetik sızma katsayısı;  $\ln \Lambda = 22.0$  Coulomb logaritmasıdır. Son olarak, Maxwell eşitliği,

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (5)$$

manyetik akının korunduğunu betimler.

(3), (4) ve (5) eşitliklerinin doğrusallaştırılmış biçimleri aşağıdaki (6) ve (7) eşitlikleriyle verilir:

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} = \frac{1}{\mu} (\mathbf{B}_0 \cdot \nabla) \mathbf{B}_1 + \nu \nabla^2 \mathbf{v}_1 \quad (6)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t} = (\mathbf{B}_0 \cdot \nabla) \mathbf{v}_1 + \eta \nabla^2 \mathbf{B}_1 \quad (7)$$

(6) ve (7) eşitliklerinde “1” alt indisyle verilen tedirginlik niceliklerinin uzay ve zaman değişiminin düzlem dalga özelliği gösterdiğini ve dalganın evre çarpanının  $\exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)]$  biçiminde olduğunu varsayalım; burada  $t$ ,  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{k} = 2\pi/\lambda$  ve  $\omega = 2\pi/P$  sırasıyla zaman, kaynaktan olan uzaklık, dalga vektörü ve frekansı simgeler;  $\lambda$  ve  $P$  de dalgaboyu ve dalganın dönemidir. Bu durumda diferansiyel eşitlikler bir tek cebirsel eşitliğe indirgenir:

$$\nu \eta k^4 + [v_A^2 - i\omega(\nu + \eta)] k^2 - \omega^2 = 0 \quad (8)$$

burada  $v_A = B / \sqrt{\mu \rho_0}$  Alfven hızıdır.

### 3. Güneştacı Deliğinin Manyetik alan ve Plazma Özellikleri.

(8) numaralı eşitlik, Güneştacı plazması içinde yayılan Alfven dalgalarının *olası* davranışını betimler. Adı geçen plazma ortamının gözlemlerden türetilmiş olan özelliklerini şöyle sıralayabiliriz. Güneştacı deliğinde manyetik alanın Güneş’ten olan uzaklıkla değişimi [4], [5]

$$B = 1.5(f_{\max} - 1)R^{-3.5} + 1.5R^{-2} G \quad (9)$$

Bağıntıda  $f_{\max} = 9$  alınır.

Hollweg [4] , Feldman ve ark. [6] elektron sayı yoğunluğunu,

$$N_e = \frac{3.2 \times 10^8}{R^{1.56}} + \frac{2.5 \times 10^6}{R^{3.76}} + \frac{1.4 \times 10^5}{R^2} \text{cm}^{-3} \quad (10)$$

olarak belirlediğini bildiriyor. Burada,  $R = r / R_\odot$  Güneş çapı cinsinden uzaklıktır.  $N_e(r)$  Kuzey Güneştacı deliğindeki kütle yoğunluğunu belirler:  $\rho_0(r) = \bar{\mu} m_p N_e(r)$ ; burada  $\bar{\mu} \approx 0.6$  ortalama atom ağırlığı;  $m_p$  proton kütesidir. Basınç ölçek yüksekliği,  $\Lambda_p(r) = 5.0 \times 10^3 T(r) (r / R_\odot)^2 \text{cm}$  [7].

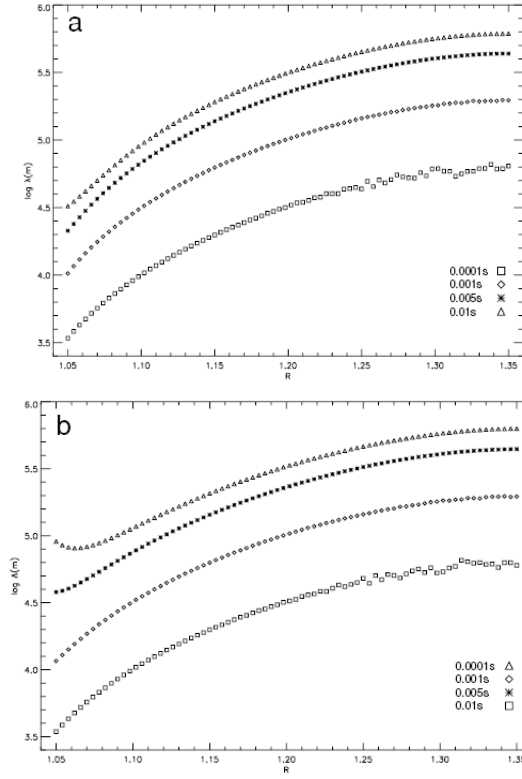
SOHO uydusundaki CDS ve SUMER algaçları Kuzey Güneştacı Deliği bölgesindeki sıcaklık kesitini çıkarmıştır. David ve ark. [8] bu kesitin çizgesini vermişlerdir. Kesitin analitik betimlemesini grafik okumayla aşağıdaki gibi elde ettik:

$$T = -2 \times 10^7 R^2 + 5 \times 10^7 R - 3 \times 10^7 K \quad (11)$$

Banerjee ve ark. [9] Kuzey Güneştacı Deliğinde gözlenen Si VIII çizgisinin genişliğine ısısal olmayan süreçlerden yapılan katkıyı hız birimlerinde vermiştir:

$$v_{ex} = -1522.3R^4 + 8638.2R^3 - 18191R^2 + 16882R - 5786.5 \text{ kms}^{-1} \quad (12)$$

Yukarıdaki (8) numaralı eşitliğin çözümü, Güneştacı Deliğinde yayılan Alfven dalgalarının dalgaboyu, dalga genliği sönme ölçek uzunluğu, dalgaların erke akı yoğunluğu ve grup hızının  $R$  uzaklığıyla değişimini verir. Şekil 1a dalgaboyunun Şekil 1b de sönme ölçek uzunluğunun  $R$  ile değişimini gösteriyor.



Şekil 1. (a) Alfven dalgalarının dalgaboyunun  $R (=r / R_{\odot})$  ile değişimi. (b) Dalgaların sönme ölçek uzunluğunun ( $\Lambda = 2\pi/k_i$ )  $R$  ile değişimi.  $k_i$  dalga vektörünün sanal kısmının tersidir (Pekünlü ve ark. 2002)

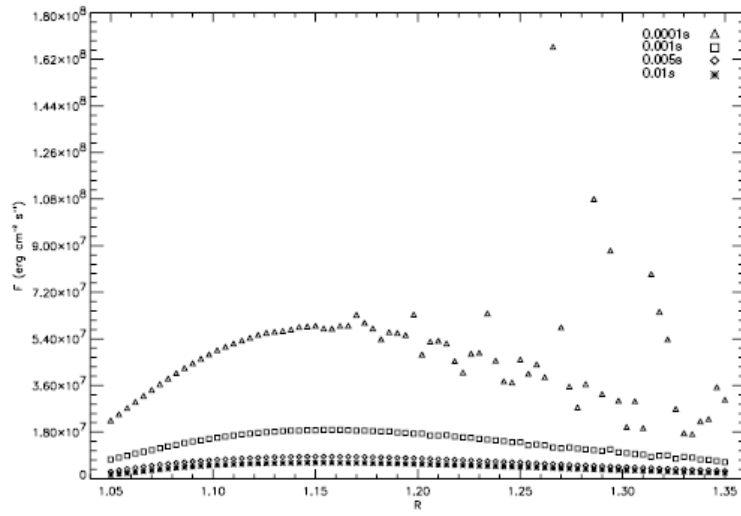
Şekil 1 (a) Güneştacında ilerleyen Alfven dalgalarının dalgaboyunun uzaklıkla arttığını gösteriyor. Bunun anlamı, bu dalgalar için ortamın kırılma indisi ( $n = ck / \omega$ ) giderek sıfıra yaklaşıyor. Diğer bir deyişle, Alfven dalgaları yansıma eğilimi gösteriyor. Bu beklenen bir sonuçtur. Manyetik alan kuvvet çizgileri boyunca giderek azalan yoğunluk bölgesine doğru yayılan dalgalar sonunda “plazma kesikliliği” adı verilen yansıma noktasına ulaşır. Kuzey Güneştacı Deliğinde parçacık sayı yoğunluğunun manyetik alan dik yönde eşdağılımsızlık gösterdiği biliniyor [10], [11]. Bu gerçeğe dayanarak Hollweg [4] Alfven dalgalarının kırınıma uğrayarak dalga vektörünün manyetik alana dik bileşeninin ( $k_{\perp}$ ) artacağını savunuyor. Diğer yandan, Şekil 1b den de anlaşılacağı gibi, Alfven dalgaları Güneş’ten dışarıya doğru yayıldıkça sönmeye uğrayacak. Ancak, sönme ölçek uzunluğu  $R$

ile arttığından viskoz kuvvetlerin Alfven dalgalarını zayıf bir biçimde etkilediği söylenebilir.

Yüksek frekansa sahip Alfven dalgaları mekanik erkelerini plazma ortamındaki iyonlara daha çabuk bir biçimde aktarır. Alfven dalgalarının mekanik erkesi,

$$F = \rho v_{ex} \partial \omega / \partial k \quad (13)$$

Bağıntısıyla verilir.  $\partial \omega / \partial k$  dalgaların grup hızıdır ve (8) numaralı eşitlikten türetilir. Şekil 2, Alfven dalgalarının mekanik erkесinin  $R$  uzaklığıyla değişimini gösteriyor.  $R = 1.15$  yakınlarındaki “plato” oluşumu dalgaların mekanik erkесinde bir düşüş olacağını öngörüyor.



Şekil 2. Değişik frekanstaki Alfven dalgalarının erke akı yoğunluğunun  $R$  ile değişimi ( Pekünlü ve ark., 2002)

O'Shea, Banerjee & Doyle [12] Mg X çizgi genişliklerinin Kuzey Güneştacı Deliğinde  $\sim 1150''$  uzaklıklara dek arttığını ve sonra sürekli düştüğünü gözlemişlerdir. Alfven dalgalarının erke akısının çizgi genişliğiyle orantılı olduğu biliniyor [13]. Bu sonuç üzerine yazarlar şu soruyu yöneltiyorlar: “ $\sim 1150''$  uzaklığının ötesinde çizgi genişliklerindeki azalmanın nedeni dalgaların genliğindeki sönme olabilir mi?”. O'Shea, Banerjee & Doyle

[12] çalışmalarının sonuç kısmında şu saptamayı yapıyorlar: “~1150” uzaklığının ötesinde çizgi genişliklerindeki azalmanın nedeni olarak, dışarıya doğru yayılan MHD dalgalarının sönmesini öneriyoruz. Pekünlü ve ark. [2] sıkıştırılmaz MHD bağlamında Alfven dalgalarının yayılmasını incelediler. Manyetik akı tüpleri boyunca yayılan Alfven dalgalarının viskoz saçılma ve elektriksel dirençlilik nedeniyle kınırıma uğrayacağını ve sönmeceğini gösterdiler. Bu yazarların erke akı yoğunluğu çizgesi (Şekil 4 – bu çalışmada Şekil 2 - ERP)  $R = 1.15$  e dek artma gösteriyor, o noktada bir maksimuma ulaşıyor ve çıkış kolundan daha az bir eğimle azalıyor. Kısacası, bu kuramsal çalışma bizim dışarı doğru yayılan dalgaların sönmeceğine ilişkin gözlemsel kanıtlarımızı doğruluyor”.

#### 4. Sonuç.

Altı boyutlu evre uzaydaki plazma parçacıklarının **olası** yoğunluğu olarak tanımlanan  $f(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t)$  hız dağılım işlevinin plazma içinde ve dışındaki kuvvetlerin etkisi altında nasıl evrim geçirdiğini betimleyen MBE yüksek öngörü gücüne sahiptir. Üzerinde çalışılan plazma ortamının gözlemlerden türetilen fiziksel özellikleri temelinde yapılan varsayımlarla elde edilen *dağılma bağıntısı* (dispersion relation) dalgaların yayılma özelliklerini açıklayabildiği gibi yeni süreçleri de öngörebilir. Günümüzde, gelişkin uydulardaki algaçlar parçacıkların hız uzayındaki **olası** dağılımlarını saptayabilecek denli duyarlıdır. Örneğin SOHO uydusundaki CDS, SUMER, UVCS gibi algaçlar Güneş Kuzeytacı Deliğindeki iyonların manyetik alana dik ve koşut yöndeki hız dağılımlarını saptayabilmiştir. En **olası** hız dağılımını dikkate alarak gerek “Korunum eşitlikleri”yle gerekse çarpışmasız MBE olan Vlasov eşitliğiyle fiziksel süreçleri açıklama ve yenilerini öngörme gücü artmıştır. Bu bağlamda şu sonuca varabiliriz: Güneştacı deliğindeki plazmayı ısıtan ve güneş rüzgarına ivme kazandıran süreç **büyük bir olasılıkla** dalga-parçacık etkileşimidir. Bu etkileşim içinde en özgün olanı iyon-cyclotron rezonans sürecidir.

**Kaynakça:**

- [1] Seshadri, S.R., 1973, “*Fundamentals of Plasma Physics*”, s. 27, NY, American Elsevier Pub. Co. Inc.
- [2] Pekünlü, E.R., Bozkurt, Z., Afşar, M., Soyduğan, E. & Soyduğan, F., (2002), “Alfven waves in the inner polar coronal hole”, *MNRAS*, 336, 1195 – 1200.
- [3] Spitzer, L, Jr., 1962, “*Physics of Fully Ionized Gases*”, s. 146, NY, Interscience Pub.
- [4] Hollweg, J.V., (1999a), “Kinetic Alfven wave revisited” , *J. Geophys. Res.*, 104, 14811.
- [5] Hollweg, J.V., (1999b), “Cyclotron resonance in coronal hole” , *J. Geophys. Res.*, 104, 24781.
- [6] Feldman, W.C. ve ark., (1997), “Experimental constraints on pulsed and steady state models of the solar wind near the Sun”, *J. Geophys. Res.*, 102, 26905.
- [7] Priest, E.R., (1994), “Magnetohydrodynamics”, s. 1-109, *Plasma Astrophysics*, A.O. Benz & T.J.-L. Courvoisier (eds), Berlin, Springer-Verlag.
- [8] David, C. ve ark., (1998), “Measurement of the electron temperature gradient in a solar coronal hole”, *A&A*, 336, L90.
- [9] Banerjee, D. ve ark., (1998), “Broadening of SI VIII lines observed in the solar polar coronal holes”, *A&A*, 339, 208.
- [10] Woo, R., (1996), “Kilometre-scale structures in the Sun's corona”, *Nature*, 379, 321
- [11] Woo, R. & Habbal, S.R., (1997), “Finest Filamentary Structures of the Corona in the Slow and Fast Solar Wind”, *ApJ*, 474, L139.
- [12] O’Shea, E., Banerjee, D. & Doyle, J.G., (2005), “On the widths and ratios of Mg X 609.79 and 624.94 Å lines in polar off-limb regions”, *A&A*, 436, L35.
- [13] Doyle, J.G., Teriaca, L., Banerjee, D., (1999), “Coronal hole diagnostics out to  $8R_{\text{sun}}$ ”, *A&A*, 349, 956.

## YAZARIN ÖZGEÇMİŞİ

### **Esar Rennan PEKÜNLÜ**

1950 yılında İzmir’de doğdu. Orta öğrenimini İzmir Atatürk Lisesi’nde tamamladı. 1967 yılında Ege Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik – Astronomi bölümüne kaydolarak 1971 yılında mezun oldu. Aynı yıl E.Ü. Fen Fakültesi Astronomi bölümünde başladığı Yüksek Lisans programını 1973 yılında tamamladı. 1973 yılının başında Milli Eğitim Bakanlığı’nın bursuyla İngiltere’nin Leicester Üniversitesi’nde doktora eğitimine başladı. 1978 yılında Leicester Üniversitesi’nde doktora çalışmasını tamamlayarak 1979 yılında 1416 sayılı yasa gereği E. Ü. Astronomi bölümünde göreve başladı. 1980 yılında 2547 sayılı YÖK yasası ile görevinden uzaklaştırıldı. Bölge İdare Mahkemesi bu karara ilişkin yürütmeyi durdurma kararı verdi. E.R. Pekünlü 1982 yılında Astronomi bölümündeki görevine iade edildi. Göreve başladıktan 15 gün sonra bu kez 1402 sayılı Sıkıyönetim kanunuyla tekrar uzaklaştırıldı. 1982-1990 yılları arasında E.R. Pekünlü 2 yıl işsiz dolaştıktan sonra İzmir’de kurulu olan Batı Dersaneleri’nde matematik öğretmenliği yaptı. 1990 yılında Danıştay’ın içtihadları birleştirme kararıyla E.Ü. Astronomi bölümündeki görevine geri döndü. 1991 yılında Yard. Doç., 1997 yılında Doç. ve 2003 yılında Prof. ünvanlarını aldı. Çalışma alanları radyo astronomi, plazma fiziği ve manyetik hidro dinamiktir (MHD)

## HUME'UN BİLGİ ÖĞRETİSİNDE OLASILIK

**Yrd. Doç. Dr. Ali Taşkın**

Cumhuriyet Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi  
Felsefe Bölümü, Tel. 0346 2191010 / 2194, Sivas  
e-mail: [ataşkın@cumhuriyet.edu.tr](mailto:ataşkın@cumhuriyet.edu.tr)

### ÖZET

David Hume (1711–1776) modern şüpheciliğin kurucusu bir filozof olarak bilinir. Hume'un bilgi kuramının en önemli bölümünü “Bilgi ve Olasılık Üzerine” bölüm oluşturur. Hume burada deneysel çıkarımlardan sağlanan ama “mutlak olmayan” bilgi üzerinde durmuştur. Gelecek hakkındaki bütün bilgimiz, geçmiş ve şu anda bulunan bilgimizden çıkarılır. Hume’a göre olasılıklı bilgi aritmetik, cebir ve mantık dışındaki bütün bilimleri kapsar. Böyle bir olası bilgi anlayışı Hume’u felsefi anlamda çok derin şüphelere götürmüştür. Benzerlik, karşıtlık, nitelik dereceleri, nicelik ve sayısal oranlar gibi ilişkiler, Hume’un ifadesiyle “düşünce ilişkileri”ne dayanan bilgiler kesindir. Cebir ve aritmetik bu gruba girer. Uzay-zaman ilişkileri ve nedensellik ilişkileri olası bilgi verirler.

## GİRİŞ

Bryan Magee, Hume'un hemen herkes tarafından İngiliz dilinde yazmış olan en büyük filozof olarak görüldüğünü öne sürer.[1] Hume'un bu ünü bilgi kuramı ile kazandığı söylenebilir de, çok yönlü bir düşün adamı olduğu göz ardı edilmemelidir. Bu özelliğini, ilk felsefi eserinin hiçbir tepki uyandırmaması üzerine, felsefi yazılar yerine, edebi, politik, ahlaki ve teolojik denemeler kaleme almış olması ile ortaya koymuştur. On dokuzuncu ve yirminci yüzyılda filozof yönü ön plana çıkınca, bu kez Hume'un diğer yönleri geri planda kalmıştır. Bu durumu, geçen yüzyılın önemli felsefecilerinden, Hume'un vatandaşı Norman K. Smith şöyle dile getirir: “Umarım, bir gün yeterli donanıma sahip birisi, Hume'un filozof olmasının yanında, siyaset kuramcısı, ekonomist, tarihçi ve edebiyatçı yönlerini de hesaba katarak inceler. Hume'un felsefesi ancak bu değişik bakış açıları ile ele alındığında bütün yönleriyle anlaşılmış olacaktır.”[2] Bir başka Hume uzmanı olan İngiliz Constance Maund da: “Hume'un felsefesi üzerine çalışma yapan, kitap yazan hemen herkes, öğretilerine gerekli önemin verilmiş olmasına, hakkında çok şey yazılmış olmasına rağmen, araştırılması gereken hala çok şey bulunduğunu bilir” der.[3] Hume, gerek Avrupa ve Amerika'da gerekse bu kültürlerinin uzantısı olan Avustralya ve Yeni Zelanda gibi ülkelerde hakkında en çok araştırma ve değerlendirme yapılan filozoflardan birisidir. Yazdığı eserler ve mektuplaşmalar başta olmak üzere, hakkında yazılan hemen çok sayıda dokümana sahip olunmasına karşın günümüzde de yoğun tartışmalara konu edilmesi Hume'un öğretilerinin etkisinin kendi çağının sınırlarını çok aştığını göstermektedir.

Varlık, bilgi, ahlak, hukuk, siyaset, din ve tarih felsefeleri gibi, Felsefenin birçok türünde söz sahibi olmasına karşın, Hume'un felsefesi içerisinde bilgi kuramının ayrı bir yeri vardır kuşkusuz. Bilgi kuramı içerisinde en çok tartışma yaratan görüşlerin A Treatise of Human Nature (İnsan Doğası Üzerine Bir İnceleme)[4] adlı eserinin “Bilgi ve Olasılık” başlığını taşıyan bölüm içerisinde yer aldığını özellikle vurgulamak gerekir. Hume'un olumlu-olumsuz eleştirilerin odağında yer almasında olasılık sorununun birinci derecede önemli bir felsefi sorun olduğu söylenebilir. Bu problemi Hume'un genel ampirik felsefesinden ayırmak, bunu bilmeksizin, onun büyük tartışma yaratan tümevarım ve nedensellik çözümlemelerini anlamak olanaksızdır. Bu durumda, önce olasılık konusunun arka planına, Hume'un felsefe ile hangi hedefi gerçekleştirmek için çaba harcadığına bakmak, sonra da olasılık öğretisinin ne olduğu, bu tartışmalar içerisinde nerede durduğu sorularına yanıt aramak gerekecektir.

## 1. HUME'UN AMACI NEYDİ?

Hume, birisi kolay diğeri zor olan iki ana felsefe türü üzerinde dururken, birincisini, erdemin kaynağı, iyi-kötü ayırımı, iyi olanı yapmak kötü olandan kaçınmak gibi pratik yaşamda karşılaşılan kimi güçlükleri sağduyu çerçevesinde çözümleyen, anlaşılabilir noktalarda fazla ileri gitmeden var olanla yetinmeyi ilke edinen felsefe olarak betimler. Bu tür felsefe ile uğraşan felsefeciler yüksek popülariteye sahip olup, geniş halk kesimleri tarafından da sevilirler. Ancak, zor olan felsefeyi seçip, akıl yürütmelerini sağduyunun ötesine kadar götüren, sürekli problemlerle uğraşan, felsefenin güç olan türünü seçen filozoflar geniş toplum kesimleri tarafından dışlanır ve unutulup giderler. Çünkü bu tür filozofların yaptıkları felsefe insanların kavrayışlarından uzak, onların refahını sağlamada bütünüyle gereksiz gözüken bir özelliğe sahiptir.[5] Oysa Hume, güç olduğu için insanlığın sürekli ötelemek zorunda olduğu, hiçbir zaman düşünmeden de durmadığı sorunları bıkmadan çözme denemesinde bulunmayı sağlayacağı için, zor olan felsefeyi önerir. Soyut ve zor olan felsefeyi kolay ve somut olan felsefenin hizmetine sunmak gerekir, der.

Zor felsefe söz konusu olduğunda, insan doğasının incelenmesi ilk sırada yer almalıdır. Hume *Treatise*'ı bu amaçla yazmıştır. İkinci ve önemli bir diğer felsefi eseri olan *Enquiry*'yi ise akıl sahibi bir varlık olan insanın anlama yetisinin (understanding) sınırlarının belirlenmesi amacıyla yazmıştır. Anılan eserlerin birincisinin *İnsan Doğası Üzerine Bir Deneme*, ikincisinin de *İnsanın Kavrama Gücü Üzerine Bir Soruşturma*, başlığı ile yayınlandığı göz önüne alınır, ilk eserin alt başlığı olan, “Deneysel akıl yürütme yöntemini moral konulara[6] uygulamaya bir girişim” ifadesi de bu başlıklara eklenirse, Hume'un amacı kolayca anlaşılır. Deneysel akıl yürütme yöntemi ile elde edilen bilgilerin sağın bilgi verdiği kabul edilirse, Hume'un moral konularda da uygulamaya koyma girişiminin soyut felsefe tartışmalarını bir kenara itmek, eğer olanaklı olursa, bu tartışmalara bir son vermek amacı güttüğü anlaşılır. Hume da işin zorluğunu bilerek, ama bu güçlüğü gerekçe göstererek sorumluktan kaçmamak gerektiği düşüncesiyle, kimi sıkıntılara katlanıp rahat etmenin yollarını bulmak gerektiğine inanır. Her filozofun yenilik peşinde olması gerektiği görüşünde olan Hume şunları söyler: “*Felsefenin ve bilimlerin dünyasında yeni herhangi bir şey bulduğunu ileri sürenler için, kendi sistemlerinin övgüye*

*değer olduğunu ima etmekten ve bunu yaparken de, diğerlerini kötüleyerek yapmaktan daha doğal ve olağan bir şey yoktur.”[7]*

## 2. TÜMEVARIM

Tümevarım Hume'un bilgi anlayışı içerisinde olasılıkla ilgisi olan başka bir tartışma konusudur. Olasılık konusuna geçmeden önce bu konuda da kısa bir bilgi vermek yararlı olacaktır.

Tümevarım, tekil olandan genel olana, burada ve şimdi gözlemlediğimden belirli bir türün bütün halleri için geçerli olan genel bir yasaya giden akıl yürütme yöntemi olarak tanımlanabilir.[8] Gerek günlük hayatta, gerekse bilimsel çıkarımlarda büyük bir önem taşıyan tümevarımın iki türü vardır. Birincisi, *bir cismin bütün objelerinin tek tek incelenip sonucun genel olan bir önermede toplanması demek olan tam tümevarım*, ki bu tartışma konusu yapılamaz. *Gözlemlenen az sayıda durumdan bütün durumlara yapılan sonuç çıkarma*, olarak dile getirilebilecek olan *eksik tümevarım* ise kimi sorunlar içerdiği gerekçesiyle genellikle tartışmalara konu edilmiştir. Gazali, Hume ve Kant gibi filozoflar bu tartışmada ilk akla gelen isimlerdir.[9]

Hume'un şüpheciliği ile ilgili tartışmalar söz konusu olduğunda ilk akla gelen konu tümevarım sorunudur. Çünkü birçok disiplinin vazgeçilmez bir akıl yürütme yöntemi olan tümevarım Hume'un açıklamalarıyla bir sarsıntı geçirmiştir. Hume, duyuların verdiği bilgilerin dışında kalanlar için “inançlar” oluşturduğumuzu söylemiş, deneyle gerekçelendirilemeyen bilgilerin olanaklı olmayacağını savunan deneyci bakış açısını uç noktaya götürmüştü. Üstelik çeşitli inançlar yardımıyla, “geleceğin de geçmiş gibi olacağı” sayılıtısının deneyde hiçbir temelini olmadığı savıyla Hume tarafından kabul görmediği de bilinmektedir. Gelecek hakkındaki inançları ya da beklentileri doğrulamak için geçmişteki deneyimleri kullanmak tümevarımsal bir akıl yürütme ile mümkün olmaktadır. Oysa Hume'a göre bir inanç sadece onu kanıtlayabilmemiz, doğrulayabilmemiz ya da onun için sebepler verebildiğimiz sürece akla uygun olmaktadır. Gelecek hakkında böyle bir şansımız

olmadığına göre, geleceği geçmişe bağlayan inanç akla uygun değildir. Mantıklı bir kişi tecrübe edilmemiş durumlar hakkında tam bir kuşkucu olacaktır.[10]

Hume'un tümevarımsal akıl yürütmeye yönelik bu olumsuz tavrına yoğun eleştiriler yöneltmiştir. Kimisi Hume'un bu tavrını "Hume'un akıl dışıcılığı" [11] olarak adlandırırken Russell gibi filozoflar daha sert değerlendirmelerde bulunmuşlardır. Russell: "Hume'a verilebilecek bir yanıt yoksa akıllılık ve delilik arasında zihinsel hiçbir ayrım bulunmamaktadır," der.[12] "Kendisinin pişirilmiş bir yumurta olduğuna inanan akıl hastası sadece bir azınlık olmasından ya da demokrasinin var olmadığını varsaymamızdan, hükümetin kendisiyle aynı görüşte olmamasından mahkûm edilmektedir." [13]

### 3. OLASILIĞIN TANIMI VE TARİHÇESİ

Olasılık felsefe sözlüklerinde genel olarak, bir şeyin gerçekleşme durumu, gerçekleşme şansı ya da oranı, olumsal olma, zorunlu olmama durumu olarak açıklanır. Olasılığın tarihi Akademia'nın önemli temsilcilerinden Karneades (214–129)'a değin uzanır. Karneades, Stoa okulunun katı rasyonalizmine de, hiçbir gerçekliğin sağın olarak bilinemeyeceğine inanan klasik şüpheciliğin savlarına da aynı ölçüde karşı çıkmıştır. O her iki savın da aynı ölçüde yanlış olduğunu öne sürmüş, orta bir yol tutarak, yersiz öne sürümlerden sakınıp olası sonuçlarla karşılaşılabilceğini kabul etmek gerektiği düşüncesini savunmuştur. [14]

Kesinlik içermediği gerekçesiyle, bilim dışı bir kavram çağrışımı yapan olasılığı, şüphecisi Hume ile birlikte anınca sorunsal olma yönü biraz daha ön plana çıkar. "İşi şansa bırakmak", herhangi bir şeyin var olması için bir nedeni zorunlu görmek ve bunu tecrübe ile edindiğini öne sürmek, ya da neden ile sonuç denilen iki ayrı olgu arasında zorunlu bir bağlantı olduğu iddiasında bulunmak "şüphe ile" karşılaşılması gereken sorunlardır. Öyle ise, zorunlu olduğunu öne süremeyeceğimiz bu felsefi problemler için "olası" nitelemesinde bulunmalıyız, der Hume.

#### 4. BİLGİ VE OLASILIK

Hume'un olasılıkla ilgili değerlendirmeleri, Treatise'in Birinci Kitap III. Bölümü'nde Bilgi ve Olasılık Hakkında, Enquiry'de ise, "Olasılık Üzerine" başlıklarıyla yer almaktadır. Özellikle Treatise'de bu başlık altında incelenen konular, hem çeşitli tartışmalara yol açmaları, hem de bilgi sorununda ele alınan temel problemleri içermeleri açısından son derece önemlidirler. Başlıklardan birkaç tanesini örnek vermek gerekirse şunlar sayılabilir: Olasılık, Neden ve etki düşüncesi, Niçin Her Zaman Bir Neden Zorunludur? Duyuların ve Zihnin İzlenimleri, İzlenimden Düşünceye Sonuç Çıkarma, Düşüncenin ya da İnancın Doğası, İnancın Nedenleri, Şansların Olasılığı, Nedenlerin Olasılığı, Felsefî Olmayan Olasılık, Zorunlu Bağlantı Düşüncesi vs. Her biri ayrı bir bildiri konusu olacak kadar geniş tartışmalara zemin oluşturacak bu başlıkları burada ele alma olanağı olmadığı için, yalnızca olasılığın ilkece diğer sorunlarla ilgisi üzerinde duracak, Hume'un bugün bile tartışılmaya devam eden olasılıkla ilgili yorumlarını aktarmaya çalışacağız.

Hume felsefede yedi tür ilişkinin bulunduğunu belirtir. Bu ilişki türleri de kendi aralarında iki gruba ayrılırlar. Birinci grupta yer alanlar İdealar üzerine,[15] ikinci grupta yer alanlar ise deneyim üzerine dayanırlar. Birinci grupta yer alanlar, benzerlik, karşıtlık, nitelikte dereceler, miktarda ya da sayıda orantılar olmak üzere dört tanedirler. Bu ilişki türlerinde sonuca ulaşmak son derece kolaydır, şöyle ki: nesneler birbirlerini andırdığında andırım hem göze, hem zihne çarpar ve çok nadir olarak ikinci bir yoklamayı gerektirir. Aykırılık ve niteliğin derecesi için de durum bundan farklı değildir. Örneğin hiç kimse, var oluş ve yok oluşun birbirlerinin karşıtı olup, birinin diğerini yok ettiğinden kuşku duymaz. Nicelik (miktar) ve sayı üzerinde yapılan orantı hesaplamalarında durum öncekilere göre daha da kolaydır. Bir bakışta sayılar ve betiler arasında bir üstünlük ya da astlık görebiliriz, özellikle de aradaki fark büyük olduğu zaman.

İnsan aklının bütün soruşturmaları temelde iki türe ayrıldığına göre, her bir disiplinin bu iki türden hangisinin özelliklerini taşıdığını saptamak gerekir. Hume'a göre, cebir ve aritmetik kesin bilimlerden sayılır. Ancak, her ne kadar hayal gücünün ve

duyumların zayıf yargılarından çok üstün olsa da, geometri, ya da betilerin orantılarını sağlayan sanat kesinlik ve sağlınlığa erişemez. Normalde pozitif bilimler arasında yer alması gereken geometri gibi bir disiplini de, duyu yanılmalarına yol açabilecek özellikler taşıması nedeniyle olası bilgi veren alanlar arasında saymak gerekir.[16] Çünkü geometrik şekillerin ilk bilgileri görüşlerinden elde edilir, bu da onların sağın bilgiler olmadığıının kanıtıdır. Ancak cebir ve aritmetik için böyle bir yanılma söz konusu olamaz. [17]

Tam bu noktada, Hume'un uslamlamalarının rasyonalizm-ampirizm bağlamında bir güçlük taşıdığına işaret etmek gerekir. Hume'un cebir ve aritmetik için pekin, sağın bilgi kaynağı demesinin tek nedeni, sonuna kadar uslamlamada bulunulsa bile en ufak bir yanılma görülemeyeceklerindendir. Bu da matematik bilgilerin bütünüyle rasyonel bir temeli olduğunu göstermektedir. Ampirik felsefeyi başarıyla uygulayan Hume'un matematiksel bilgileri akılda temeli olan kesin bilgiler olarak nitelemesinde bir güçlük yatmaktadır. O da, hemen her yerde deneyimden elde edilen bir izlenim arayan Hume'un matematiğe bu sağınlığı hangi deneysel izlenimin verdiği sorusunu yanıtsız bırakması ve bu konuda eleştirilerin hedef olmasıdır. [18]

Hume, matematikçiler objeleri kaynak yaparak oluşturdukları idealar için imgelemi işin içine karıştırmazken, felsefeciler kimi saçmalıkları örtmek için, kaynağını izlenimden almayan çeşitli uydurma idealarla kafa karıştırırlar der. Eğer Hume matematiğe ve matematikçilere güvenini her zaman korumuşsa ki bunu söylemek güçtür, bu tutumu onun pozitivist yönüne bir örnek sayılabilir. Ona göre bütün idealarımız duyularımızla elde ettiğimiz izlenimlerimizin birer kopyasıdır. Bir nesnenin bilgisine sahip olduğumuzu öne sürmemiz için onun duyulardan elde edilen izlenime dayanması gerekir. [19] Ama ona göre felsefeciler bu tür bir kaynağa dayanmıyorlar.

Yukarıda değinilen, benzerlik, karşıtlık, nitelikte dereceler, nicelikler ve sayıda orantılar gibi dört ilişki türü bilimin temelini oluşturur. [20] İdeaya bağlı olmayan, ideanın varlığı ya da yokluğu onun varlığı ve yokluğu ile orantılı olmayan, özdeşlik, zamanda ve yerde durumlar ile nedensellik gibi ikinci gruba giren ilişki türleri ayrıca ele alınmalıdır. Bunlar “idea ilişkileri” gibi kesin akıl yürütmeler değil, belki daha zayıf akıl yürütmeler sınıfına girerler. Hatta bunlara akıl yürütme değil de algı dense daha iyi olur, der Hume.

Çünkü bu ilişki türlerine göre verilen yargılarda, karşılaştırılan nesnelerin bazen biri, çoğu kez de bütün taraflarıyla birlikte bulunur ve duyu organları tarafından doğrudan algılanırlar. “Bu düşünme yoluna göre, özdeşlik, uzay ve zaman ilişkileri üzerine yapabileceğimiz herhangi bir gözlemi akıl yürütme olarak almamamız gerekir; çünkü bunların hiçbirinde anlık gerçek var oluşu ya da nesnelerin durumunu ortaya çıkarabilmek için duyuların doğrudan algıladıklarının ötesine geçemez. Böyle bir bağlantıyı üreten ve böylece bir nesnenin var oluş ya da eylem tarafından izlendiği ya da öncelendiği güvencesini verebilen yalnızca nedenselliktir (causation).

Nedensellik çözümlemesi, yalnızca olasılık konusunun değil, belki de Hume'un felsefesinin en dikkat çekici yönlerinden birini oluşturur. Nedir bu nedensellik? Nesnelerde bitişiklik ya da ayrılık dediğimiz durumların hangi neden tarafından birleştirilip-ayrıldığını, nasıl bileceğiz? Bizi, neden ve sonuç adı verilen ve gerek öncelik-sonralık (zaman) bakımından, gerekse birliktelik (mekan) bakımından biri diğerinden ayrılmaz olduğu sanılan farklı olguların, zorunlu olarak birbirine bağlı olduğu çıkarımına götüren hangi gerekçe ya da gerekçelerdir? Bu sorulara verilebilecek tek yanıtın nedensellik çerçevesinde olacağı tartışma götürmez. Hume bu genel değerlendirmeye karşı çıkar ve “bizi görmediğimiz ya da duyumsamadığımız varoluşlar” a götüren nedensellik açıklamasının çözümlendiğinde hiç de insanların kurduğu bağlantının zorunlu olmadığına görüleceğini savunur.[21] Hume'a göre, hem uzay ve zaman ilişkilerinde hem de özdeşlik konusunda bizleri algının ötesinde “varoluşlar” a götüren bu nedenselliğin kökeninin bütün yönleriyle incelenmesi gerekir! Mademki bu kadar önemli nedensellik kavramı, öyleyse onun kökünü bulmak zorundayız, der Hume. Eğer, üzerine akıl yürütmelerde bulunduğumuz ideayı, eksiksiz olarak izlenimini bulup anlamazsak, doğru bir uslamlamada bulunamayız. Hume neden ve etki denilen iki nesneyi bütün ayrıntılarına kadar incelesek de, nedensellik denilen üçüncü bir nesneye ulaşamayacağımız düşüncesindedir. “O zaman nedensellik ideası nesneler arasındaki bir ilişkiden türetilmiş olmalıdır” diyerek, insanları böyle bir “gizli güç”(secret power) olduğunu söylemeye iten nedenler üzerinde durur Hume. Uzak nesneler de birbirlerini üretiyor gözükür ama, biraz incelendiğinde kendi aralarında bitişik olan bir nedenler zinciri ile bağlı oldukları bulunur. Herhangi bir tikel noktada bu bağlantıyı ortaya çıkaramasak bile var olduğunu kabul ederiz. Öyleyse nedensellik ilişkisinin esasını teşkil eden kabullerden birisi bitişikliktir (contiguity). Bitişiklik kadar evrensel olarak kabul

edilmiş olmasa da, nedenle sonuç arasındaki ikinci ilişki, nedendeki etkiye göre zamansal önceliklidir (priority). Hume şunları soruyor: Bitişiklik ve ardışıklık ile bir nesnenin bir başkasında ürettiği söylenen şey nedir? Üretim ile kastedilen nedir? Bu terimin, nedenselliğin tanımı ile aynı olmayan bir tanımını verebilir miyiz? Bunun yanıtını veremiyorsak boş bir dairede dönüp dolaşıyoruz demektir.

Hume, neden ile sonuç arasında var olduğu söylenen nedensellik ilişkisinin irdelenmesinde, bitişiklik ve ardışıklıktan daha önemli olan bir kavram üzerinde, zorunlu bağlantı (necessary connexion) kavramı üzerinde durulması gerektiğini düşünmektedir. Zorunlu bağlantı'nın doğasını öğrenmek için, Hume'un ifadesiyle, "nesneyi evirip çevirmek gerekir". Bu irdelenmede Hume'un amacı zorunlu bağlantı ideası'na temel olacak izlenim ya da izlenimler bulabilmektir. Bu izlenim ya da izlenimleri "görünür"de bulunamayacağını Hume baştan belirtir. Definecilerin ilgili bütün toprakları umutla eştikleri gibi her yanı sorgulamak gereği üzerinde duran filozof, zorunlu bağlantı ideası ile doğrudan bağlantısı olduğunu düşündüğü iki soru sorup bunların yanıtlarını arar. Sorulardan birincisi: "Hangi sebeple, var oluşunun bir başlangıcı olan her şeyin bir de nedeninin olmasının zorunlu olduğunu söyleriz? İkinci soru, "Niçin, şu ya da bu tikel nedenlerin, zorunlu olarak, şu ya da bu tikel sonuçları olması gerektiği sonucunu çıkarırız; ve birinden ötekine yaptığımız o çıkarımın ve ona duyduğumuz inancın doğası nedir?"[22] Felsefesinin genel bütünlüğü dikkate alınarak yapılacak bir tahmin, Hume'un aradığı bu izlenim ya da izlenimleri bulamayacağı yönünde olacaktır. Çünkü Hume, en başta koyduğu ilkeye "izlenimi olmayan hiçbir nesnenin ideası da yoktur" ilkesine bağlı kalacak, çok eleştirilse de, nedenin zorunluluğu, nedensellik ve zorunlu bağlantı iddialarının alışkanlıktan ve deneyimden öte bir anlamı olmadığını söyleyecektir. Bu da Hume'un, anılan ilkelerle elde edilen bilgilerin zorunlu olmadığı yönünde ısrar etmesine yarayacaktır. Daha açık ifade etmek gerekirse, Hume, "var olmaya başlayan her şeyin varoluşunun bir nedeni olmalıdır" maksiminin bile hiçbir kanıt ve uslamlamaya dayanmadan kabul edildiğini, kabul edilmesi istendiğini, ancak en ufak bir araştırma ile bunun sezgisel bir pekinliğinin olmadığını anlaşılabileceğini öne sürer.[23]

Hume, izlenimden ideaya geçişte, hep birliktelikler, yan yana olmalar bizleri doğal bir uslamlamaya oradan da kimi çıkarımlar yapmaya belirler der. Söz konusu

çıkarımın temelinde yatan ve yukarıda sayılan birlikteliklerden üretilen “aynı nedenin her zaman aynı sonucu verdiği” inancını sorgulayan Hume, inancı, “bulunan bir izlenim ile ilişkili ya da çağrışımlı bir diri düşünce olarak” tanımlar. [24] “İnanç düşünceye fazladan bir şey eklemeyiz, ama onu kavrama yolumuzu değiştirir ve onu daha güçlü ve diri kılar”. Yeni bir akıl yürütme ya da karar olmaksızın, yalnızca bir tekrarlama ile çıkan şeylere alışkanlık denildiğine göre inancın alışkanlıktan doğduğunu söyleyebiliriz, der Hume. [25] Başka bir yerde ise inancın düşüncelerin çağrışımından doğduğunu ifade eder. [26]

#### 1.1 4.1. Şansların Olasılığı

İnsan usunu bilgi ve olasılık olarak ikiye bölmüş olan felsefeciler için **bilgi**, ideaların karşılaştırılmasından doğan kanıt olarak tanımlanabilir. Nedenlerden ve onların etkilerinden yararlanılarak yapılan uslamlamalar da genel olarak **olasılık** teriminin karşılığı kabul edilir. Hume'un temel düşüncesine göre, nedenlerden ya da onların sonuçlarından türetilen tüm uslamlamaların olasılık özelliği taşıdığı vurgulanmalıdır. Ancak, o, nedensellik yoluyla yapılan kimi uslamlamaların olasılık derecesini aştığını belirtmeden de geçemez. Normalde, Hume'un iddiasına göre, “Güneşin yarın doğacağı olasıdır” diyen bir adam, haklı olmakla birlikte, geçmiş deneyimin dışında bir olguya sahip olmadığı için çevredekiler tarafından gülünç bir iddia sahibi olarak tanınır. Bu tür olgularla, gerçekleşme ya da gerçekleşmeme şansı konusunda yeterli deneyim ve kanıt bulunmayan konular arasında bir ayırım yapmak gerekir. Bu nedenle Hume çeşitli kanıt derecelerini belirtmek için insanın akıl yürütmelerini üç bölüme ayırır: **Birincisi** bilgi ile ilgili olup, ideaların karşılaştırılmasından doğan güvenli kanıt; **ikincisi**, neden ve etki düşüncesinden çıkarılan, kuşku ve belirsizlikten uzak olarak nitelenen kanıtlar; akıl yürütmenin **üçüncü** ve son türü ise, henüz belirsizlikle yüz yüze olan kanıttır. [27] Üçüncü usamlama türü olasılık geçerli olan tanımdır. Bunlardan birincisi şanslarla ilgili olan, ikincisi de nedenlerle ilgili olan olasılık türüdür.

Hume, **şansı**, nedenin yokluğu üzerine zihnin ilgisizlik durumu olarak açıklar. [28] Şansların birinin diğerinden üstün olduğunu ileri sürmek için gerekçemiz yoktur. Bir tarafın fazla şansa sahip olması için bir *neden*'e izin vermemiz durumunda, daha önce doğruladığımız şans sayılığını yok etmemiz gerekir. *Çünkü eksiksiz ve tam bir*

*bilgisizlik şans için gereklidir.* “Tam bir ilgisizlik hiçbir zaman kendinde bir başkasından yukarı ya da aşağıda duramaz. Bu gerçeklik benim sistemime özgü bir şey de değil, şansları ilgilendiren hesaplamalar yapan herkesin kabul ettiği bir şeydir,” der Hume.[29]

Şansların olasılığı için verilen bir başka örnek de şudur: Hume, “dünyada rastlantı diye bir şey yoktur”; olayların gerçek nedenini bilmemek anlama yetisini etkiler ve böyle bir inanç ya da kanı doğar. Taraflardan herhangi birindeki rastlantı olanaklarının baskın olmasından doğan bir olasılık vardır. Bu baskınlık artıp karşıt rastlantı olanaklarını aştıkça olasılık artışı gösterir. Örneğin, bir zarın dört yüzü belirli sayıda benekle, kalan iki yüzü de başka sayıda benekle işaretlense, birinci türdeki işaretlerin üste gelmesi daha büyük olasılık taşıyacaktı. Aynı sayıda işaretlenmiş bin yüz olsa ve yalnızca bir yüz farklı olsaydı, olasılık ve beklenti çok daha yüksek olacaktı. Az önce betimlenen zarın atılması ile ortaya çıkacak sonucun, yapılacak bir tahminde, tek tek her yüzün üste gelmesi aynı derecede olası görülür. Çünkü *rastlantının anlamı, bütün olası sonuçları eşit bir biçimde düşünmek demektir.* Ancak zihin, bir yüzün diğerlerinden daha çok sayıda meydana geldiğini görünce onun gerçekleşme olasılığını daha çok görür. Böylece zihinde, daha sık gerçekleşen olasılık lehine bir “inanç” oluşur.[30] Neden dahil hiçbir şeyin şansları sınırlamadığı zaman, en ölçüsüz bir hayalin oluşturacağı her kavram bir eşitlik temeli üzerine durur ve biri diğerine üstünlük sağlayamaz. Böylece, zarların düşmelerine ve düşmelerinde yüzlerinden herhangi biri üzerine yatmalarına neden olabilecek kimi etkenleri kabul etmedikçe, şansın yasalarını (Laws of hazard) ilgilendiren hiçbir hesaplama yapamayız.[31]

## 4.2 Nedenlerin Olasılığı

Hume, şansların olasılığındakine benzer bir örneğin neden-etki ilişkisinde de görüldüğünü belirtir. Şöyle ki, evrensel bir yasa haline gelen, ateşin yakması, suyun boğması gibi neden sonuç ilişkilerinde bugüne kadar istisna görülmemiştir. Ancak, aynı *neden sonuç düşüncesi* içerisinde düşünülen kimi olgularda belirsiz bir durum ortaya çıkabilmiştir. Örneğin ravent her zaman müşhil etkisi, afyon her zaman uyuşturucu etkisi göstermemiştir. *Alışkanlık* bütün çıkarımlarımızda geçmişî geleceğe aktarmayı belirlediğinden, eğer geçmiş sürekli karşılaşılan bir örnekse, geleceğin de aynı olacağını

güvenle bekleriz. Ancak *görünüşte* [32] aynı olan nedenlerin farklı sonuçları verdiğini gözlememiz, olayların sonucunu beklerken hesaba katılması gereken başka olasılıklar da bulunduğunu kabul etmemiz gerektiğini gösterir. Gerçekleşmesi en çok olası olana üstünlük verip, onun gerçekleşeceğine “inansak” da, başka olası sonuçlar da gözden kaçırılmamalıdır.[33]

Hume'un şansların olasılığı ile nedenlerin olasılığı arasında kurduğu bağa ilişkin yorumları da şöyledir: Felsefeciler, sıradan insanların şans dedikleri şeyin gizli bir nedenden başka bir şey olmadığını söyledikleri için, şansların olasılığı deyimi ancak nedenlerin olasılığını açıklamak için bir araç olabilir. Ona göre nedenlerin olasılığı, “*ideaların mevcut bir izlenime bağlanmasından ibarettir.*”[34] Bağlantıyı üreten, nesnelerin sık birlikteliklerinden doğan **alışkanlıktır**. Nesneler arasında görülen birliktelikler ilk görüldüğü anda olasılık zayıf görülür; deneyimler arttıkça yargılarımız tam bir inanca dönüşür. Deneyimlerin sayısının kimi zaman sınırı olmayabilir. Ravent örneğinde olduğu gibi, zaman zaman önceki deneyimlerin aksine ve beklentilerin tersine sonuç elde etme olasılığı da vardır. Hume, eğer aynı nesneler her zaman aynı sonuçlarla birleşmiş olsalardı, yaşam daha kolay olur, kendi yargımızın yanlışlıklarından başka korkacak bir şeyimiz de kalmazdı der ve sorunun daha derinlerde yattığına işaret eder. Neden ve etkiler, deneyiminin kazanıldığı şekliyle aynı düzende gelmedikleri için, bu belirsizlik akıl yürütmelerin gözden geçirilmesini gerektirir.[35]

Sıradan insanların neden açıklaması ile filozoflarınki arasında ciddi farklar bulunması doğaldır. Hume'a göre olayları ilk görünüşüne göre alan sıradan insanlar bu olayların belirsizliğini nedenlerdeki belirsizliğe yüklerler ve olağan etkilerin açıklanmasında bile başarısızlığa uğrarlar. Ama felsefeciler, doğanın hemen her bölümünde küçüklükleri ya da uzaklıkları nedeniyle gizlenen geniş bir kaynaklar ve ilkeler türülülüğünün kapsandığını gözleyerek, olayların aykırılıklarının nedendeki herhangi bir olumsuzluktan değil, aykırı nedenlerin gizli işlemlerinden (secret operations) doğabileceğinin en azından olanaklı olduğunu bulurlar”.[36] Şu örnek, az önce değinilen sıradan ve araştırmacı iki olasılık yorumunu daha açıklayıcı olabilir: Bir köylü, herhangi bir saatin durması için “genellikle doğru gitmez” demekten daha iyi bir neden göstermez. Ama bir sanatkar, yaydaki ya da sarkaçtaki aynı kuvvetin çarklar üzerinde her zaman aynı etkiyi

yapmasına rağmen, belki de bütün hareketi engelleyen bir toz zerreciği nedeniyle etkisinin sonuçsuz kaldığını kolayca anlar. Gerekçe ne olursa olsun, nedenleri açıklamadaki çözümleyicilik ne kadar aydınlatıcı olursa olsun , Hume'un gözünde sonuç değişmez.[37]

Hume'a göre, geleceğin de geçmiş gibi olacağı beklentisi benzerlikler kadar "aykırılıklar"dan da çıkar. Beklentilerin gerçekleşme ve gerçekleşmeme oranları deneyimle saptanabilir. Örneğin, denize açılan yirmi gemiden yalnızca on dokuzunun geri döndüğünü uzun bir gözlem sonucunda saptamış olayım. Bu kadar uzun bir deneyimin ardından yirmi geminin limandan ayrıldığını gördüğümde, geçmiş deneyimimi kullanarak bu gemilerin on dokuz tanesinin güvenli bir biçimde geri döneceğini ve bir tanesinin de kaybolacağını tasarlarım. [38]

Hume'un olasılık öğretisi içeriğinde atlanmaması gereken bir başka konuya da değinmek gerekir. Kesinliğini kabul ettiği ve tanıtlamalı bilimler diye andığı cebir ve aritmetik gibi bilimlerin de, Hume tarafından, "yanılabilir ve güvenilmez yetilerimiz" tarafından olası bilgiler veren disiplinler gibi algılanacağı yorumları oldukça tartışma götürür niteliktedir. Hume'un bu tartışmalara zemin oluşturabilecek sözleri vardır. İlk olarak, akla ilişkin şüpheyi anlatırken, *İnsan akli doğal etkisi gerçeklik olan bir yeti olmasına rağmen, başka nedenlerin zorlaması ile kimi zaman engellenebilir ve verdiği bilgiler pekin olması gerekirken olasılığa dönüşebilir*, der. Diğer taraftan da, cebir ve matematiğin bile öznel bir niteliği olduğu biçimde yorumlara yol açabilecek şu ifadelerle yer vermektedir: *Bütün cebirci ve matematikçiler bilimlerinde buldukları her hangi bir gerçekliğe tamamen güvenle bakamazlar ve onu sadece bir olasılık olarak görürler. Kanıtları üzerinden her geçişlerinde güvenleri artar, çevreden gelen onaylarla güvenleri daha da artar. Evrensel eksiksizlik düzeyine bilim dünyasının onayı ile ulaşır. Bu durumda, inancın bu aşamalı artışı yeni olasılıkların eklenmesinden başka bir şey değildir*. [39]

## SONUÇ

Belki doğasının bir gereği olarak, insan, eksiksizliğin, pekinliğin peşinde olduğu için olasılık sözcüğü çeşitli kuşkuları içeren, bilim dışı bir kavram çağrışımı yapar. Oysa olasılık felsefeyle başlasa da matematik konularından birisi haline gelmiş bilimsel bir

hesaplama yöntemidir. Psikolojik çağrışımdan işin matematiksel ve olgusal yanına geçince olumsuz algılama biçimi olumluya dönüşür. Ancak olasılığın, Hume'un da zar örneğinde gösterdiği bu pozitif yönüne karşın, içerisinde sürdürülebilir felsefi tartışmalar içeren bir anlamı olduğunu da vurgulamak gerekir. Bu bildiri ile sınırlı olmak üzere, bizi asıl ilgilendiren yönü olasılığın felsefi şüpheciliğe olanak veren yönüdür. Felsefi anlamda şüpheciliğin yalnızca olumsuz görünümüne saplanmamak gerekir. Çünkü orada dikkat çekilmek istenen şey insanın sınırlı bir varlık olmasıdır. Felsefi anlamda şüphe, deneyimlerin, geleceği mutlak anlamda belirleyemeyeceğini spekülatif anlamda savunmak demektir. Yazılarındaki derinlik ve çeşitlilik Hume'un kimi zaman klasik şüpheci (Pironcu), kimi zaman ılımlı şüpheci olarak anılmasına neden olmuştur. Hume'un, insanın anlama yetisinin ötesinde olan konularda deneyimin yeterli olamayacağı gerekçesiyle şüpheciliğe yer verdiği doğrudur. Yazılarında bu yorumu destekleyecek çok sayıda açık ifadeler vardır. Hume, Treatise için yazdığı bir özette, söz konusu örnekleri içerik olarak büyük ölçüde karşılayan şu değerlendirmeyi yapmaktadır: "Okur, bütün bu söylenmiş olanlardan kolayca, bu kitapta verilen felsefenin çok şüpheci olduğunu, bize insan zihninin eksikliklerinin ve dar sınırlarının bir kavramını verme eğiliminde olduğunu anlayacaktır. O kitapta hemen her usamlama deneyime indirgenmiştir. Deneyimle elde edilen 'inancın' kendine özgü bir duygu ya da alışkanlık tarafından üretilen canlı tasarımdan başka bir şey olmadığı açıklanmıştır." [40]

Olasılık kuramının bilimsel isteklendirme ve çıkarımlara zemin hazırladığı söylenebilir. Einstein'ın özel görecelik yasası başta olmak üzere sonradan ortaya çıkarılan kimi bilimsel gelişmeler Hume'un haklılığını ortaya koymuştur. Önemli bir Hume yorumcusu olan E. C. Mossner, Einstein'ın söz konusu buluşunda önemli bir yer tutan ve zamanın mutlaklığının reddedilmesinde Hume'un felsefi eserleri ile ilgili okumalarından yararlandığını belirtir. [41]

Hume'un, felsefi usamlamalarının bu denli etkisi olacağını tahmin edip etmediğini bilmek olanaksız; ancak onun felsefi tartışmaların odağında yer almayı sürdürdüğü rahatlıkla söylenebilir.

## Kaynakça

- [1] Magee, B. (2000), "*Büyük Filozoflar, Platon'dan Wittgenstein'a Batı Felsefesi*", çev. Cevizci, A., İstanbul, Paradigma Yayınları, s. 145.
- [2] Smith, N.K. (1940) "*The Philosophy of David Hume A Crritical Study of Its Origins and Central Doctrines*", Edinburgh, s. vii.
- [3] Maund, C. (1937), "*Hume's Theory of Knowledge, A Critical Examination*", London, s. v.
- [4] Bu eser *Treatise* olarak anılacaktır.
- [5] Hume, D. (1927), "*An Enquiry Concerning Human Understanding*", Chicago, The Open Court Publishing Co. s. 2. (Bu eser *Enquiry* olarak anılacaktır)
- [6] "Moral Konular" ifadesi, Hume'un "idea ilişkileri" (relations of ideas) dediği ve cebir ve aritmetik gibi tanıtlamalı (demonstrative) bilimlerin dışında kalan tüm tartışmalı disiplinler için kullandığı bir terimdir. Broadie, A. (1990), *The Tradition of Scottish Philosophy, A new Perspective on Enlightenment*, Edinburgh, s. 95.
- [7] Hume, D. (1964), "*A Treatise of Human Nature*", ed. Lindsay, A.D. London, s. 3.
- [8] Aster, E. V. (1994), "*Bilgi Teorisi ve Mantık*", çev. Gökberk, M., İstanbul, Sosyal Yayınlar, s. 144.
- [9] *A.g.e.*, s. 148
- [10] Musgrave, A. (1997), "*Sağduyu, Bilim ve Kuşkuculuk*", çev. Uzay, P., İstanbul, Göçebe Yayınları, s. 206.
- [11] *A.g.e.*, s. 207.
- [12] Russell, B. (1967), *Western Philosophical Thought*, London, s. 646
- [13] *A.g.e.*, s. 647.
- [14] Mautner, T., (2005), *Dictionary of Philosophy*, England, Penguin Books. Karneades'in görüşlerini özlü bir biçimde aktaran şu ifadeler aydınlatıcıdır: "Hakiki bir bilimin ve hakiki bir kanıtlamanın tek objesi, nicelikler ve sayılardır. Olana yahut varlığa ait şeyler söz konusu oldu mu, karar veren deneydir ve deney asla ihtimalden ileri geçmez." Weber, A. (1993), "*Felsefe Tarihi*", çev. Eralp, H. V. İstanbul, Sosyal Yayınlar, s. 301.
- [15] *İdea* kavramı felsefede hemen her filozof tarafından farklı anlamda kullanılır. Hume'un kullanımı da diğerlerinden farklıdır. Kendisi bunu çeşitli yerlerde belirtir

(*Treatise*, s. 12). Hume'un idea (idea) ile düşünceyi (thought) ayrı kullandığı göz önüne alınınca idea ile kastedilenin farklı olduğu anlaşılıyor. Ben *idea* kavramını özgün biçimiyle kullanmayı tercih ettim.

[16] *Treatise*, s. 74. Burada geometriye kesin olmayan bilim sınıfına koyan Hume'un *Enquiry*' s. 23' de aritmetik ve cebirle birlikte, tanıtılamalı kesin bilimler arasında sayması gibi çelişik gözüken yorumlara zaman zaman rastlanmaktadır. Hume'un her yerde kesinlik atfettiği matematiği, *Treatise*'in, "Akla İlişkin Şüphecilik" bölümünde olası bilgiler veren bir bilim olarak tanıtacak kadar aşırı şüpheci spekülasyonlara başvurduğu görülmektedir. (*Treatise*: 176.)

[17] *A.g.e.*, s. 75

[18] Weber, s. 302.

[19] *Treatise*, s. 76.

[20] *A.g.e.*, s. 76.

[21] *A.g.e.*, s. 77.

[22] *A.g.e.*, s. 81-82.

[23] *A.g.e.*, s. 82.

[24] *A.g.e.*, s. 98.

[25] *A.g.e.*, s. 105.

[26] *A.g.e.*, s. 113.

[27] *A.g.e.*, s. 127.

[28] *A.g.e.*, s. 128.

[29] *A.g.e.*, s. 127.

[30] *Enquiry*, s. 57

[31] *Treatise*, s. 128.

[32] *İtalik* Hume'a ait, bkz. *Enquiry*, s. 59.

[33] *Enquiry*, s. 59.

[34] *Treatise*, s. 132.

[35] *A.g.e.*, s. 132.

[36] Hume, D., (1997), "*İnsan Doğası Üzerine Bir İnceleme*", çev. Yardımlı, A., İstanbul, İdea Yayınevi, s. 145.

[37] *A.g.e.*, s. 146.

[38] *A.g.e.*, s. 147.

[39] *Treatise*, s. 176.

Hume'un Bilgi Öğretisinde Olasılık, Ali Taşkın

[40] Hume, D. (1965), “*An Abstract of Treatise of Human Nature*”, ed. Keynes, M. & Sraffa, P., Archon Books , Hamden Connecticut, USA, s. 23.

[41] Mossner, E. C., (1980), “*The Life of David Hume*, Oxford, s. 5.

## YAZARIN ÖZGEÇMİŞİ

### Ali TAŞKIN

1959 Darende doğumludur. Lisans eğitimini 1982 yılında Atatürk Üniversitesi, İlahiyat Fakültesi tamamladı. Yüksek lisansını 1998 yılında Cumhuriyet Üniversitesi, Doktorasını 2002 yılında Ankara Üniversitesinden aldı. Halen Cumhuriyet Üniversitesinde yardımcı docent olarak görevini sürdürmekte olup, araştırma alanı Gazâlî ve David Hume'un Şüphecilik Anlayışlarının karşılaştırılması ve Bilgi Kuramı üzerinedir.



## Olasılık Tabanlı Asal Sayı Sınama Algoritmalarında Hata Olasılık Sınır Değeri İçin Yeni Bir Taban Önerisi

**Ahmet Koltuksuz**

İzmir Yüksek Teknoloji Enstitüsü, Mühendislik Fakültesi, Bilgisayar Mühendisliği  
Bölümü, Gülbahçe, Urla,  
35430 İzmir  
ahmetkoltuksuz@iyte.edu.tr

### Özet

Bu çalışma büyük tamsayılar üzerinde gerçekleştirilmiştir. 1K - 2K - 4K and 8K uzunluğunda en büyük tamsayılar oluşturulmuş ve asal sayı sayıları  $x/\ln(x)$  ve  $Li(x)$  fonksiyonları uyarınca hesaplanmıştır. Ayrıca ilişkin olasılık değerleri de bulunmuştur. Olasılık tabanlı asal sayı sınama algoritmalarından Solovay-Strassen ve Miller-Rabin testlerinin kullandığı hata olasılık sınır değerleri sırasıyla  $(1/2)^t$  ve  $(1/4)^t$  olup, bu testler bir çok kriptosistem tarafından kullanılmaktadır. Her tamsayı seti için yeni bir hata olasılık sınır değeri  $\lceil \frac{x/\ln(x)}{x} \rceil^t$  olarak saptanmıştır. Önerilen bu yeni değer,  $(1/2)^t$  ve  $(1/4)^t$  değerleriyle karşılaştırılmıştır. Karşılaştırma sonuçları önerilen yeni değer açıkça daha iyi olduğu, ancak maliyetinin daha yüksek olduğunu ortaya koymuştur.

### 1 Giriş

Sayılar kuramı üzerinde çalışan matematikçiler için asal sayıları sayma ve asal sayı ispat testleri her zaman çok ilgi çekici olmuştur. Asal sayıların dağılışı için bir dağılım formülü/dizgesi bulma çalışmaları ise şu ana kadar pek sonuç vermemesine karşın hala bütün hızıyla sürmektedir. Öte yandan, en büyük Mersenne asal sayısını bulma çalışmaları ise Internet üzerinde GIMPS projesi ile devam etmektedir [11]. Asimetrik kriptografinin günlük hayata girmesiyle de gittikçe daha büyük asal sayıları bulmak başlı başına bir iş olmuş, bu iş ise, daha hızlı ve daha güvenilir biçimde çalışan algoritma arayışlarını gündeme taşımıştır.

Olasılığa dayalı asal sayı sınama algoritmaları söz konusu arayış için bir yanıt oluşturmuşsa da işin içinde olasılık olması daha hassas yaklaşımların kullanılmasını zorunlu kılmıştır.

Bu çalışmada, olasılığa dayalı asal sayı testi yapan algoritmaların kullandığı hata olasılık sınır değeri için yeni bir yaklaşım ve yeni bir değer ortaya konmuştur. Bu açıdan ele alındığında, bildiri aşağıdaki biçimde organize edilmiştir. 2. Bölüm asal sayı saymanın kuramsal temellerini ortaya koymaktadır. Bölüm 3’de olasılığa dayalı asal sayı testi yapan algoritmalar tanıtılmıştır. Bölüm 4 içindeyse yeni kavram ve ilişkin ölçüt tanıtılmış ve bölüm 3 içinde tanıtımı yapılmış olan algoritmaların kullandığı ölçüt ile yeni ölçüt karşılaştırılarak kıyaslanmıştır. Bölüm 5’de ise sonuçlar ve katkılar yer almaktadır.

## 2 Asal Sayı Sayma

Bir  $x$  sayısına eşit veya ondan küçük olan asal sayıların sayısı konusundaki en eski çalışmalardan başlıcası Gauss’a atfedilir ve 1800 yıllarına kadar dayanır [3]. Asal sayı sayma fonksiyonu  $\pi(x)$  olarak adlandırılır ve tüm asal sayılar setine  $\mathcal{P}$  dendiğinde aşağıdaki biçimde yazılır.

$$\pi(x) = \#\{p \leq x : p \in \mathcal{P}\} \quad (1) [7].$$

**Teorem 2.1 Asal Sayı Teoremi.** Bir  $x$  sayısına eşit veya ondan küçük asal sayıların sayısı asimptotik olarak

$$\frac{x}{\ln(x)} \quad (2) [1].$$

Değerine eşittir ve (1) ve (2) eşitliğinden yararlanarak Jacques Hadamard ve Ch. de la Vallee Poussin bu teoremi 1896 yılında ispatlamışlardır. Teorem yalın olarak:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x)}{x/\ln(x)} = 1 \quad (3) [7] [2].$$

biçiminde ifade edilir. Gauss, söz konusu değer için daha da iyi sonuç veren bir yaklaşım daha ortaya koymuş olup, bu yaklaşım logaritmik integral olarak bilinir ve aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$Li(x) = \int_2^x \frac{1}{\ln(x)} dx \quad (4) \quad [1] \quad [4].$$

$Li(x)$  fonksiyonu iyi bir yaklaşımdır ve  $x$  sayısına yakın bir sayının asal sayı olma olasılığını

$$\frac{1}{\ln(x)} \quad (6) \quad [1]$$

olarak verir.

### 3 Olasılık Tabanlı Asal Sayı Sınama Algoritmaları

RSA gibi çağdaş kriptosistemler büyük asal sayılar üzerinde durur. Bu durum, çok daha küçük asal sayılar kullanan Eliptik Eğri tabanlı kriptosistemler için de aynen geçerlidir [10]. Bu nedenle; yaygın çalışma biçimi, önce büyük rasgele bir sayı yaratmak, sonra bu sayının asal olup olmadığını deterministik algoritmalarla ve/veya olasılık tabanlı algoritmalarla sınamaktır.

Rasgele sayı içeren algoritma, basit biçimde rasgele sayılar kullanan algoritmalara verilen isimdir ve bunun tersi yani rasgele sayı kullanmayan algoritmalarsa deterministik algoritmalar [8]. Aslında rasgele sayı kullanan ve olasılığa dayalı asallık sınaması yapan algoritmalar, daha doğru bir adlandırmayla kompozitlik sınaması yapan algoritmalar. Bunun nedeni; bu tip algoritmaların aslında asal veya kompozit olup olmadığını sınıdığı tamsayı için yanıt olarak EVET veya HAYIR döndürmesidir. EVET yanıtı tamsayının kesinlikle kompozit olduğu anlamına gelirken; HAYIR yanıtı, sınanan tamsayının olasılıkla asal sayı olduğu belirtir. Yanıt olasılığa dayalı olarak geldiği için, asal sayı kararı asla kesin olarak verilemez. Bu biçimdeki herhangi bir olasılık tabanlı asal sayı

sınama algoritması, tek bir kez bile çalıştırıldığında kompozitliği kesin biçimde teşhis eder. Öte yandan, aynı sınama algoritmasının ard arda birkaç kez çalıştırılması sonucunda oluşan “asal” kararı ancak ve ancak bir olasılık değerine bağlı olarak verilebilir. Bunun anlamı: Sınama algoritması,  $n$  kompozit sayısı üzerinde  $t$  defa istatistik bağımsız olarak çalıştırılsın,  $n$  sayısının *asal sayı* olarak tüm  $t$  seferlerinde bildirilmesinin olasılığı en fazla  $(1/2)^t$  olduğu şeklindedir [6].

Olasılık tabanlı asal sayı ya da kompozitlik testlerinin temel yapısı aşağıdaki gibidir:

```
input n //sınanacak büyük tamsayı
input a //istenen duyarlık için rasgele sayı
Test condition for a and n
If the condition is not true
    then n is KOMPOZİT: end
else back to step 2
```

Bu tip testlerin en popüler olanları Solovay-Strassen testi ve Miller-Rabin testi olup, her ikisi de aşağıda tanıtılmıştır [2] [5] [6] [8] [9]:

### 3.1 Solovay-Strassen Olasılık Tabanlı Asal Sayı Testi

```
input n //tek tamsayı, (  $n \geq 3$  )
input t //güven parametresi, (  $t \geq 1$  )
for i = 1 to t {
    get a random integer a //  $2 \leq a \leq (n - 2)$ 
     $r = a^{(n-1)/2} \pmod{n}$ 
    if  $r \neq 1$  and  $r \neq (n - 1)$ 
        then return ( “kompozit” ) : end

     $s = \left(\frac{a}{n}\right)$  //Jacobi sembolünü hesapla!
    if r is not congruent to s ( mod n )
        then return ( “kompozit” ) : end
}
return ( “asal” )
```

### 3.2 Miller-Rabin Olasılık Tabanlı Asal Sayı Testi

```
input  n  //tek tamsayı, ( n ≥ 3 )
input  t  //güven parametresi, ( t ≥ 1 )
get ( n - 1 ) = 2sr //r tek sayı
for ( i = 1 to t ) {
    get a random integer a  //2 ≤ a ≤ ( n - 2 )
    y = ar ( mod n )
    if y ≠ 1 and y ≠ ( n - 1 ) then
        j ← 1
        while ( j ≤ ( s - 1 ) and y ≠ ( n - 1 ) ) {
            y ← y2 ( mod n )
            if y = 1 then return ("kompozit"): end
            j ← j + 1
        }
        if y ≠ ( n - 1 ) then return ("kompozit"): end
    }
return ( "asal" )
```

### 3.3 Solovay-Strassen ve Miller-Rabin Testlerinin Karşılaştırılması

Kolaylıkla anlaşılabilceği gibi; Solovay-Strassen testi hem hesaplama zamanı açısından daha maliyetli ve hem de Jacobi sembolü hesabını içerdiğinden kodlanması daha zordur. Öte yandan, Solovay-Strassen için hata olasılığı  $(1/2)^t$  üst sınırına sahipken, aynı değer Miller-Rabin için  $(1/4)^t$  'dir. [6].

## 4 Hata Olasılık Sınır Değeri İçin Yeni Bir Taban Önerisi

### 4.1 Farklı Uzunluklara Sahip Tamsayılar İçinde Beklenen Asal Sayı Sayıları

Bu çalışmada, tüm olasılık tabanlı testler için standart bir taban kullanmak yerine, 4 farklı tamsayı seti için, 4 farklı taban denenmiştir. Başlangıç olarak; sırasıyla 1K–

2K–4K ve 8K uzunluğundaki tamsayı setleri için (2) ve (4) nolu eşitlikler kullanmak suretiyle asal sayıların beklenen sayıları hesaplanmıştır. Daha sonra (6) nolu eşitlik üzerinden giderek ilişkin olasılıklar elde edilmiştir. Çizelge 1 her tamsayı seti için beklenen asal sayı sayılarını vermektedir. Çizelge 2 ise aynı gruptaki beklenen asal sayı olasılıklarını göstermektedir.

**Çizelge 1.** Her tam sayı seti için beklenen asal sayı sayıları.

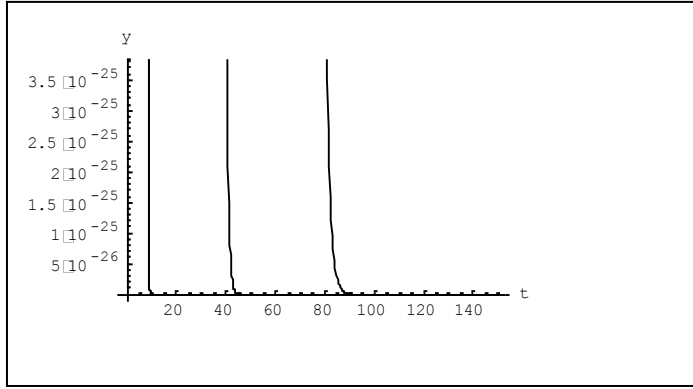
| Tamsayı sayı aralığı                                                                              | $\frac{x}{\ln(x)}$                       | $Li(x) = \int_2^x \frac{1}{\ln(x)} dx$   |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------|------------------------------------------|
| <b>(2<sup>1024</sup>-2<sup>0</sup>): (1K-0)</b><br>1.797693134862316x10 <sup>30</sup><br>8        | 2.532737276080076x10 <sup>30</sup><br>5  | 2.53632x10 <sup>305</sup>                |
| <b>(2<sup>2048</sup> - 2<sup>1024</sup>): (2K-1K)</b><br>3.231700607131101x10 <sup>61</sup><br>6  | 2.276542206809517x10 <sup>61</sup><br>3  | 2.278148160534401x10 <sup>6</sup><br>13  |
| <b>(2<sup>4096</sup> - 2<sup>2048</sup>): (4K-2K)</b><br>1.044388881413153x10 <sup>12</sup><br>33 | 3.678551415952946x10 <sup>12</sup><br>29 | 3.679847990740310x10 <sup>1</sup><br>229 |
| <b>(2<sup>8192</sup>-2<sup>4096</sup>): (8K-4K)</b><br>1.090748135619416x10 <sup>24</sup><br>66   | 1.920919099263933x10 <sup>24</sup><br>62 | 1.921257511993825x10 <sup>2</sup><br>462 |

**Çizelge 2.** Her tamsayı seti için beklenen asal sayı olasılıkları.

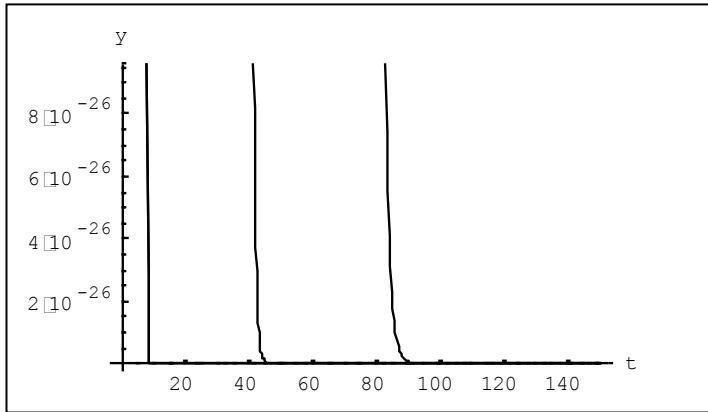
| Tamsayı sayı aralığı                                                                          | $\frac{1}{\ln(x)}$        |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------|
| <b>(2<sup>1024</sup>-2<sup>0</sup>): (1K-0)</b><br>1.797693134862316x10 <sup>308</sup>        | 0.001408881875868128327   |
| <b>(2<sup>2048</sup> - 2<sup>1024</sup>): (2K-1K)</b><br>3.231700607131101x10 <sup>616</sup>  | 0.000704440937934064163   |
| <b>(2<sup>4096</sup> - 2<sup>2048</sup>): (4K-2K)</b><br>1.044388881413153x10 <sup>1233</sup> | 0.0003522204689670320819  |
| <b>(2<sup>8192</sup>-2<sup>4096</sup>): (8K-4K)</b><br>1.090748135619416x10 <sup>2466</sup>   | 0.00017611023448351604094 |

## 4.2 Önerilmekte Olan Yeni Taban

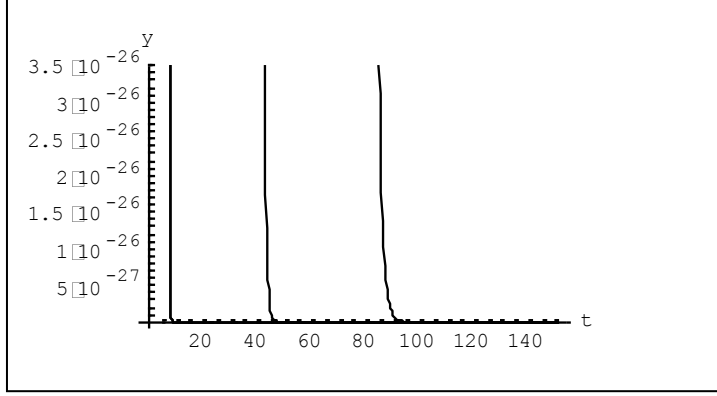
Bölüm 3.3’de tanımlandığı gibi; hata olasılığı sınır değeri için iki ayrı değer söz konusu olup; bunlar Solovay-Strassen için  $(1/2)^t$  ve Miller-Rabin için  $(1/4)^t$  değerleridir. Bu çalışmadaysa yeni bir taban olarak  $\left[ \frac{x/\ln(x)}{x} \right]^t$  denenmiş olup,  $t$  değeri her dört tamsayı seti için 1’den 150’ye kadar arttırılmıştır. Aşağıdaki grafikler yeni değeri  $(1/2)^t$  ve  $(1/4)^t$  değerleriyle karşılaştırmalı olarak göstermektedir.



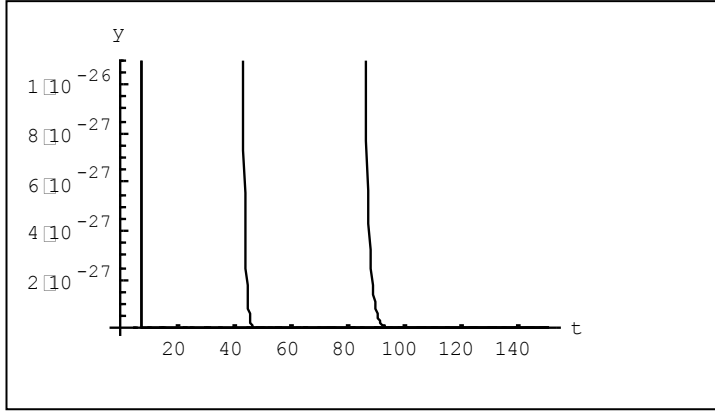
Şekil 4.1 (1K) uzunluğundaki tamsayılar için  $\left[ \frac{x/\ln(x)}{x} \right]^t$ ,  $(1/4)^t$  and  $(1/2)^t$  değerleri.



Şekil 4.2 (2K) uzunluğundaki tamsayılar için  $\left[ \frac{x/\ln(x)}{x} \right]^t$ ,  $(1/4)^t$  and  $(1/2)^t$  değerleri.



Şekil 4.3 (4K) uzunluğundaki tamsayılar için  $[\frac{x/\ln(x)}{x}]^t$ ,  $(1/4)^t$  and  $(1/2)^t$  değerleri.



Şekil 4.4 (8K) uzunluğundaki tamsayılar için  $[\frac{x/\ln(x)}{x}]^t$ ,  $(1/4)^t$  and  $(1/2)^t$  değerleri.

## 5 Sonuçlar ve Katkıları

Şekiller 4.1-2-3-4’de açıkça görüldüğü gibi; önerilmekte olan yeni taban  $[\frac{x/\ln(x)}{x}]^t$ , yaygın olarak kullanılmakta olan  $(1/2)^t$  ve  $(1/4)^t$  tabanlarına oranla daha iyidir. Örnek uzayı çok büyük olduğundan, farklı tamsayı setlerinde çok büyük farklılıklar görülmemektedir.

Matematiksel olarak daha iyi olmasına karşın; önerilmekte olan yeni taban polinomiyal zamanlı, fakat, diğerlerine göre daha maliyetlidir.

Yüksek hesaplama maliyetine karşı bir çözüm önerisi “look-up” tabloları kullanmak şeklinde düşünülmüş olup; bir benzetim algoritmasıyla bunun maliyetinin saptanması denenmektedir. Benzetim çalışmaları henüz tamamlanmamıştır.

### **Teşekkür**

Yazar; İzmir Yüksek Teknoloji Enstitüsü, Bilgi Sistemleri Stratejisi ve Güvenliği Laboratuvarı, Kripto grubuna verdikleri sonsuz katkı için teşekkür eder. Ayrıca; bildiri metnini dikkatle ve özenle okuyarak, yararlı yorumlar ve değerli öneriler yoluyla katkıda bulunan, kimliklerini bilmediği hakemlere de teşekkür eder.

### **Kaynakça**

- [1]. Bressoud, D., Wagon, S., (2000), A Course in Computational Number Theory, 100-105.
- [2]. Crandall, R., Pomerance, C., (2000), Prime Numbers, A Computational Perspective, 5-12.
- [3]. Gauss, C. F., (1801), Disquisitiones Arithmeticae. Lipsiae. [English translation: Arthur A. Clarke, New Haven: Yale University Press., (1966) ].
- [4]. Jones, G., Jones, M., (2003), Elementary Number Theory, 25-28.
- [5]. Kranakis, E., (1987), Primality and Cryptography, 65-72.
- [6]. Menezes A., (1996), Handbook of Applied Cryptography, 135-142.
- [7]. Silverman, J. H., (2006), A Friendly Introduction to Number Theory, 3<sup>rd</sup> ed., 85-87.

Olasılık Tabanlı Asal Sayı Sınama ..., Ahmet.Koltuksuz

[8]. Stinson, D., (2002), Cryptography, Theory and Practice, 2<sup>nd</sup> ed., 171-181.

[9]. Wagstaff, S. S., (2003), Cryptanalysis of Number Theoretic Ciphers, 49-59.

[10]. <http://www.rsasecurity.com>, <http://www.certicom.com>

[11]. <http://www.mersenne.org>

## YAZARIN ÖZGEÇMİŞİ

### Ahmet KOLTUKSUZ

1961 yılında doğdu. Yüksek Lisans tezini 1989 yılında Ege Üniversitesi Bilgisayar Mühendisliği bölümünde “Bilgisayar Güvenliği İlkeleri” üzerine tamamladı. Doktorasını 1995 yılında, aynı kurumda “Simetrik Kriptosistemler için Türkiye Türkçesinin Kriptanalitik Ölçütleri” üzerine verdi. 1999 yılında doçent oldu. 1996 yılından beri İzmir Yüksek Teknoloji Enstitüsü Bilgisayar Mühendisliği bölümünde çalışmakta olup, bu kurumda Bilgi Sistemleri Stratejisi ve Güvenliği Laboratuvarı (<http://is3.iyte.edu.tr>) yöneticiliğini yapmaktadır. İlgi alanları; Kriptoloji, Sayılar Kuramı ve Bilgi Kuramlarıdır.

## OLASILIK YOĞUNLUĞU KAVRAMINDAKİ SÜPER MANTIK

Ülker ONBAŞLI<sup>1</sup>, Özden ASLAN<sup>2</sup>, Zeynep GÜVEN ÖZDEMİR<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Marmara Üniversitesi, Fizik Bölümü, Göztepe, 34722, İstanbul, 02163693828, 02163478783

[phonon@doruk.net.tr](mailto:phonon@doruk.net.tr)

<sup>2</sup>Marmara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Göztepe, 34722, İstanbul, 02163873629,

02163478783, [ozdenaslan@yahoo.com](mailto:ozdenaslan@yahoo.com)

<sup>3</sup>Yıldız Teknik Üniversitesi, Fizik Bölümü, Davutpaşa, 34010, İstanbul, 02125602487, 02163478783 [zguvenozdemir@yahoo.com](mailto:zguvenozdemir@yahoo.com)

### ÖZET

Yüksek sıcaklık süperiletken referans sistemlerinde sıcaklık parametresi ile sistemde geçerli olan olasılık yoğunluğu dağılım yasası da değişir. Meissner geçiş sıcaklığı üzerinde Fermi-Dirac dağılım yasasının geçerli olduğu sistem, sıcaklık azaltıldığında Bose-Einstein dağılım yasasına uyan hale gelir. Bu nedenle, ikinci dereceden faz geçişine sahip olan bu sistemler kritik kuantum kaos olarak nitelendirilebilecek bazı kritik geçiş noktalarına sahip bir yapı sergiler. Bu çalışmada, süper iletim süreci içinde, süperiletken koherent (eşfazlı) yapısındaki simetri kırılmaları ve kritik geçiş noktalarının olasılık yoğunluğu kavramıyla ilintisi irdelenecektir.

**Anahtar sözcükler:** Kritik Kuantum Kaos, Yüksek sıcaklık süperiletkenliğindeki mantık, İstatistiksel Dağılım Yasaları ve simetri kırılmaları.

## GİRİŞ

Mantık, gerçek olanı arayışta sürdürülen zihinsel işlemlerden hangilerinin doğru, hangilerinin yanlış yola çıktığını gösteren “ilim” olarak tanımlanmasından öte, olay ve olgulardaki tutarlılığın keşfedilmesinde çok önemli bir göstergedir.

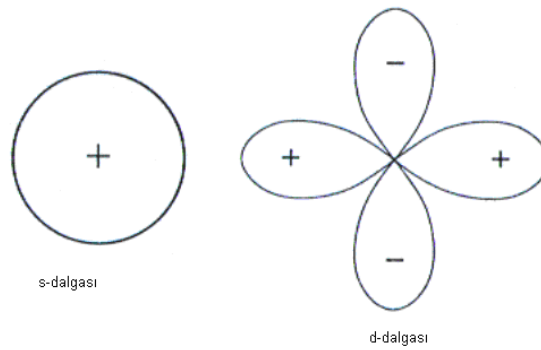
Tutarlılık ile ilgili her türlü bilgi, herhangi söz konusu bir sistemdeki, çoğunlukla uzaysal düzeni öğretebilir. Ancak, gerçekliğin araştırılmasında daima, ölçülen deney sonuçlarıyla ve bilinen diğer bütün olgularla yapılan analogiler yardımıyla ortaya çıkan sonuç ile “beklenen sonuç” arasında farklılık gözlemlendiğinde; bu farklılığı giderebilen en önemli unsur, sistemin uymakta olduğu üleşim fonksiyonu (partition function) yani sistemin işleyiş yasasının tespitiyle ilgilidir. Üleşim fonksiyonu yardımıyla bir sistemin hem uzaysal hem de zamanla ilgili uzun erimli düzen bilgisine ulaşılmış olunur. Durum yoğunluğunun bilinmesi bir sisteme, adeta kayıp bir bulmaca (puzzle) unsurunun ele geçtiği bir bilinebilirlik kazandırır. Bu bağlamda, olasılık yoğunluğu kavramı yani üleşim fonksiyonunun tersi (reciprocal) hakkında kesin bilgi sahibi olunabilen sistemlerden biri yüksek sıcaklık süperiletkenleridir. Bu makalede, bugüne kadar normal atmosferik basınçta elde edilmiş olan en yüksek Meissner kritik geçiş sıcaklığına sahip cıva bazlı bakır oksit katmanlı yüksek sıcaklık süperiletkeni [1,2] temel alınarak, süperiletken sistemin düzenini betimleyen olasılık yoğunluğu kavramındaki süper mantık ve süperiletken halde üleşim fonksiyonlarının birinden diğerine geçişi ifade edilecektir.

### DAĞILIM YASALARI BAĞLAMINDA SÜPERİLETKEN REFERANS SİSTEMLERİ

Süperiletken maddelerde, çok hassas ölçüm aygıtıyla (SQUID, Süperiletken Kuantum Girişim Aygıtı) yapılan magnetik duyunluk deneyleri sonucunda sistemde hangi dağılım yasasının geçerli olduğu güvenilir bir biçimde anlaşılabilmektedir. Yüksek sıcaklık referans sistemleri de, bazı quasi-periyodik (sanki periyodik) sistemler, iki etkileşen elektronlu sistemler ve fraktal matrislerde olduğu gibi “kritik kaos” olgusu sergilerler [3]. Deneysel verilerden açıkça anlaşılan odur ki; “kritik kaos” olarak nitelenen olguların nedeni, spin-spin ve spin-yörünge etkileşimleridir. Elektron

çifti (quasi parçacık-sanki parçacık) ve fonon (kuantize madde dalgası) arasındaki mükemmel harmoniye iyi bir örnek olan yüksek sıcaklık süperiletkenlerinde bu referans sisteminin, sadece sıcaklık parametresiyle değişen farklı üleşim fonksiyonlarının geçerli olduğu ve dolayısıyla sistemin farklı dağılım yasalarına uyduğu görülür.

Aynı zamanda, spin-sıfır süperiletkenliği sergileyen söz konusu süperiletken sistem, süperiletken hale gelmeden önce s-dalga simetrisine sahipken, kaotik geçişlerden biri sonucu d-dalga simetrisiyle betimlenir hale gelmektedir. Diğer kaotik geçiş sonucu, zamana ait simetrinin kırıldığı ve bütün bu olup bitenler sırasında uzay simetrisinin korunduğu anlaşılmaktadır [4]. Şekil 1.'de s-dalgası ve d-dalgasının şematik gösterimi verilmiştir.



**Şekil 1. s-dalgası ve d-dalgasının şematik gösterimi**

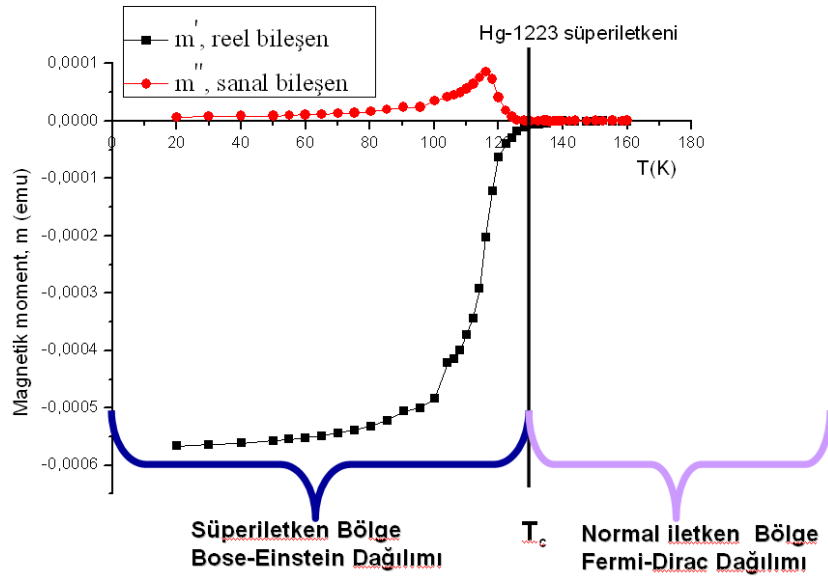
Ölçüm sisteminde çok zayıf bir magnetik alan sabit tutulmakta olduğundan söz konusu koherent (eşfazlı) sistemdeki bütün bu değişimlerden sorumlu unsur sadece “sıcaklık” parametresidir. Bilindiği gibi, elektrik akımını ısı kayıp olmadan iletebilen yüksek sıcaklık süperiletkenleri koherent olma temel özelliğine sahiptir. Yani bu maddelerde entropi göçü olmadığı için bu referans sistemini betimleyen bir  $\psi$  dalgasına ait çözümler enerji terimi içermez ancak,  $e^{i\varphi}$  gibi bir imajiner (sanal) faz terimi bulundurulur. Burada  $\varphi$  fazdır. Bu nedenle, böyle bir sistemde “sıcaklık” parametresi, üleşim fonksiyonu göz önüne alınmak koşuluyla zaman kavramıyla

tamamen örtüşür. Bu noktadan hareketle ve tüm safhalar tek tek ele alınarak, sistemin sıcaklığa bağlı olarak toplam serüvenini anlamak oldukça kolaylaşır.

### **SÜPERİLETKEN SİSTEMLERDE ÜLEŞİM FONKSİYONUNDAKİ GEÇİŞ**

Süperiletkenler, rölativistik sistemler oluşuyla Kuantum Mekaniğinin deney laboratuvarı durumundadırlar. Bundan da öte, bu sistemler özdeş parçacıkların dahi ayırt edilebileceği referans sistemlerini bize sağlarlar. Özdeş var olan ne demektir? Bilindiği gibi elektriksel yük, kütle, spin ve bu gibi gözlenebilir özellikleri aynı gibi algılanan parçacıklara(varolanlara, entity) özdeş varolan, özdeş parçacık denilmektedir.

Özdeş varolanların ayırt edilebildiği ve günümüz Yoğun Madde Fiziğinde, Kuantum Mekaniğinin laboratuvarı denilen süperiletken sistemlerin esas itibariyle, madde dalgası yani fononlarla elektronlar arası kuplaj sonucu ortaya çıkan ve “polaron” denilen elementer uyarılmalar bulunduran bir sistem olduğu anlaşılmıştır. Böyle bir sistemin spini bir tam sayıdır, söz konusu sistemde toplam spin sıfırdır ve Bose-Einstein (B.E.) dağılım yasası geçerlidir. Yani sistemi teşkil eden tüm unsurlar tek bir enerji durumunda bulunurlar. Diğer taraftan, fonon elektron etkileşimindeki harmoni söz konusu olamadan önce ise aynı sistemin uyduğu yasa Fermi-Dirac (F.D.) dağılımıdır. Şekil 2’de manyetik duyunluk sıcaklık grafiği üzerinde B.E. ve F.D. dağılımları sıcaklık eksenini temel alınarak gösterilmiştir.



**Şekil 2. 1 Gauss'luk alternatif magnetik alan altında bakır oksit katmanlı yüksek sıcaklık süperiletkenlerinde magnetik moment-sıcaklık değişimleri. Uygulanan alan 1 Gauss olduğu için, bu eğri aynı zamanda magnetik duyguluk-sıcaklık değişimi olarak da ele alınabilir. Bu deneysel veri yardımıyla farklı dağılım kanunlarını betimleyen bölgelerin şematik gösterimi.**

Söz konusu F.D. dağılımı,  $f(\varepsilon) = 1 / \exp[(\varepsilon - \mu) / k_B T] + 1$  denklemiyle verilir. Burada, sırasıyla,  $\mu$ , kimyasal potansiyel;  $k_B$ , Boltzman sabiti ve  $T$  sıcaklıktır. Bilindiği gibi F.D. istatistiğinde, parçacıklar anti-simetrik dalga fonksiyonlarına sahip olduklarından aynı kuantum durumunda tüm kuantum sayıları aynı olan birden fazla parçacık olamaz.

Simetrik dalga fonksiyonlarıyla tanımlanan sistemlerde bir kuantum durumunu işgal eden parçacık sayısında hiçbir sınırlama olmaz. Parçacıkların birbirinden ayırt edilemediği böyle sistemler B.E. istatistiğine uyarlar. B.E. dağılımı,

$$f(\varepsilon) = 1 / \exp[(\varepsilon - \mu) / k_B T] - 1 \text{ denklemiyle verilir.}$$

Süperiletkenlerde kritik geçiş sıcaklığında ilgili dağılım fonksiyonları arasında bir geçiş söz konusudur. Bu geçişin üleşim fonksiyonları bakımından tasviri ise Şekil 3’de verilmektedir. Burada  $c = (\varepsilon - \mu) / k_B T$  kısaltması yapılmıştır.

|                                                                                                  |                                                           |                             |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------|-----------------------------|
| $-1 + e^c$                                                                                       | $-1 + e^c = 0$                                            | $1 + e^c$                   |
| <i>Bose-Einstein Dağılımı</i>                                                                    | <i>Kritik Geçiş Noktası</i>                               | <i>Fermi-Dirac Dağılımı</i> |
| $T < T_c$                                                                                        | $T_c$                                                     | $T > T_c$                   |
| $L=2$                                                                                            | $e^0 = 1 \rightarrow \frac{\varepsilon - \mu}{k_B T} = 0$ | $L=0$                       |
| $S=0$                                                                                            |                                                           | $S=1/2$                     |
| <i>Sistemin toplam enerjisi (<math>\varepsilon</math>)=Kimyasal Potansiyel(<math>\mu</math>)</i> |                                                           |                             |

Şekil 3. Meissner kritik geçiş sıcaklığı  $T_c$ ’de ve civarında üleşim fonksiyonlarının temsili gösterimi. Burada, S spin kuantum sayısını, L ise açısal momentum kuantum sayısını göstermektedir.  $\mu$  ve  $\varepsilon$  ise sırasıyla kimyasal potansiyel ve elektronların enerjilerini temsil etmektedir.

F.D. ve B.E. dağılımlarına ait denklemlerdeki eksponansiyel içindeki terimi ele alıp incelediğimiz zaman sisteme ait kimyasal potansiyel hakkında bilgi elde edebiliriz. Sıcaklık kritik geçiş sıcaklığına geldiğinde, sisteme ait kimyasal potansiyel  $\mu$  ’nün mutlak değerinin elektronlara ait olan enerji değeri,  $\varepsilon$  ’na eşit hale geldiği saptanmaktadır. Ayrıca bu sıcaklıkta dağılım fonksiyonu da sonsuza ıraksamaktadır. Bu geçiş sıcaklığının altında ise artık sistem B.E. dağılımına uyan duruma gelmektedir. Bu süreç içinde ortaya çıkan değişimler  $+1, -1$  aralığında incelendiğinde ortaya çıkan durum,  $-1$  değerine bir eksponansiyel terimin önce ilavesi, bir sıfır noktasından geçiş ve aynı eksponansiyel terimin  $+1$ ’e ilavesi şeklinde matematiksel olarak ifade edilebilir.

## KLASİK ELEKROMAGNETİK TEORİDEN KUANTUM ELEKTRODİNAMİĞİNE GEÇİŞ ve ÖTESİ

Bilindiği üzere, Kuantum Mekaniğinde ele alınan bir sistem uygun bir  $\psi$  dalga fonksiyonu ile betimlenir. Zamana bağlı çözümler için bu  $\psi$  'nin bir  $\phi$  (faz çarpanı) ile çarpılması gerekir. Her bir serbest parçacık Hamiltoniyen işlemcisiyle betimlenir. Hem Hamiltoniyen işlemcisinde hem de Schrödinger dalga denkleminde elektromagnetik alanlar,  $\vec{E}$  ve  $\vec{B}$  (elektrik ve manyetik vektörler) ile değil; fakat  $\Phi$  ve  $\vec{A}$  sırasıyla skaler ve vektör potansiyelleriyle temsil edilirler.

Fizikte mevcut ayar dönüşümleri altında değişmez kalan unsur sadece  $\exp(i\Delta\phi)$  faz çarpanıdır. Sisteme ait fazın zamana göre değişimin, ışık hızının tersinin ( $1/c$ ) çarpımıyla ve bunun üç boyutlu diferansiyel gösterimi göz önüne alınarak ve bu terim sistemi betimleyen vektör potansiyeline ekleyerek  $\psi$  nin zamanda açılımı bulunur. Aynı işlem skaler  $\Phi$  potansiyelinden çıkarma işlemi yapılarak  $\Phi'$  gibi, o zaman dilimine ait skaler potansiyel elde edilir.

$$(1) \quad \Phi \rightarrow \Phi' = \Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t}$$

$$(2) \quad \vec{A} \rightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} f$$

Denklem (2)'de verilen  $\vec{\nabla} f$  fazın zamana göre gradyentini tarif ederken;  $f$  ise  $\phi_0 = 4.136 \times 10^{-7} \text{ gauss.cm}^2$  ile tanımlı magnetik akı kuantı boyutunda bir fonksiyondur.

$\Phi$  ve  $\Phi'$  dalga fonksiyonları aynı var oluş durumunda olmalarına rağmen yani aynı olasılık yoğunluğu ile betimlenmelerine rağmen,  $f$  nin tek değerlikli olarak betimlenemediği durumlarda klasik karşılıkları olmayan önemli kuantum mekaniksel etkiler söz konusu olur. Bunlardan biri literatürde Ahronov-Bohm(A.B.) olayı diğeri de süperiletkenlerdeki akı kuantumlanması olayıdır. Konumuz süperiletkenlerle ilgili anlatımlar olduğu için, genel anlamda bir  $\psi$  dalgasıyla betimlenen bir sistemde ortaya çıkan olasılıklarla ilgili önemli noktalara kısaca değinelim.

Bir sistemde oluşan dalgaların fazlarına göre süper pozisyon ilkesine uygun olarak, dalgalar birbirlerini kuvvetlendirebilir veya yok edebilir( söndürülür). Bu ilke fiziğin her durumunda geçerli ilkesidir. Bu bağlamda ayırt edilebilir durumlar (varoluş düzeyi, state) ya da ayırt edilemeyen yani entangled stateler betimlenir. Durum yoğunluğu yani bir “state” için işgal edebilme olasılığı yani olasılık yoğunluğu pozitif ise bu “state” var olan halden bahsedilebilir.

Evreni kaplayan ısı rezervuarı Kuantum Mekaniği için gürültü kaynağıdır. Dalgalar arasındaki eş uyum yani harmoniyi bozar. Yani saf olan “state” leri karışık duruma getirir. Böylece bilgi yükseltgenemeyebilir.

Süperiletkenlerde ise özellikle sıvı helyum sıcaklığı (4,2 K) gibi düşük sıcaklıklarda çalışıldığında, var olan düzeyler net olarak ayırt edilebilir. Böylece, dolaşık (entangled) düzey hali söz konusu olmaz. Ayrıca, bu sistemi betimleyen dalga fonksiyonu yani düzen parametresi kompleks değerliktir. Bundan dolayı, s-dalga düzen parametresinin betimlediği izotropik kompleks bir uzay göz önüne alınmalıdır. Bununla birlikte, anizotropik d-dalga süperiletkenliği görülen bakır oksit katmanlı cıva bazlı sistemlerde, sistemin bütününde tezahür eden plazma rezonans frekansı sayesinde, sistem aslında anizotropik olmasına rağmen, izotropik kompleks faz uzayında oluşan durumun aynısı görülmektedir. Sistemde oluşan rezonans sayesinde yüksek sıcaklık süperiletkenleri üç boyutlu Bose-Einstein yoğunlaşması sergilemektedirler [5]. Bose-Einstein yoğunlaşması süperiletkenlerde olduğu kadar spin-1 süperiletkenlik özelliğine sahip nötron yıldızlarında da [6] gözlemlenmiştir [7]. Bu sistemlerin ortak özellikleri ise aynı kuantum düzeyinde bulunmaları (unity) ve yüksek mertebeden uzun erimli düzene sahip olmalarıdır. Bu özellikler sayesinde çok farklı ölçeklerdeki söz konusu sistemlerde ortak olan eşfazlılık (coherence) olgusu ve rezonans hadisesinin birlikte mevcudiyetidir [7].

## SONUÇ

Olasılık yoğunluğu kavramı, olabilirlik denilen, evrene ait bilgi programını içeren ve bu programın açılımlarıyla ortaya çıkan olanakları üleşim fonksiyonu kavramı ile

matematikselleştirerek elde edilir. Olabilirlik unsuru ise, bütünsel ait bir bilgi olup, çoğunlukla insan bilgisi dışında olduğu söylenir [8,9]. Bu konu çeşitli görüşlerde, zaman kavramının ve/veya olay ve olgulardaki başlangıç koşullarının tam olarak bilinmemesi olarak ifade edilmektedir. Olabilirlik konusunda çeşitli disiplinlerin mutabakatta olduğu nokta ise, evrende kuantize (kesikli) bir yapının mevcut olduğu düşüncesidir. Kesikli yani katmanlı bir yapı olgusu üzerinde düşünüldüğünde, olay ve olguları anlama süreçlerinde de aynı kuantize yapıya rastlama olasılığının yüksek olduğunu hatırlamak gerekir. Mantıksal süreçlerin getirdiği noktada, örneğin zar atan bir kumarbaza ait eylemin, kartezyen uzayda olduğu ve o kişi tarafından da o düzeyde algılandığını söylemek gerekir. Ancak bu kişi, tarihsel süreçten bilindiği gibi, bir doğa bilimci filozofu olan Pascal'a başvurarak daha sıkça kazanabilmek üzere yardım istediğinde, Pascal için beş duyu ve çok muhtemelen duygu düzeyindeki bir algı ve anlama olgusundan farklı olarak, zihin düzeyinde işlev gördüğünü söylemek çok kolaylıkla olası olur. Zihin (mind) ile ilgili bir faaliyette söz konusu referans sistemi momentum yani k- dalga uzayıdır. Yeni fikirlerin üretilebilmesi ancak bu düzeydeki biliş ile mümkün olabildiğinden; bu biliş düzeyine ait olasılık yoğunluğu fonksiyonu üzerine düşünüldüğünde burada geçerli olan yasanın Bose-Einstein dağılım kanununa uyduğu anlaşılır [10]. Boltzmann dağılım yasalarından Bose-Einstein dağılımına geçişi insan beyni doğal süreçleriyle yapmaktadır. Bu nedenle asıl prim, süper mantığı üreten beyne verilmelidir.

### Kaynakça

- [1] Onbaşı, U, Wang, Y.T, Naziripour, A., Tello, R., Kiehl, W., Hermann, A.M. (1996), "Transport Properties of High-Tc Mercury Cuprates", *Phys. Stat.Sol (b)*, 194, 371-382.
- [2] Yahoo Süperiletkenlik tarihçesi <http://superconductors.org/History.htm>
- [3] Evangelou, S.N. (2001), "Critical Quantum Chaos", *Physica B*, 296, 62-65.
- [4] Aslan, Ö., Onbaşı, Ü. "Rölativistik Sistemlerde Kaos ve Simetri", *Journal of İstanbul Kültür University*, 2006/3,161-166.
- [5] Özdemir, Z.G., Aslan, Ö., Onbaşı, Ü. (2007) "Calculation of Microwave Plasma Oscillations in High Temperature Superconductors", 377-382 *Vibration Problems ICOVP 2005 Springer Proceedings in Physics vol 111*, eds., E. İnan, A. Kırış, The Netherlands, Springer.

- [6]Schmitt A. (2003), “Spin-one color superconductivity in neutron stars” 321-328, *Structure and Dynamics of elementary matter NATO Sciences Series II. Mathematics, Physics and Chemistry vol 166*, eds., W. Grainer, M.G. Itkis, J. Reinhardt, M.C. Güçlü, Boston, Kluwer Academic Publishers.
- [7] Shelton C., (1999) “*Quantum Leap 7 Skills for Workplace ReCreation*”, USA, Butterworth-Heinemann Elsevier.
- [8] İnam, A., (2006) “Olasılıkla Olmak”, Mantık, Matematik ve Felsefe IV. Ulusal Sempozyumu, Olasılık.
- [9] Routledge Encyclopedia of Philosophy, (1998) First Edition, London&NewYork, Routledge.
- [10] Weiss, H., Weiss, V., (2003). “The golden mean as clock cycle of brain waves” *Chaos, Solitons, and Fractals*, 18, 643-652.

## YAZARLARIN ÖZGEÇMİŞİ

### Ülker ONBAŞLI

Lisans eğitimini İstanbul Üniversitesi, Fen Fakültesi, Fizik Bölümünde 1969 yılında tamamladı. Aynı üniversitede yüksek lisan eğitimini yarı iletkenler fiziğinde 1974 yılında tamamladı. Doktorasını 1983 yılında Belçika Leuven Katolik Üniversitesi ve İstanbul Üniversitesi de Yarı iletkenler Fiziği üzerine yapmış olduğu çalışmalarla tamamladı. Doçentliğini 1988 yılında Marmara Üniversitesinde yoğun madde fiziği üzerinde aldı. 1995 yılından beri aynı üniversitede profesör olarak çalışmakta olup, süperiletkenler, yarı iletkenler ve yoğun madde fiziği üzerine ulusal ve uluslararası dergilerde basılmış bir çok eseri bulunmaktadır..

### Özden ASLAN

Özden ASLAN Marmara Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Fizik Bölümünden 1998 yılında mezun oldu. Aynı sene, İstanbul Teknik Üniversitesi, Enerji Enstitüsü, Nükleer Araştırmalar Anabilim dalında yüksek lisansa başladı ve 2002 yılında mezun oldu. Yüksek lisansı bitirdiği sene Marmara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsünde

doktora öğrenimine başladı. Şu an doktora tez aşamasında olan ASLAN, Yoğun Madde Fiziği, Katıhal Fiziği ve özellikle yüksek sıcaklık süperiletkenleri alanlarındaki çalışmalarına devam etmektedir.

### **Zeynep GÜVEN ÖZDEMİR**

Zeynep GÜVEN ÖZDEMİR Yıldız Teknik Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Fizik Bölümünden 1998 yılında mezun oldu. Aynı sene, Yıldız Teknik Üniversitesi, Fizik Anabilim dalında yüksek lisansa başladı, 2000 yılında Yıldız Teknik Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Fizik Bölümü'nde araştırma görevlisi olarak çalışmaya başladı ve halen bu görevini sürdürmektedir. 2001 yılında fizik yüksek lisansını tamamlayarak, aynı yıl Marmara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsünde doktora öğrenimine başladı. Şu an doktora tez aşamasında olan GÜVEN ÖZDEMİR, Yoğun Madde Fiziği, Katıhal Fiziği ve özellikle yüksek sıcaklık süperiletkenliği alanlarında, çalışmalarına devam etmektedir





1903-1987

## DAHİ MATEMATİKÇİ ANDREY N. KOLMOGOROV

Abbas AZİMLİ<sup>1</sup> ve Gülder KEMALBAY<sup>2</sup>

Yıldız Teknik Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi,  
İstatistik Bölümü, Davutpaşa Kampüsü, 34210 Esenler/İstanbul,  
Tel: (212) 449 17 09, Faks: (212) 449 17 06

<sup>1</sup>E-posta: [azimov@yildiz.edu.tr](mailto:azimov@yildiz.edu.tr), <sup>2</sup>E-posta: [kemalbay@yildiz.edu.tr](mailto:kemalbay@yildiz.edu.tr)

### ÖZET

---

---

*“Newton – Euler – Gauss – Poincare – Kolmogorov, muasır matematiğin temellerinden günümüze kadar yer alan en önemli beş bilim adamıdır.”*

*Vladimir Arnold\**

---

---

20. y.y.'ın en büyük matematikçilerinden biri olarak kabul edilen Andrey Nikolaevich Kolmogorov 25 Nisan 1903'te Tambov'da doğdu ve 20 Ekim 1987'de Moskova'da öldü. Kolmogorov, matematikte evrensel bir kişiliktir. Bu anlamda onun yaşadığı zamanda ona eş değer bir matematikçi daha yoktur. Onun, matematiğin birçok alanında yapmış olduğu temel çalışmaları vardır. Bu çalışmamızda, O'nun çocukluk döneminden başlayarak matematikçi olma fikrinin gelişimine, üniversite öğrencilik yıllarından bilimsel kariyerine uzanan hayatına, bir dekan olarak bile öğrencileri ile sürdürdüğü iletişimine, bilimsel faaliyetleri arasında bazı temel çalışmalarına, olasılık teorisinin gelişimine yapmış olduğu eşsiz katkıya ve hayat felsefesi ile manevi dünyası hakkında bilgilere değindik.

**Anahtar Sözcükler :** Olasılığın Aksiyomatiği, D. Hilbert'in 13. Problemi.

---

\* *Şu anda dünya sıralamasında ilk beşte olan matematikçidir.*

## GİRİŞ

1903 yılı Nisan ayında, Yaroslav vilayetinde toprak ağası olan Yakov Kolmogorov'un kızı, Kırım'dan dönerken Tambov'da bir erkek çocuk dünyaya getirir. Anne, trajik olarak doğum anında hayatını kaybeder. Daha on günlük olan bebek, annesinin babasının evine getirilir. Adını Andrey koyarlar. Annesinin kız kardeşi Vera Yakovlena, Andrey'i evlatlığa kabul eder. Andrey'in babası ise 1919 yılında bir iç savaşta hayatını kaybeder. Kolmogorov soy ismi de Andrey'in babasından değil, annesinin babasından gelmektedir. Andrey'in yetişmesinde en önemli role sahip olan teyzeleri ise oldukça bilgili, özgür düşünen, yüksek sosyal ideallere sahip olan insanlardı.

Andrey'in teyzesinin evinde farklı yaşlardaki çocuklar için okul kurulmuştu. Hatta okulun bir "dergisi" bile vardı. Bu dergide 6 yaşındaki Andrey'in ilk "makalesi" yayınlandı:

$$1 = 1^2, 1+3=2^2, 1+3+5=3^2, 1+3+5+7=4^2, \dots$$



Şekil 1. Teyzesi ile

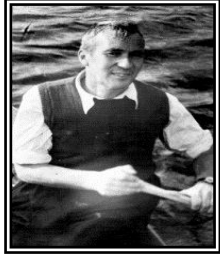
### Birlikte

1910 yılında Andrey, tahsiline devam etmek için teyzesi ile birlikte Moskova'ya geldi ve demokratik aydınlar topluluğu tarafından kurulmuş olan özel bir okula başladı. Okulda ders veren öğretmenlerin çoğu bilimi seven, araştırmaya meraklı insanlardı. Bazıları üniversitede öğretim üyesiydi. Kolmogorov matematikte sınıf birincisiydi, ancak ciddi olarak ilgilendiği derslerin başında önce biyoloji sonra Rus tarihi gelmekteydi. O, 11–12 yaşlarındayken güney okyanuslarda yer alan ıssız adalar hakkında bilgi toplamak için çok emek verdi, zira muhtelif ülkelerden insanları bu

adalarda bir araya getirerek ideal bir devlet kurmayı düşünürdü. Hatta bu devletin anayasasını bile hazırlamıştı.

Matematikçi olma fikri yaklaşık olarak 16 yaşında ortaya çıktı. Artık yavaş yavaş yetenekleri kendini göstermeye başlamıştı. Andrey zor problemleri çözebiliyordu.

O, aynı zamanda hem Moskova Devlet Üniversitesi'nin Matematik Fakültesi'nde hem de Mendeleyev Kimya-Teknoloji Enstitüsü'nün Metalürji Fakültesi'nde öğrenim görmeye başladı. O dönemde Kolmogorov'un yaşadığı zorlukları kendi cümleleri ile hatırlayalım:



*“Birinci sınıfın tüm sınavlarını ilk ayda vermekle her ay 16 kg. ekmek ve 1 kg. yağ alma hakkını kazandım. Elbisem vardı, ancak avakkabılarımı kendim tahta tabandan*

Şekil 2. Gençlik Yıllarında

Üniversite döneminin ilk öğrencilik yıllarında Kolmogorov, matematik dışında ciddi olarak eski Rus tarihi ile ilgilenirdi. Kolmogorov'un tarih alanındaki incelemeleri yayınlanmamıştı; ancak son zamanlarda bu çalışmalar bulunarak yayınlandı ve önsözde çok ünlü bir tarihçi şöyle yazmaktaydı:

*“Tarih bilimi dahi bir araştırmacısını yitirmiştir.”*

1925 yılında Andrey Kolmogorov, üniversiteyi bitirdikten sonra N. N. Luzin'in doktora öğrencisi oldu. 1925'te henüz üniversite öğrencisi iken sekiz makalesinin yayınlanması dikkat değer bir olaydır. Aynı yıl içinde, Kolmogorov için dönüm noktası sayılacak, olasılık hakkındaki ilk tebliği ortaya çıktı. Bu tebliğ, Khinchin ile birlikte yayımladığı, stokastik hesaplamalar ve martingale eşitsizliklerinde esas olan rasgele değişkenlerin kısmi toplamlarının eşitsizliği üzerine sonuçlar veren “Üç Seri Teoremi” idi. Moskova'da matematik ekolünün kurucusu olan N. N. Luzin, o dönemde matematikte elde ettiği önemli sonuçları ile artık herkes tarafından tanınmaya

başlamıştı. Luzin'in öğrencileri ondan sadece matematik bilimi öğrenmekle kalmaz, aynı zamanda hem gerçek bir bilim insanının hem de üniversite profesörünün nasıl olması gerektiğini öğrenirdiler. Kolmogorov, Luzin'in öğrencisi olduğu dönemlerde onun ilgisini topolojik problemlere çekmeye çalışan P. S. Urysohn ile görüşüyordu. Kolmogorov'un Luzin'in çalışma alanının dışında yer alan fonksiyonlar teorisi alanında neticeler elde etmesi üzerine, Urysohn, O'nun araştırma alanına daha yakın olan P. S. Alexandrov ile tanışmasını sağladı. Böylece elli küsur yılı aşan dostluğun temelini ilk adımı atılmış oldu.

1929 yılında doktora öğrenciliği artık geride kalmakla beraber Kolmogorov'un yaklaşık olarak yirmi makalesi yayınlandı. 1922 yılında yayınlanmış olan makalelerinden biri çok üstün değere sahipti: *"Trigonometrik seriler alanının en ünlü neticesi-hemen hemen her yerde ırsaksak olan Fourier-Lebesgue serisi örneğinin bulunması"*. Bundan başka ilk yayınladığı makaleleri olasılık ve matematiksel mantık alanları ile ilgiliydi.

Olasılık teorisine olan ilgisi 1924 yılında ortaya çıktı.Bu alandaki ilk adımını A. Y. Khinchin ile birlikte attı. 1928'te *"Güçlü Büyük Sayılar Yasası"* için gerek ve yeter koşul bulmayı başardı ve bağımsız rasgele değişkenlerin toplamı için *"Bütünleşik Logaritma Yasası"* nı geliştirdi. 1929 yılında basılan *"Genel Ölçü Teorisi ve Olasılıklar Hesabı"* kitabı ile ölçü teorisinin temelleri üzerine kurmuş olduğu olasılık teorisinin aksiyomatik yapısı hakkında ilk taslağını öne sürmüştü. İlk kez, E Borel'in 1909 yılında önemişti olduğu ve Lomnicki'nin 1923 yılında geliştirdiği olasılık teorisi 1933 yılında Kolmogorov'un çalışmaları ile oldukça başarılı bir şekil aldı. 1933 yılında basılan *"Olasılık Hesabının Kuruluşu"* adlı eseri, yalnızca olasılık teorisinin matematiğin bir branşı olarak gelişiminde yeni bir aşama belirlemekle kalmadı, bunun yanında stokastik süreçler teorisinin yaratılışı için gerekli temelleri vermişti. Kolmogorov'un olasılık ve istatistik teorisinde yayınlanan birçok makalesi, onu bu disiplinin önde gelen temsilcisi olarak tanınmasını sağladı. Kolmogorov'un sayısız teorik gelişmeye öncülük eden olasılık ve istatistik üzerine olan fikirleri, günümüzde fiziksel bilimler başta olmak üzere pek çok uygulamalara da önderlik etmektedir.

1931 yılında Andrey Kolmogorov, Moskova Devlet Üniversitesi'nin profesörü, sonraki iki yıl içinde de Moskova Devlet Üniversitesi Matematik Enstitüsü'nün başkanı oldu.

1935 yılında Moskova Devlet Üniversitesi'nde ve V.A. Steklov Matematik Enstitüsü'nde Olasılık bölümünü kurdu. 1939 yılında Sovyet Bilimler Akademisi'nin asıl üyesi seçildi.

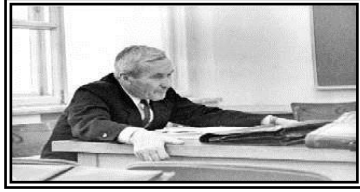
1941 yılında Sovyetler ile Almanya iç savaşa girmesi ile Matematik Enstitüsü doğuda Kazan'a taşındı. Bir müddet sonra Kolmogorov Moskova'ya döndü ve savunma içerikli alanda çalışmalara başlayarak atış teorisi ile ilgilendi. Savaşın ilk yıllarında yazdığı makaleleri ile türbülans teorisinin temellerini attı.

Kolmogorov için 1953–1963 yılları oldukça verimli geçti. Bu süre zarfında D. Hilbert'in 13. problemini Vladimir Arnold ile birlikte çözdü. Ergodik teori, stokastik süreçler, dinamik sistemler teorisi, fonksiyonel analiz, matematiksel mantık, ayrık matematik, sibernetik teorisi, enformasyon teorisi vs. alanlarında çok üstün neticeler elde etti.

1954–1958 yılları arasında Moskova Devlet Üniversitesi Matematik Fakültesi'nde dekanlık görevi yaptı. Kolmogorov, başarılı matematik öğrencileri içinde rejime karşı özgürce tavır takınanların üniversiteden atılmalarını engellemiş ve bir dekan olarak koruduğu öğrencilerinden bazıları ileride önemli bilim adamı olmuştur. 60'lı yılların başında Kolmogorov, ülkede istatistik araştırmalarının seviyesini yükseltmek için Moskova Devlet Üniversitesi Matematik Fakültesi'ne bağlı olarak Olasılık ve İstatistik Yöntemleri Merkezi'ni kurdu. Bu merkezde hem teorik hem de olasılık ve istatistik yöntemlerin çok çeşitli alanlarında uygulamalar üzerine çalışıyorlardı. Bu uygulama alanlarından biri ise şiir teorisi ve dil bilimidir. Kolmogorov'un şiir teorisi ve dil bilimine ait onlarca makalesi yayınlanmıştı.

60'lı yılların ortasından itibaren Kolmogorov zamanının çoğunu Matematik eğitiminin reformuna ayırmıştır. 1963 yılında Moskova'da yetenekli öğrenciler için

fizik-matematik alanında yatılı ihtisas okulunu açtı. Hem Kolmogorov hem de öğrencileri bu okulda ders veriyorlardı. 1970 yılında gençler için “Kuantum” fizik-matematik dergisi kurdu. Kolmogorov’un okula olan bu ilgisi tesadüf değildi. Kolmogorov, okula olan ilgisini şu sözleri ile dile getirmektedir:



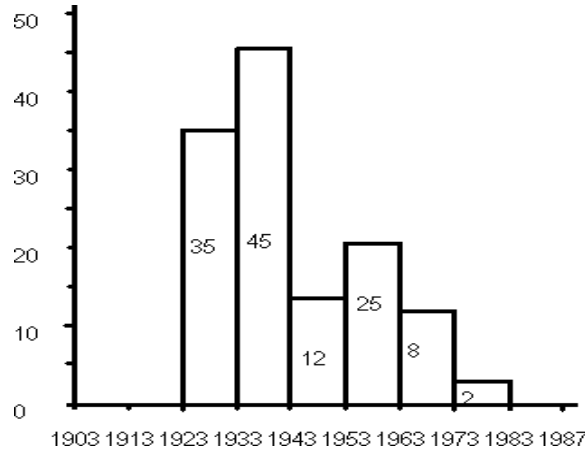
*“Geçmişte uzun bir müddet boyunca böyle bir okulun müdürü olmak arzusunda olmuştum”*

83. doğum gününü kutlamaya gelen öğrencilerine Kolmogorov şöyle seslenmiştir:

*“Benim bilimsel kariyerim sona ermiştir. Üzücü de olsa, bu kaçınılmazdır. Son yıllarda benim esas faaliyetim, okulun reformu ile ilgili oldu. Bilime hevesli gençler için kitap yazarak, onlara daha çok faydam olacağını düşünüyorum.”*



Kolmogorov’un ilk makalesi 1923, son makalesi ise 1983 yılında yayınlanmıştır.



**Şekil 4. Kolmogorov'un Yıllara Göre Yayınlanan Makale Adedi**

Kolmogorov, matematikte evrensel bir kişiliktir. 20. yüzyılda ise evrensel olmak kolay değildir. 19. yüzyıl başında matematik birçok alt alanlara ayrıldı ve böylece matematiğin bir alanında uzmanlaşmak kolay hale geldi. Bir alanın dışına çıkmadan tanınır bir bilim insanı olmak mümkündü. 20. yüzyılda bu eğilim daha da kuvvetlendi. Örneğin; geometrici N. I. Lobachevsky, cebirci A. Keli, kümeler teorisinin yaratıcısı G. Cantor vs.

Andrey Kolmogorov'un matematiğin birçok alanında yapmış olduğu temel çalışmaları vardır ve bu anlamda onun yaşadığı zamanda ona eş değer bir matematikçi daha yoktur. Kolmogorov'un trigonometri ve ortogonal seriler, ölçü ve integral teorisi, matematiksel mantık, yaklaşım teorisi, geometri, topoloji, fonksiyonel analiz, diferansiyel denklemler ve dinamik sistemler, olasılık teorisi, matematiksel istatistik, enformasyon teorisi, matematik tarihi, mekanik, biyoloji, jeoloji, atış teorisi, şiir teorisi ve otomatlar teorisi alanlarında yapmış olduğu temel çalışmaları vardır. Şimdi bu çalışmalardan bazıları ile ilgilenelim:

Kolmogorov'un ilk önemli eseri kümeler teorisine aittir. Bu çalışmasını hocası P. Aleksandrov'dan aldığı dersin etkisi ile gerçekleştirmiştir. Daha sonra ise önceden de değindiğimiz gibi hemen hemen her yerde ıraksak olan Fourier-Lebesgue

serisi örneğinin bulunması ile 19 yaşındaki Kolmogorov tüm dünya çapında üne kavuşur. 30'lu yılların başında ise olasılık teorisine ait iki temel eseri – “*Olasılık Teorisinin Analitik Yöntemleri*” ve “*Olasılık Teorisinin Temel Kavramları*” – yayımlandı. 30'lu yılların sonunda ise Kolmogorov, türbülans alanında yapmış olduğu çalışmaları ile bir çok uzmanın fikrince eğer takdim olunsaydı Nobel Ödülü alabilirdi.

1950'li yıllarda Kolmogorov, dinamik sistemlerde ortaya atılan ve daha sonraki yıllarda öğrencisi V. Arnold ve Amerikan matematikçi J. Moser tarafından geliştirildiği için K.A.M teori olarak adlandırılan teorisinin temellerini atmıştı ve bu yöntemin uygulanması sonucu teorik astronominin ve klasik mekaniğin en zor ve derin problemi olan gezegenler sistemin kararlılığı problemi çözülmüş olundu. Bu problem ile İ. Newton, P. Laplace ve H. Poincare uğraşmışlardı. Prensip olarak ise tüm gezegenler dizgesinin kararsız olduğu ve tüm gezegenlerin eninde sonunda esas ışık veren gök cismi üzerine çökeceği kabul edilmişti, ancak Kolmogorov ve O'nun takipçilerinin çalışmaları sonucu prensip olarak kabul edilenlerin doğru olmadığı, kararlı sistemlerin de var olduğu gösterildi.

1900 yılında Paris'te matematikçilerin dünya kongresinde, Alman matematikçi D. Hilbert 20. yüzyılda çözülmesi önemli olan problemleri ileri sürdü. Bu problemler arasında 13. problem şöyleydi: Hilbert üç değişkenli sürekli bir fonksiyonun iki değişkenli sürekli fonksiyonların bileşkesi olarak göstermenin mümkün olmadığını ispat etmeyi teklif etti.

Kolmogorov 1950'lerde D. Hilbert'in 13. problemini “*hemen hemen*” çözmüştür.

**Örnek:**

$w = w(x, y, z, t) = xy + z^t$  sürekli fonksiyonu verilsin.

$u = u(x, y) = xy$ ,  $v = v(z, t) = z^t$  ve  $h = h(u, v) = u + v$  olsun. O halde,  $w = h(u(x, y), v(z, t))$  olur.

Yani; sürekli, dört değişkenli olan  $w$  fonksiyonu sürekli, iki değişkenli fonksiyonların bileşkesi olarak gösterilmiştir.

13. problemin çözümü üç aşamada gerçekleşmiştir:

1. Kolmogorov her  $n$  değişkenli fonksiyonun, üç değişkenli sürekli fonksiyonların bileşkesi olarak gösterilebileceğini ispat eder.
2. Üniversitenin üçüncü sınıf öğrencisi olan Vladimir Arnold ise her üç değişkenli sürekli fonksiyonun, iki değişkenli sürekli fonksiyonların bileşkesi olarak gösterilebileceğini ispat eder.

Böylece, her  $n$  değişkenli sürekli fonksiyon iki değişkenli sürekli fonksiyonların bileşkesi olarak gösterilebileceği sonucu ortaya çıkmaktadır; yani problemin çözümü Hilbert'in düşündüğü gibi değildir.
3. Kolmogorov, her sürekli fonksiyonu, tek değişkenli sürekli fonksiyonların ve  $s(x,y) = x + y$  iki değişkenli fonksiyonun bileşkesi şeklinde göstermenin mümkün olduğunu ispat etmiştir.

Kolmogorov, Hilbert'in 13. probleminin çözümünü tüm matematik çalışmaları arasında teknik açıdan en zor çalışması olarak kabul etmektedir.

## OLASILIK TEORİSİ

1945 yılında N. N. Luzin, Kolmogorov'a yazdığı mektupta şöyle der:

*"Olasılık teorisinden uzak durun. Bu alanda yapmış olduğunuz temel işler olduğunu biliyorum; ancak olasılık teorisi size layık değildir, onun kaynakları kuşkuludur... ve bu alanda çalışanlara olumsuz bir etkisi vardır. Size yüksek ruh bahsedilmiş ve bu yüzden istiyorum ki, siz onu çok az insanın yapabileceği işler için koruyasınız."*

Cevap mektubunda Kolmogorov, çalıştığı üç alan – olasılık teorisi, dinamik sistemler ve matematiksel mantık – hakkında yazarak der ki:

*"Dinamik sistemlerde her şey önceden belirliken olasılık teorisinde ise tesadüfi olduğundan bu iki problem birbirlerinden çok farklı görünmektedir; ancak anlaşılacağı üzere bu teoriler arasında şöyle bir bağlantı vardır: deterministik fakat karmaşık olan sistemler tesadüfi davranır, tesadüfler ise ciddi determinist"*

*değerlendirmelere tabidir ve bu iki teoriyi bir birine bağlayan köprü ise matematiksel mantıktır.”*

Olasılık teorisinin tarihi oldukça eskiye dayanmaktadır. Olasılığın ilk tanımlarının ortaya çıkışında çeşitli talih oyunları, kumar vs. esas kaynak olmuştur. Luca Pacioli (1445–1514) olasılık problemini (yanlış ta olsa) çözmüştür. G. Cardano ile G. Galileo de olasılık problemleri ile meşgul olmuşlardır.

Olasılık teorisinin bir bilim alanı olarak görülmesi, 1654 yılında B. Pascal ile P. Fermat arasındaki mektuplaşma ile başlamıştır. Mektuplaşmaya vesile olan olay ise B. Pascal'ın bir dostunun ona verdiği iki soruydu. Bu mektuplarda, günümüzde olasılığın klasik tanımı olarak bilinen tanımı verilmiştir: Ortaya çıkması beklenen olayların sayısının, tüm elemanter sonuçların sayısına oranına bu olayın olasılığı denir. Bu tanımda elemanter sonuçların sayısı sonlu ve eşit olasılığa sahip olmalıdır.

Bu tanıma dayanan çalışmalar ile olasılık teorisinde önemli gelişmeler kaydedildi. C. Huygens “Talih Oyunlarında Hesaplamalar” (1658), A. De Moivre “Talih Oyunlarında Rastlantının Ölçülmesi ve Sonuçların Olasılığı” (1711), J. Bernoulli “Tahmin Etme Mahareti” (1713) ve P. Laplace “Analitik Olasılık Teorisi” (1812) eserleri olasılık teorisinin esas aşamalarını teşkil eder.

Olasılığın klasik tanımı olasılık kanunları hakkında dar bir tanıma sahiptir; çünkü pek çok durumda ortaya çıkan olanaklar eşit şanslı olmadığı için bu tanım ancak belirli kısıtlamalar altında çalışmaktadır. Örneğin düzgün olmayan bir zar ile 2 sayısının ortaya çıkma olasılığı kaçtır? Bu olayın olasılığını klasik tanıma göre bulmak mümkün değildir; çünkü 1,2,...,6 sonuçlarının meydana gelme olasılığı eşit değildir. Bir diğer örnek ise: İstanbul'da doğan bir kişinin 70 yaşına kadar yaşama olasılığı nedir? Bu problemde ise elemanter sonuçlar uzayının ne olduğu anlaşılmamaktadır.

Olasılığın klasik tanımında karşılaşılan bu gibi zorlukların üstesinden gelmek olasılık kavramına istatistiksel yaklaşım ile mümkün olmuştur. İstatistiksel yaklaşımın

klasik tanımdan farkı, A rassal olayının meydana geldiği denemelerin aynı koşullar altında keyfi sayıda tekrarlanabileceği varsayılmaktadır. Eğer m sayıdaki denemede k sayıda A olayı meydana gelmişse k/m oranına A olayının nispi sıklığı denir. Bir deneyin sonsuz defa tekrar edilmesi mümkün değildir, ancak çok defa tekrarlanması ile nispi sıklık için durağanlık kavramının geçerli olduğu görülmüştür: Yeteri kadar büyük m'ler için k/m oranı denemelerin sayısından bağımsızdır. Buradan hipotez: Rassal bir A olayı m kez tekrar edildiğinde m sayısı sonsuza yaklaştıkça k/m oranının yani nispi sıklığın yaklaştığı bir P(A) sayısı vardır. Bu sayıya A olayının olasılığı denir.

Elbette, klasik tanımdan farklı olarak, bu sayıyı kesin olarak belirlemek mümkün değildir, ancak  $P(A) \gg \frac{k}{m}$  olduğunu söyleyebiliriz, çünkü denemeleri sonsuz sayıda gerçekleştirmek mümkün değildir.

Olasılığın hem klasik hem de istatistiksel tanımlarında aşağıdaki iki önemli teorem elde edilmiştir:

1.  $P(A + B) = P(A) + P(B)$ , A ve B bağdaşmaz olaylar
2.  $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$ , A ve B bağımsız olaylar

Bu iki teorem ve  $0 \leq P(A) \leq 1$  eşitsizliği, tam anlamıyla daha olasılığın ne olduğu bilinmeden, olasılıkları hesaplamak için matematiksel temel oluşturmuştur. A. Renyi 17–18. yüzyıl matematikçileri hakkında şöyle demiştir:

*“Onlar olasılığın formal tanımına ihtiyaç duymadılar, esas olarak belirli problemlerde olayların olasılığını hesaplamak ile ilgilenirlerdi. Elbette bu durum, o devrin matematik seviyesine göre normaldi; çünkü ne de olsa sayı, fonksiyon limit gibi kavramlar o dönemde muasır anlamda tamamlanmamıştı, dolayısıyla da buna ihtiyaç duymadılar.”*

Matematik teorisi ciddi olarak aksiyomlar üzerine kurulmamışsa, paradokslara gebe kalacaktır. Olasılık teorisinde de elemanter olayların sayısı sonsuz

olduğu durumda paradoksların olması kaçınılmazdır. Örneğin; birçok olasılık kitabında J. Bertrant'ın geometrik olasılıkla ilgili paradoksları yer almaktadır.

20. yüzyılın 30'lu yıllarına kadar matematiğin diğer alanlarında olmasına rağmen, olasılık teorisi için aksiyomatik formalizasyon yapılmamıştı.

Geometrik olasılığın paradoksları, olasılığın istatistiksel tanımının sezgiselliği, klasik tanımın mantıksal olarak eksikliği (olasılık kavramının eşit olasılık kavramı ile tanımlanması) sebepleriyle 20. yüzyıl başlarında bazı düşünürler olasılık teorisinin matematik bilimi olmadığı söylemini dile getirdiler.

D. Hilbert matematikçilerin uluslararası kongresinde (1900, Paris) şöyle seslenmiştir:

*“Matematiğin önemli rol oynadığı, fizik biliminin alt dalları olan olasılık teorisi ve mekanik'in geometridekine benzer şekilde aksiyomatik teorisi kurulmalıdır.”*

Bu sözlerden anlaşıldığı gibi D. Hilbert olasılık teorisinin fizik bilimine ait olduğunu iddia etmiştir ve bu teorisinin aksiyomatik temellerinin kurulmasını 20. yüzyılın önemli problemlerinden biri olarak saymıştır. Bu problemi çözmek için 1917 yılında S. N. Berstein ve 1919 yılında R. von Mises uğraşmışlardır, ancak olasılık teorisinin aksiyomatiğinin kurulması problemini 1933 yılında A. N. Kolmogorov çözmüştür.

Kolmogorov, olasılık teorisinin aksiyomatiğinin kurulması için ölçü teorisinden istifade etmiştir. Ölçü teorisi ve olasılık teorisinin aksiyomlarını açıklayalım.

X kümesi ve bu kümenin alt kümelerinden oluşan F kümesi verilsin. F kümesi  $\sigma$  - cebiri olsun; yani

1.  $X \in F, \emptyset \in F$ ,
2. Eğer  $A \in F$  ise  $X \setminus A \in F$ ,

3.  $A_i \in F \Rightarrow \bigcup_i A_i \in F$  ve  $\bigcap_i A_i \in F$  ( $i \in I = \text{sayılabilir küme}$ ) ve  $\mu : F \rightarrow R^+$   $\sigma$ -

toplamsal fonksiyonu verilsin, yani

$$\forall A_1, A_2, \dots, A_n, \dots \in F \text{ ve } A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j \text{ ise bu durumda } \mu\left(\bigcup_i A_i\right) = \sum_i \mu(A_i)$$

Olasılık teorisinde  $X$  elemanter olaylar kümesi,  $F$ 'nin elemanları olaylar,  $X$  – kesin olay,  $\emptyset$  - mümkün olmayan olay,  $\mu(A)$ ,  $A$  olayının olasılığıdır. Görüldüğü gibi olasılık teorisinin aksiyomlar sistemi hiç te zor değildir.

Kolmogorov olasılık teorisini, kümeler teorisinin ve ölçü teorisinin temelleri üzerinde kurmakla birlikte hem olasılık teorisinin mantıken tatmin edici gerekçesini ortaya koymuş oldu, hem de olasılık teorisini muasır matematiğe dâhil ederek, olasılık teorisi problemlerini çözmek için matematiğin gelişmiş alanlarından yararlanma imkânını açtı.

## HAYAT FELSEFESİ

Kolmogorov, toplumun manevi zenginliğini her şeyden üstün tutan bir toplum düzeni arzu ederdi. O'na göre ideal devlet anlayışı özgürlüğe dayanmalıdır.

Kolmogorov'un ilk bilimsel konuşması 17 yaşındayken, Moskova Devlet Üniversitesi'nde tarih profesörü olan S. V. Bakhrushin'in seminerinde Rus tarihi ile ilgiliydi. Sunum bittikten sonra Prof. Bakhrushin, Kolmogorov'un çalışması hakkında der ki:

*“Çalışmanda tek bir ispata yer verdin, ancak sonuçları kesin olarak doğru kabul edemezsin; çünkü biz tarihçiler, bir sonucu kesin doğru kabul edebilmek için en az altı ispatının olmasını tercih ederiz.”*

Sonraları, Kolmogorov bu seminer hakkında konuşurken şöyle der:

*“Ve ben, sonucu tek bir ispat ile temellendiren bilimi seçtim.”*

Kolmogorov kadar manevi açıdan zengin bir hayat süren insana rastlamak gerçekten zordur. Matematik haricinde; şiir okumak, müzik dinlemek, seyahat etmek, spor yapmak, ormanda gezmek, yüzmek... zevk aldığı uğraşlarıydı. O'na göre A. Frans ve T. Mann, 20. yüzyılın en büyük yazarlarıydı. En sevdiği besteciler ise Mozart, Shumann, Bach, Beethoven'dı. Kolmogorov diyor ki:

*“Ciddi matematik uğraşı ile klasik müzik arasında derin bir ilişki vardır; lakin bu ilişkileri açıklamak benim için zordur. Dostum P. S. Aleksandrov matematikte her yaratıcı düşüncesinin bir müzik eseri ile ilgili olduğunu söylerdi.”*

Kolmogorov, çalışkan öğrenciler ile birlikte çalışmak isterdi. Öğrencilerine problem verirken, onların problemi çözebilme kabiliyetinde olup olmadığı ile ilgilenmezdi. Eğer öğrenci gerçekten çalışkan ise Kolmogorov ile devam edip ünlü bir matematikçi olurdu, geriye kalanlar ise uzaklaşırdı. Kolmogorov, ünlü matematikçi Prof. V. A. Uspensky'ye öğrencilik yıllarında şaka ile şöyle demişti:

*“Eğer senden bir şey çıkmazsa, bizim için özetçeler yazarısın!”*

Bir defasında Kolmogorov, günümüzün en büyük matematikçisi kimdir sorusuna cevap olarak birisini söylemenin zor olacağını, çünkü uzlaşmaya varmanın kolay olmadığını söylemiştir. Ancak Sovyet matematik topluluğu sayacağımız matematikçilerin hepsini birincilik sırasında görmektedir: A. N. Kolmogorov, İ. M. Vinogradov, S. N. Bernstein, İ. G. Petrovsky, L. S. Pontryagin, İ.M. Gelfand.

Kolmogorov, yukarıda adı geçen matematikçilerden yaratıcı tarzı ile farklıydı. Gelfand: matematiğin maraton olduğunu söylemiştir. Hem Gelfand hem de adı geçen diğer matematikçiler birer maratoncuydu. Kolmogorov da bir maratoncuydu, ancak esasen daha çok bir sürat koşucuydu. Bundan dolayı matematikte, doğa bilimlerinde, beşeri bilimlerde kırtan fazla alanda temel çalışmaları vardır. O keşfedendi, yol göstericiydi; şöyle ki teoremin işlenmesi, geliştirilmesi ve uygulama işleri başkaları tarafından yapılırdı. Kıyaslama bakımından, D. Hilbert, sekiz alanda çalışmıştır.

Kolmogorov düşüncelerini yazı dilinde gayet iyi anlatabilirdi, ancak O'nun konuşma dilini anlamak gerçekten zordu. Öğrencilerinden biri şöyle açıklamaktadır:

*“Kolmogorov, muhatabı olduğu kişilerin yüksek zekâlı olduğunu varsayardı. O'na göre herkes birer Kolmogorov'du; bu yüzden de lise öğrencilerine verdiği dersi ancak üniversitenin son sınıf öğrencileri anlayabilirdi, doktora derslerinden ise profesörler oldukça faydalanırdı. Profesörler için olan konuşmasını ise kendisinden başka hiç kimse anlamazdı!”*

Kolmogorov, kendisini ifade eden şu cümlesiyle ne denli bir dahi olduğunu göstermektedir:

*“Tüm meslek hayatım boyunca, her şeyi unutup, tüm enerjimi, düşüncemi bir problem üzerine yoğunlaştırdığım vakit, en fazla bir hafta olmuştur.”*

Hayatının sonlarına doğru, D. Hilbert'in problemini çözmesini sağlayan teoremin en zor olduğunu ve bu teoremin ispatı üzerinde iki hafta boyunca aralıksız düşündüğünü söylemiştir.

1930'lu yıllardan itibaren, Sovyetler Birliği'nde gizli, muhteşem bir imparatorluk yaratılmıştı. Bu imparatorluklarda federasyonlar vardı. Öyle ki bunların birinde atom silahları, diğerlerinde balistik füzeler, ses üstü uçaklar, atom denizaltı gemileri, gizli haberleşme sistemleri hazırlanırdı. Sovyetler Birliği çöktükten sonra sır perdesi aralandı ve bu işlere iştirak eden bilim adamlarının isimleri belirlendi: N. N. Bogolyubov, İ. M. Gelfand, A. O. Gelfond, M. V. Keldış, M. V. Lavrentyev, L. V. Kantorovich, İ. G. Petrovsky, S. L. Sobolev, A. N. Tihonov. A. N. Kolmogorov gibi hem doğa bilimleri hem de mühendislik alanında dünya liderlerinden biri olan bir bilim adamının bu tür gizli işlere iştirak etmemesi sır olarak kaldı.

Son olarak Kolmogorov ile yapılan bir söyleşiden bazı ayrıntıları aktaralım:

- *Sizce matematik, en önemli bilim midir?*
- *Hayır. Matematik insanlara gereklidir, biz matematikçilere ise zevk verir. Bir sosyal bilimci olan dostum diyordu ki: “Matematikçiler evcil hayvanlara benzer, onlara bu açıdan yanaşmak gerekir. Tekniğin gerekli*

*olduğu her yerde matematik te gereklidir ve matematikçilerin gönlünü almak gerekir. Bırakınız yaşasınlar ve çalışsınlar.”*

- *Archimedes ve hatta Newton'un zamanında bir bilim adamı her bilim alanını biliyordu. Günümüzde ise bilim adamları tek bir alan ile ilgilenmektedirler. Bu bir geçici devir midir? Tekrar o eski anlama devrine geri dönebilecek miyiz?*
- *Herhangi bir felaket son vermediği sürece, bütün medeniyetler eninde sonunda tekniğe olan ilginin kaybolması devri ile son bulacaktır.*
- *Tekniğe olan ilginin kaybolması ne demektir? Yani bilim insanlarının daha çok insan ve toplum problemleri üzerinde çalışacaklarını mı kastediyorsunuz?*
- *Sadece insan ve toplum problemleri ile meşgul olmayacaklar, bunun yanında, hayattan çocukça zevk alacağımız bir devre geri dönüş olabilir.*

## Kaynakça

- [1] Arnold, V.I., (Providence R. I., 1993), “On A. N. Kolmogorov”, In S. Zdravkovska and P. A. Duren (eds.), Golden Years of Moscow Mathematics, , 129-153
- [2] Shiryayev, A.N., (1989), “A. N. Kolmogorov (April 25,1903 – October 20 1987): in Memoriam , Theory of Probability and Its Applications”, 34, 5 – 118
- [3] Tikhomirov V.M., Volosov, V.M., (1991-1993), “Selected Works of A. N. Kolmogorov”, 3 Vols., Trans. Kluwer Acad. Publ.,
- [4] Kolmogorov A.N., (1950), “Foundations of the Theory of Probability”, Ing. Tran., Chelsea Publishing,
- Dergiler
- [5] Bogolyubov, N.N., Gnedenko, B.V., Sobolev, S. L., (1983), “Andrei Nikolaevich Kolmogorov (On The Occasion of His 80th Birthday)”, (Russian), Uspekhi Mat. Nauk 38, 4 (232), 11-26
- [6] Tikhomirov, V.M., (1988), “The Life and Work of Andrei Nikolaevich Kolmogorov”, Russian Math. Surveys, 43 (6), 1 – 39
- [7] Vitanyi, P., (1988), “A Short Biography of Andrei Nikolaevich Kolmogorov”, CWI and University of Amsterdam, 1, 3 – 18

[8] Aleksandrov, P.S., (1963), “A. N. Kolmogorov (On His 60th Birthday)”, (Russian), Vestnik Moskov. Univ., Ser. Mat. Meh., 3, 3-6

## YAZARLARIN ÖZGEÇMİŞİ

### Abbas AZİMLİ

1947 yılında Bakü’de doğdu. 1965 yılında Bakü Devlet Üniversitesi Matematik Fakültesine kaydolarak, 1970 yılında Lisans ve Yüksek Lisans öğrenimini tamamladı. 1970–1974 yılları arasında Sovyet Bilimler Akademisi Steklov Matematik Enstitüsünde Doktora programını tamamladı ve Diferansiyel Oyunlar alanında Phd derecesini aldı. 1975–1978 yılları arasında Azerbaycan Bilimler Akademisi Sibernetik Enstitüsünde Araştırma Görevlisi olarak çalıştı. 1978–1988 yılları arasında Bakü Devlet Üniversitesi Optimizasyon Bölümünde Doçent olarak görev yaptı. 1988’de Vektör Optimizasyon alanında Bilimler Doktora Tezini savunarak Profesör unvanı aldı. 1989–1993 yıllarında Bakü Devlet Üniversitesi Yöneylem Araştırması Bölümünde Bölüm Başkanlığı yaptı. 1991–1994 yılları arasında Marmara Üniversitesi Endüstri Mühendisliği Bölümünde, 1994–1997 yılları arasında İstanbul Teknik Üniversitesi Matematik Bölümünde, 1997–2003 yılları arasında Yıldız Teknik Üniversitesi Matematik ve İstatistik Bölümlerinde yabancı uyruklu Profesör olarak çalıştı. 1.Ocak.2004’te İstatistik Bölümünde kadrolu Profesör olarak çalışmaya başladı. 2004 yılının Eylül ayından itibaren İstatistik Bölüm Başkanlığı görevini devam ettirmektedir. Çalışma alanları diferansiyel oyunlar, vektör optimizasyon ve lineer olmayan dualite teorisidir.

### Gülde KEMALBAY

1983 yılında İstanbul’da doğdu. 2001 yılında Yıldız Teknik Üniversitesi İstatistik Bölümüne kaydolarak, 2005 yılında mezun oldu. 2003 yılında Yıldız Teknik Üniversitesi Matematik Bölümünde Çift Anadal Programını kazandı. 2005 yılında Y.T.Ü. İstatistik Anabilim Dalında Yüksek Öğrenimine başladı. Halen Çift Anadal ve Yüksek Lisans programlarına devam etmektedir. 2005 yılında Y.T.Ü. Fen-Edebiyat

Fakültesi İstatistik Bölümü Teorik İstatistik Anabilim Dalında Araştırma Görevlisi olarak göreve başlamış olup halen bu görevini sürdürmektedir. Çalışma alanları istatistik ve optimizasyon teorisidir.

## BULANIKLIK VE OLASILIK

**Serkan Karataş<sup>1</sup> ve Naim Çağman<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>Bilim ve Sanat Merkezi, 52200 Ordu

<sup>2</sup>Gaziosmanpaşa Üni., Fen Edebiyat Fak., Matematik Böl., 60100 Tokat

Tel: 0356 252 16 16, Faks: 0356 252 15 85

<sup>1</sup> [leduni@gmail.com](mailto:leduni@gmail.com), <sup>2</sup> [ncagman@gop.edu.tr](mailto:ncagman@gop.edu.tr)

### ÖZET

Klasik mantığın tanımlayamadığı belirsiz kavramların matematiksel olarak ifade edilebilmesine olanak sağlamak amacıyla, 1965'te Lütfi Zadeh *bulanık (fuzzy) küme* teorisini ileri sürmüştür. Bulanık ölçüm kavramı 1974'te Sugeno tarafından ortaya atılmıştır. Bulanık ölçümler belirsizliği modellemek için kullanılır, fakat bulanık ölçümü bulanık kümeyle gösterilen belirsizlikten farklıdır. Bulanık ölçümlerde üyelik fonksiyonlarından ziyade güvenirlilik, olanak ve olasılıkların dereceleri önem taşır. Bu derece, bir evrensel kümedeki aitliği belirli olmayan bir elemanın, evrensel kümenin bir alt kümesine olan aitliğinin derecesidir. Bu çalışmanın temel amacı bulanık kümeleri ve olasılık kavramları arasındaki farkı verdikten sonra bulanık ölçümler ile olasılık ölçümünü tanıtır aralarındaki ilişkileri sistemli bir şekilde incelemektir.

**Anahtar Sözcükler:** Bulanık kümeler, Olasılık, Bulanık Ölçümler, Olasılık Ölçümü.

## GİRİŞ

“Bu yüzyılda matematik ve bilimde görülen çeşitli paradigma değişiklikleri arasında belirsizlik belki de en dikkat çekici olanıdır. Belirsizliği istenilmeyen bir durum olarak gören ve mümkün bütün durumlarda kaçınılması gerektiğine inanan geleneksel anlayıştan, belirsizlikle uğraşan ve bilimde bundan kaçınılmasının mümkün olmadığını iddia eden alternatif bakış açısına doğru dereceli bir geçiş ortaya konulmaktadır. Belirsizlik problemleri için matematikçiler, mantıkçılar ve filozoflar uzun bir süredir uğraşmaktadırlar. Son zamanlarda bu tür problemler bilgisayar ve yapay zeka ile ilgilenen bilim adamları için çok önemli olmuştur. Klasik mantığın tanımlayamadığı belirsiz kavramların matematiksel olarak ifade edilebilmesinin öneminden dolayı araştırmacılar her geçen gün yeni teoriler sunmaktadır. Bilinen en önemli teorilerden bazıları; olasılık, istatistik, bulanık kümeler (fuzzy sets) [19], yaklaşımlı kümeler (rough sets) [14] ve esnek kümeler (soft sets) [13]” [1].

“Klasik mantığın tanımlayamadığı bu tür belirsizlikler çoğunlukla bilimsel olmayan bir şey olarak kabul görmesine rağmen, 19. yüzyılın başlarında bu tür belirsizlikler üzerine bir çok filozof kafa yormuşlardır. Einstein bu durumu şu şekilde ifade etmiştir: “Matematiğin kavramları kesin oldukları sürece gerçeği yansıtmazlar, gerçeği yansıttıkları sürece de kesin değillerdir”. 1920’lerde Heisenberg ortaya ilk belirsizlik kavramını atarak bilimi çok değerliliğe zorlamıştır. 1930’ların başlarında Lukasiewicz ilk üç-değerli mantık sistemini ve aynı dönemlerde kuantum filozofu Black’da sürekli değerlere sahip mantığı tanımladı. Pek az batılı filozof çok değerliliği benimsemesine rağmen, Lukasiewicz, Gödel ve Black, ilk çok değerli mantık ve kümeler üzerine teorik olarak çalışmalarını sürdürdüler, ancak kendilerine bir uygulama alanı bulamadılar. Belirsizliğin, modern anlamda matematiksel olarak modellenmesinde önemli bir dönüm noktası, 1965’te Zadeh’in [19] bulanık mantık (fuzzy logic) ve dolayısıyla bulanık küme teorisini tanımlamasıyla başlamıştır” [4].

“Bu yeni mantık, belirsizliğin ölçülmesinde güçlü ve anlamlı araçlar sunmasının yanı sıra, doğal dildeki belirsiz ve bulanık kavramları temsil etmemize ve onları matematiksel olarak ifade etmemize olanak sağlamaktadır. Bulanık kümesinde, her bir elemana kümedeki üyelik derecesini temsil eden  $[0,1]$  aralığında bir reel sayı değeri atanır. Bu değer elemanın bulanık kümesi tarafından ifade edilen kavrama uygunluk derecesini ifade eder. Bundan dolayı elemanların kümeye ait olması farklılaşır. Matematiksel olarak, bir  $U$  evrensel kümesinde bir  $A$  bulanık kümesi

$$A = \{(x, m_A(x)) \mid x \in U, m_A(x) \in [0,1]\}$$

şeklinde tanımlanır. Görüldüğü gibi,  $A$  bulanık kümesi, sıralı çiftlerden oluşan iki değişkenli bir bağıntı olarak tanımlanmaktadır. Burada  $m_A$  fonksiyonuna üyelik fonksiyonu denir.  $m_A$ , herhangi bir  $x$  elemanın  $A$  bulanık kümesine ait olma derecesini belirtir” [9]. Bulanık Küme teorisi ve uygulamaları hakkında temel bilgi için [5,10,11,20] kaynakları okuyucuya önerilir.

Bulanık ölçüm kavramı Sugeno [16] tarafından ilk kez kapsamlı olarak tanıtıldı. Bulanık ölçümler belirsizliği modellemek için kullanılır, fakat bulanık ölçümü bulanık kümedeki belirsizlikten farklıdır. Bulanık ölçümlerinde üyelik fonksiyonlarından ziyade güvenirlilik, olanak ve olasılıkların dereceleri önem taşır. Bu derece, bir evrensel kümedeki aitliği belli olmayan bir elemanın, evrensel kümenin (bulanık veya bulanık olmayan) bir alt kümesine olan aitliğinin derecesidir. Bulanık ölçümün bir çok uygulama alanı vardır. Yaygın olarak meteorolojide, oyun teorisinde, etnolojide, orman mühendisliğinde v.b. kullanılmaktadır. Bulanık ölçümleri ve uygulamaları hakkında önemli çalışmalar yapılmıştır, [3, 6, 8, 12, 17, 18] bunlardan bazılarıdır.

Bu çalışmanın temel amacı bulanık kümeleri ve olasılık kavramları arasındaki farkı verdikten sonra bulanık ölçümler ile olasılık ölçümünü tanıtır ve aralarındaki ilişkileri sistemli bir şekilde incelemektir. Bir olayın olup olmadığı rasgeledir, hangi dereceye kadar olduğuyorsa bulanıklıktır. Bulanıklığın aksine, olasılık, bilginin artmasıyla birlikte ortadan kalkar. Her ne kadar üyelik değerleri olasılıkta olduğu gibi  $[0,1]$  aralığında değer alsada bir bulanık kümenin elemanlarının üyelik dereceleri toplamı, olasılıktaki gibi, 1 etmek zorunda değildir. Olasılıkta bir elemanın ihtimal değeri diğer elemanlarda bağlıdır, olay kümesine

eklenen veya çıkarılar bir eleman diğer elemanların ihtimalini değiştirir. Bulanık kümelerde elemanların üyelik dereceleri diğer elemanlarınkine doğrudan bağlı değildir. Örneğin, bir güzellik yarışmasında, bir güzelin kazanma şansı ile güzellik derecesi farklıdır. Bir güzelin kazanma şansı diğer güzellere bağlıdır; çok güzel varsa şansı azalır, az güzel varsa şansı artar ve seçim yapıldıktan sonra ihtimal manasız olur. Fakat, bir güzelin güzellik derecesi, gruptan bazı güzellere çıksa veya gruba bazı güzellere girse ve hatta seçim bitse değişmez.

## 2.BULANIK ÖLÇÜMLER

**Tanım 2.1**  $\mathcal{B}$  bir  $\sigma$ -cebri olmak üzere

$$\text{ö1. } \mu(\emptyset) = 0,$$

$$\text{ö2. Her } A \in \mathcal{B} \text{ için } \mu(A) \geq 0,$$

$$\text{ö3. Her ayrık } (A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{B} \text{ dizisi için } \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

şartlarını sağlayan  $\mu: \mathcal{B} \rightarrow [0, +\infty)$  fonksiyonuna ölçüm denir. Ölçüm kavramı detaylı olarak [2,7] kitaplarından elde edilebilir.

**Tanım 2.2**  $\wp(X) = \{A \mid A \subseteq X\}$  olmak üzere  $g: \wp(X) \rightarrow [0,1]$  bir fonksiyon olsun.

Aşağıdaki şartları sağlayan bu  $g$  fonksiyonuna bulanık ölçüm denir.

$$\text{g1. } g(\emptyset) = 0 \text{ ve } g(X) = 1$$

$$\text{g2. } \forall A, B \in \wp(X) \text{ için } A \subseteq B \text{ ise } g(A) \leq g(B)$$

$$\text{g3. } \forall n \in \mathbb{N} \text{ için } A_n \in \wp(X) \text{ olmak üzere, } (A_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ artan (veya azalan) dizisi için}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g(A_n) = g(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n)$$

Burada, (g3) aksiyomuna süreklilik aksiyomu denir ve yalnızca sonsuz elemanlı kümeler uygulanabildiği açıktır. Bu nedenle sonlu bir kümeyle ilgileniyorsak (g3) aksiyomu önemsenmez. Ayrıca  $\wp(X)$  kuvvet kümesi,  $X$  üzerinde bir  $\sigma$ -cebridir.

$$\forall A, B \in \wp(X) \text{ için}$$

$$\max\{g(A), g(B)\} \leq g(A \cup B) \quad \text{ve} \quad g(A \cap B) \leq \min\{g(A), g(B)\}$$

elde edilir. (g3) aksiyomu ile  $(g(A_n))_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi bir  $g(A)$  sayısına yakınsamalıdır. Bu aksiyoma  $g$  'nin süreklilik özelliği denir. (g1)-(g3) şartları sağlanıyorsa  $(X, \wp(X), g)$  üçlüsüne bulanık ölçüm uzayı adı verilir.

**Tanım 2.3**  $g_\lambda$  fonksiyonu  $-1 < \lambda$  için  $g_\lambda(X) = 1$  ve süreklilik şartını sağlasın.  $A \cap B = \emptyset$  koşulunu sağlayan  $\forall A, B \in \wp(X)$  için

$$g_\lambda(A \cup B) = g_\lambda(A) + g_\lambda(B) + \lambda g_\lambda(A) \cdot g_\lambda(B)$$

eşitliğini sağlayan  $g_\lambda$  fonksiyonuna  $\lambda$ -bulanık ölçümü denir.

Bu eşitlik her  $i \neq j$ ,  $A_i \cap A_j = \emptyset$  koşulunu sağlayan  $\{A_i \mid i \in \mathbb{N}\} \subseteq \wp(X)$  ailesi için genelleştirilirse

$$g_\lambda\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{\infty} g_\lambda(A_i) & , \lambda = 0 \\ \frac{1}{\lambda} \cdot \left[ \prod_{i=1}^{\infty} (1 + g_\lambda(A_i)) - 1 \right] & , \lambda \neq 0 \end{cases}$$

elde edilir. Tanım 2.3 de verilen eşitlikte  $A^C = X \setminus A$  olmak üzere,  $B = A^C$  olarak alınırsa

$$g_\lambda(A^C) = \frac{1 - g_\lambda(A)}{1 + \lambda g_\lambda(A)}$$

bulunur. Bu eşitliğe  $\lambda$ -tümleyen formülü denir. Eğer  $A \cap B \neq \emptyset$  ise

$$g_\lambda(A \cup B) = \frac{g_\lambda(A) + g_\lambda(B) - g_\lambda(A \cap B) + \lambda g_\lambda(A) \cdot g_\lambda(B)}{1 + \lambda g_\lambda(A \cap B)}$$

**Tanım 2.4** Güvenirlik ölçümü sonlu bir  $X$  kümesinin kuvvet kümesi üzerinde tanımlı bir fonksiyondur ve  $Bel$  ile gösterilir.  $Bel : \wp(X) \rightarrow [0, 1]$  olmak üzere  $Bel$  fonksiyonu

$$Bel(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) \geq \sum_i Bel(A_i) - \sum_{i < j} Bel(A_i \cap A_j) + \dots + (-1)^{n+1} Bel(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n)$$

toplamsal aksiyomunu sağlar.

$$n = 2 \text{ için } Bel(A_1 \cup A_2) \geq Bel(A_1) + Bel(A_2) - Bel(A_1 \cap A_2)$$

$n = 3$  için  $Bel(A_1 \cup A_2 \cup A_3) \geq Bel(A_1) + Bel(A_2) + Bel(A_3) - Bel(A_1 \cap A_2) - Bel(A_1 \cap A_3) - Bel(A_2 \cap A_3) + Bel(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$  elde edilir.

**Tanım 2.5** Güvenirlik ölçümü  $m: \wp(X) \rightarrow [0,1]$  tanımlı,  $\sum_{A \in \wp(X)} m(A) = 1$  ve  $m(\emptyset) = 0$  koşullarını sağlayan  $m$  fonksiyonuyla ifade edilir. Bu fonksiyona temel olasılık ataması denir.

Olasılık teorisinde kullanılan olasılık dağılım fonksiyonu ve temel olasılık ataması arasındaki isim benzerliğinden oluşacak karışıklığı önlemek için temel olasılık ataması yerine genelde “temel atama” ismi kullanılır. Temel atama aşağıdaki özelliklere sahiptir

**m1.**  $m(X) = 1$  gerektirmesi yoktur.

**m2.**  $A \subseteq B$  koşulunu sağlayan  $A, B \in \wp(X)$  kümeleri için  $m(A) \leq m(B)$  gerektirmesi yoktur.

**m3.**  $m(A)$  ve  $m(A^C)$  arasında bir bağıntı yoktur. Bu gözlemlerden temel atamaların bulanık ölçümleri olmadığı sonucu çıkar.

Bununla birlikte, verilen bir güvenirlik ölçümü, uygun bir  $m$  atamasıyla

$$Bel(A) = \sum_{B \subseteq A} m(B)$$

şeklinde belirlenir. Bu eşitlik  $Bel(A)$  ile  $m(A)$  arasındaki bağıntıyı verir.

**Teorem 2.1** Sonlu bir  $X$  evrensel kümesinin  $\wp(X)$  kuvvet kümesi üzerinde tanımlanmış  $\lambda$ -bulanık ölçümü,  $\lambda > 0$  için bir güvenirlik ölçümüdür.

**İspat:** Bu teoremin ispatını Tanım 2.3 üzerinden yapalım.

$X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  sonlu bir küme,  $g_\lambda$  bir  $\lambda$ -bulanık ölçümü ve  $\lambda > 0$  olsun.

$\forall A \in \wp(X)$  için  $A = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$  ( $k \leq n$ ) alınırsa,

$$g_\lambda(A) = \frac{1}{\lambda} \left[ \prod_{i=1}^k (1 + \lambda g_\lambda(\{x_i\})) - 1 \right]$$

olarak bulunur. Bulunan ifade açık olarak yazılırsa

$$g_{\lambda}(A) = \sum_{B \subseteq A} \lambda^{|B|-1} \prod_{x_i \in B} g_{\lambda}(\{x_i\})$$

elde edilir.  $m(B) = \lambda^{|B|-1} \prod_{x_i \in B} g_{\lambda}(\{x_i\})$  olarak alınırsa  $g_{\lambda}$  bir güvenirlilik ölçümü olur. Açık

bir şekilde  $m(\emptyset) = 0$  ve  $\sum_{B \in \wp(X)} m(B) = 1$  olduğundan  $m$  bir temel atamadır. Bununla

birlikte  $\lambda > 0$  için güvenirlilik ölçümleri  $\lambda$ -bulanık ölçümlerinden daha genel olur. Dolayısıyla güvenirlilik ölçümü her zaman bir  $\lambda$ -bulanık ölçümü değildir.

**Tanım 2.6** *Bel* güvenirlilik ölçümüyle ilişkili olan *Pl* makul ölçümü,  $X$  sonlu bir evrensel küme olmak üzere  $\forall A \in \wp(X)$  için  $Pl(A) = 1 - Bel(A^c)$  eşitliği ile tanımlanır. Bu eşitlik düzenlendiğinde  $Bel(A) = 1 - Pl(A^c)$  olarak bulunur. Güvenirlilik ve makul ölçümleri, biri diğerinin eşleniği (duali) olan bulanık ölçümleridir.

*Bel* ve *Pl* ölçümleri arasındaki bağıntı ve Tanım 2.4 kullanıldığında  $A_1, A_2 \in \wp(X)$  için,

$$Pl(A_1 \cap A_2) \leq Pl(A_1) + Pl(A_2) - Pl(A_1 \cup A_2)$$

elde edilir. Bu eşitsizlik  $n \in \mathbb{N}$  olmak üzere  $\{A_1, A_2, \dots, A_n\} \subseteq \wp(X)$  için genelleştirilirse

$$Pl(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) \leq \sum_i Pl(A_i) - \sum_{i < j} Pl(A_i \cup A_j) + \dots + (-1)^{n+1} Pl(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n)$$

olarak bulunur.

Güvenirlilik ölçümlerinde olduğu gibi, her *Pl* makul ölçümü uygun bir  $m$  temel atamasıyla belirlidir.  $\forall A \in \wp(X)$  için

$$Pl(A) = \sum_{A \cap B \neq \emptyset} m(B)$$

şeklinde tanımlanır.

Güvenirlik ve makul ölçümlerinin tanımları dikkate alındığında  $\forall A \in \wp(X)$  için  $Pl(A) \geq Bel(A)$  olduğu kolayca görülür.

**Teorem 2.2** Sonlu bir  $X$  evrensel kümesinin  $\wp(X)$  kuvvet kümesi üzerinde tanımlanmış  $\lambda$ -bulanık ölçümü,  $-1 < \lambda < 0$  için bir makul ölçümüdür.

**İspat:**  $-1 < \lambda < 0$  için  $g_\lambda$  bir  $\lambda$ -bulanık ölçümü olsun.  $\forall A \in \wp(X)$  için

$$f(A) = 1 - g_\lambda(A^c)$$

şeklinde tanımlansın.

$$f(A \cup B) = 1 - g_\lambda((A \cup B)^c)$$

eşitliğini dikkate alalım.  $A^c$  ve  $B^c$  kümeleri

$$g_\lambda(A \cup B) = \frac{g_\lambda(A) + g_\lambda(B) - g_\lambda(A \cap B) + \lambda g_\lambda(A) \cdot g_\lambda(B)}{1 + \lambda g_\lambda(A \cap B)}$$

eşitliğinde  $A$  ve  $B$  kümeleri yerine yazılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$g_\lambda((A \cup B)^c) = \frac{g_\lambda(A^c) + g_\lambda(B^c) - g_\lambda((A \cap B)^c) + \lambda g_\lambda(A^c) \cdot g_\lambda(B^c)}{1 + \lambda g_\lambda((A \cap B)^c)}$$

olur. Bu son eşitlikteki  $g_\lambda(A^c), g_\lambda(B^c)$  ve  $g_\lambda((A \cap B)^c)$  terimlerine  $\lambda$ -tümleyen formülünü uyguladığımızda,  $f$  fonksiyonu  $g_\eta$  fonksiyonuna eşit olur. Burada

$\eta: (0,1) \rightarrow (0,+\infty)$ ,  $\eta(\lambda) = \frac{-\lambda}{1+\lambda}$  şeklinde tanımlı sürekli bir fonksiyondur. Dolayısıyla  $f$

fonksiyonu bir güvenilirlik ölçümü olur. Tanım 2.3'den  $g_\lambda$   $\lambda$ -bulanık ölçümü  $-1 < \lambda < 0$  için bir makul ölçümüdür.

### 3.OLASILIK ÖLÇÜMÜ

**Tanım 3.1** Aşağıdaki özellikleri sağlayan  $p: \wp(X) \rightarrow [0,1]$  tanımlı  $p$  fonksiyonuna olasılık ölçümü denir.

**p1.**  $\forall A \in \wp(X)$  için  $p(A) \in [0,1]$  ve  $p(X)=1$

**p2.**  $\forall i \in \mathbb{N}$  için  $A_i \in \wp(X)$  ve  $\forall i \neq j$  için  $A_i \cap A_j = \emptyset$  ise  $p\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} p(A_n)$

**Teorem 3.1**  $p$  bir olasılık ölçümü olmak üzere  $\forall A, B \in \wp(X)$  için

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

olur.

**İspat:** İspatı Tanım 3.1 üzerinden yapalım.  $\forall A, B \in \wp(X)$  için

$$A \cup B = (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A)$$

şeklinde yazılır. Bu üç küme ikişer ikişer ayrık kümelerdir. Olasılık ölçümünün tanımıyla

$$p(A \cup B) = p(A \setminus B) + p(A \cap B) + p(B \setminus A)$$

bulunur.

$$A = (A \setminus B) \cup (A \cap B) \text{ ve } B = (B \setminus A) \cup (A \cap B)$$

olacağından

$$p(A \setminus B) = p(A) - p(A \cap B) \text{ ve } p(B \setminus A) = p(B) - p(A \cap B)$$

olarak bulunur. Bu eşitlikler  $p(A \cup B)$  ifadesinde yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned} p(A \cup B) &= p(A) - p(A \cap B) + p(B) - p(A \cap B) + p(A \cap B) \\ &= p(A) + p(B) - p(A \cap B) \end{aligned}$$

elde edilir.

**Teorem 3.2**  $p$  bir olasılık ölçümü olmak üzere her  $A \in \wp(X)$  için  $p(A^c) = 1 - p(A)$  eşitliği sağlanır.

**İspat:**  $\forall A \in \wp(X)$  için  $A \cap A^c = \emptyset$  olduğundan olasılık ölçümünün tanımı ve Teorem 3.1 kullanılırsa

$$p(A \cup A^c) = p(A) + p(A^c)$$

elde edilir.  $A \cup A^c = X$  ve  $p(X) = 1$  olduğundan

$$p(X) = p(A) + p(A^c) \Rightarrow p(A^c) = 1 - p(A)$$

olarak bulunur.

**Teorem 3.3**  $p$  bir olasılık ölçümü olmak üzere  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \wp(X)$  artan bir dizi ve

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \text{ ise } \lim_{n \rightarrow \infty} p(A_n) = p(A) \text{ olur.}$$

**İspat:**  $A_0 = \emptyset$  ve  $i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$  için  $B_i = A_i \setminus A_{i-1}$  olsun. Buradan  $B_1, B_2, \dots, B_n$

kümeleri ikişer ikişer ayrık kümelerdir. Ayrıca  $A_n = \bigcup_{i=1}^n B_i$  ve  $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$  olur. Buradan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p(A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} p\left(\bigcup_{i=1}^n B_i\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n p(B_i) = \sum_{i=1}^{\infty} p(B_i) = p\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = p\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = p(A)$$

olarak bulunur.

**Teorem 3.4**  $p$  bir olasılık ölçümü olmak üzere  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \wp(X)$  azalan bir ve  $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$

ise  $\lim_{n \rightarrow \infty} p(A_n) = p(A)$ 'dır.

**İspat:**  $\forall n \in \mathbb{N}$  için  $B_n = A_n^c$  olsun. Buradan  $(B_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \wp(X)$  artan bir dizi olacağından,

Teorem 5.6.3 ve De Morgan kuralının uygulanmasıyla

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c = \left( \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \right)^c = A^c$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} p(A) &= 1 - p(A^c) \\ &= 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} p(B_n) \\ &= 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} p(A_n^c) \\ &= 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - p(A_n)) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} p(A_n) \end{aligned}$$

olarak bulunur.

## 1. BULANIK VE OLASILIK ÖLÇÜMLERİ ARASINDAKİ İLİŞKİLER

Olasılık ölçümü ile bulanık ölçümleri arasındaki en belirgin fark; olasılık ölçümünün toplamsal olmasıdır. Şimdi olasılık ölçümünün bir bulanık ölçümü olduğunu ispatlayalım.

**Teorem 4.1**  $p$  olasılık ölçümü bir bulanık ölçümdür.

**İspat:**  $p$  olasılık ölçümünün bulanık ölçümü olma şartlarını sağladığını gösterelim.

**g1.** Olasılık ölçümünün tanımından  $p(X) = 1$  ve  $p(\emptyset) = 0$  dır.

**g2.**  $A, B \in \mathcal{F}$  kümeleri  $A \subseteq B$  koşulunu sağlasın.  $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$  olacağından

$$p(B) = p(A) + p(B \setminus A)$$

bulunur. Buradan da  $p(A) \leq p(B)$  elde edilir.

**g3.** Teorem 3.3 veya Teorem 3.4 şartlarını sağlayan  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}(X)$  dizisi için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p(A_n) = p\left(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n\right)$$

olur. Dolayısıyla süreklilik şartı da sağlanır. O halde, olasılık ölçümü bir bulanık ölçümüdür.

Dikkat edilirse güvenilirlik ölçümleri ile ilgili olarak verilen aksiyomu, daha kuvvetli bir

$$Bel(A \cup B) = Bel(A) + Bel(B), \quad A \cap B = \emptyset$$

aksiyomuyla yer değiştirirse, güvenilirlik ölçümünün daha özel bir çeşidi olan, sonlu bir evrensel küme için tanımlanmış olasılık ölçümlerini elde etmiş oluruz.

**Teorem 4.2** *Bel* güvenilirlik ölçümü olasılık ölçümüdür ancak ve ancak  $m$  temel ataması  $m(\{x\}) = Bel(\{x\})$  ve tek nokta kümesi olmayan her  $A \in \wp(X)$  için  $m(A) = 0$  ile belirlenmiştir.

**İspat:** *Bel* güvenilirlik ölçümünün bir olasılık ölçümü olduğunu kabul edelim.

$m$ 'nin tanımıyla  $m(\emptyset) = 0$  olduğundan teorem boş küme için sağlanır.  $A \neq \emptyset$  olsun. O halde  $A = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  olarak kabul edebiliriz.

$$\begin{aligned} Bel(A) &= Bel(\{x_1, x_2, \dots, x_n\}) \\ &= Bel(\{x_1\}) + Bel(\{x_2, x_3, \dots, x_n\}) \\ &\vdots \\ &= Bel(\{x_1\}) + Bel(\{x_2\}) + \dots + Bel(\{x_n\}) \\ &= \sum_{i=1}^n Bel(\{x_i\}) \end{aligned}$$

olarak bulunur. Buradan da  $Bel(\{x\}) = m(\{x\})$  elde edilir. O halde  $Bel(A) = \sum_{i=1}^n m(\{x_i\})$

eşitliği gerçekleşir. Dolayısıyla *Bel* güvenilirlik ölçümü bir temel atamanın terimlerinde tanımlanmış olur ki; yalnızca tek elemanlı kümeler üzerinde odaklanır.

Tersine,  $m$  temel atamasının verildiğini varsayalım. Öyle ki

$$\sum_{x \in X} m(\{x\}) = 1$$

Buradan  $A \cap B = \emptyset$  koşulunu sağlayan her  $A, B \in \wp(X)$  için

$$\begin{aligned} Bel(A) + Bel(B) &= \sum_{x \in A} m(\{x\}) + \sum_{x \in B} m(\{x\}) \\ &= \sum_{x \in A \cup B} m(\{x\}) \\ &= Bel(A \cup B) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece *Bel* fonksiyonu bir olasılık ölçümü olur.

**Tanım 4.1**  $\pi : X \rightarrow [0,1]$  olmak üzere  $\pi(x) = m(\{x\})$  şeklinde tanımlanmış  $\pi$  fonksiyonuna olasılık dağılım fonksiyonu denir.

Temel atama yalnızca tek nokta kümeleri üzerinde odaklandığında, güvenilirlik ve makul ölçümleri için yazılan ifadelerin sağ tarafları eşit olur. Yani her  $A \in \wp(X)$  için

$$Bel(A) = Pl(A) = \sum_{x \in A} m(\{x\})$$

elde edilir. Olasılık dağılım fonksiyonunun kullanılmasıyla

$$Bel(A) = Pl(A) = \sum_{x \in A} \pi(x)$$

şeklinde yazılmış olur. Böylece  $\forall A \in \wp(X)$  için

$$p(A) = \sum_{x \in A} \pi(x)$$

olarak bulunur.

**Teorem 4.3**  $\lambda = 0$  için  $\lambda$ -bulanık ölçümü bir olasılık ölçümüdür.

**İspat:**  $g_\lambda$  bir  $\lambda$ -bulanık ölçümü olsun. Bu ölçümün olasılık ölçümü olma şartlarını sağladığını gösterelim.

**p1.**  $\lambda$ -bulanık ölçümü tanımından  $g_\lambda(X) = 1$  'dir.

**p2.**  $g_\lambda$   $\lambda$ -bulanık ölçümü olduğundan,  $A \cap B = \emptyset$  koşulunu sağlayan  $\forall A, B \in \wp(X)$  için  $\lambda = 0$  alınırsa

$$g_\lambda(A \cup B) = g_\lambda(A) + g_\lambda(B)$$

elde edilir.

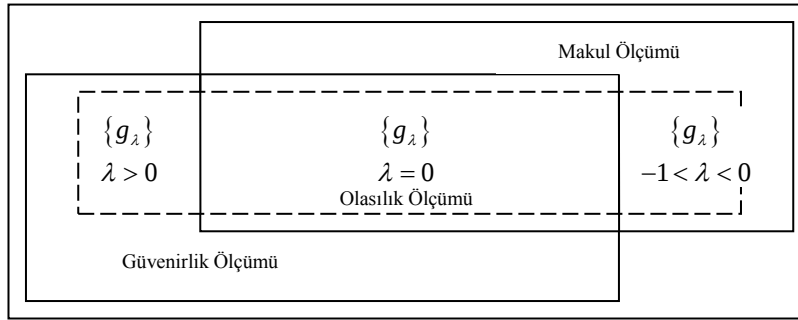
Bu eşitlik her  $i \neq j$  için  $A_i \cap A_j = \emptyset$  koşulunu sağlayan  $\{A_i \mid i \in \mathbb{N}\} \subset \wp(X)$  küme ailesi göz önüne alınıp genelleştirilirse

$$g_\lambda\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} g_\lambda(A_i)$$

olarak bulunur. Dolayısıyla  $g_\lambda$   $\lambda$ -bulanık ölçümü bir olasılık ölçümü olur.

## 2. SONUÇ

Sonuç olarak, sonlu kümeler üzerinde tanımlanmış güvenilirlik ölçümü, makul ölçümü,  $\lambda$  – bulanık ölçümü ve olasılık ölçümü arasındaki ilişkileri aşağıdaki şekilde gösterebiliriz.



## Kaynakça

- [1] Aktaş, H. ve Çağman. N., (2005), “Bulanık Yaklaşımlı Kümeler”, *Journal of Arts and Sciences*, 3, 13-25.
- [2] Balcı, M., (2000), “Reel Analiz”, Balcı Yayınları, Ankara.
- [3] Cheng, B., (2000), “Probability Measure and Its Properties”, STAT 609.
- [4] Çağman, N., (2006), “Bulanık Mantık”, *Bilim ve Teknik*, 463, 50-51.
- [5] Dubois, D. and Prade, H., (1980), “Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications”, Academic Press, New York.
- [6] Grabisch, M., Murofushi, T. and Sugeno, M., (1999), “Fuzzy Measures and Integrals”, Physica-Verlag: Heidelberg.
- [7] Halmos, P. R., (1968), “Measure Theory”, New York: Van Nostrand Reinhold.
- [8] Karataş, S., (2004), *Fuzzy Ölçüm Metotları*, Yüksek Lisans Tezi, Gaziosmanpaşa Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Tokat.
- [9] Karataş, S., ve Çağman N., (2005), “Fuzzy Ölçüm Metotları ve Aralarındaki İlişkiler”, Sakarya Üniversitesi Fenbilimleri Enstitüsü Dergisi, (Yayına Kabul edildi).
- [10] Klir, J. G, and Folger, T. A., (1988), “Fuzzy Sets, And Information”, New Jersey.
- [11] Kaufmann, A. and Gupta, M. M., (1991), “Introduction to Fuzzy Arithmetic Theory and Applications”, Van Nostrand Rienhold, New York.

- [12] Murofushi, T., Sugeno, M. and Machida, M., (1994), “Non-monotonic fuzzy measures and the Choquet integral”, *Fuzzy Sets and Systems*, 64, 73-86.
- [13] Molodtsov, D., (1999), “Soft set theory-first results”, *Computers Math. Applic*, 37, 19-31.
- [14] Pawlak, Z., (1982), “Rough sets”, *Int. J. of Information and Computer Sciences*, 11, 341-356.
- [15] Shafer, G. A., (1976), “Mathematical Theory of Evidence”, Princeton University Press, Princeton.
- [16] Sugeno, M., (1977), “Fuzzy Measures and Fuzzy Integrals”, In: *Gupta, Saridis, and Gaines*, 89-102.
- [17] Wang, Z. and Klir, G., (1992), “Fuzzy Measure Theory”, New York: Plenum Press.
- [18] Yager, R.R., (2000), “On the entropy of fuzzy measure”, *IEEE Transactions on Fuzzy Sets Systems*, 8, 453-461.
- [19] Zadeh, L.A., (1965), “Fuzzy Sets”, *Inform and Control*, 8, 338-352.
- [20] Zimmermann, H.J., (1991), “Fuzzy Set Theory and Its Applications”, Kluwer.

## YAZARLARIN ÖZGEÇMİŞİ

### Serkan KARATAŞ

1980 Bafra/Samsun doğumlu, ilk, orta ve lise öğrenimini Bafra’da tamamladı. 2001 yılında Ondokuzmayıs Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünü bitirdi. 2004 yılında Gaziosmanpaşa Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında yüksek lisansını tamamladı. 2006 Eylül ayında Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı doktora programına kabul edildi. Üç yıldır Ordu Bilim ve Sanat Merkezinde matematik öğretmeni olarak görev yapmaktadır

### Naim ÇAĞMAN

1965 Reşadiye/Tokat doğumlu. İlköğretimi; doğum yerinde, liseyi; Bakırköy İzzet Ünver Lisesinde (İstanbul), lisansı; İstanbul Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik bölümünde, yüksek lisansı; Wales Swansea Üniversitesi, Matematik bölümünde (Swansea/İngiltere), Doktorayı; Leeds Üniversitesi, Matematik bölümünde (Leeds/İngiltere) tamamladı. Halen Gaziosmanpaşa Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü öğretim üyesi olarak çalışmaktadır. Matematik Lojik, Bulanık Mantık (Fuzzy Lojik), Oyun Teorisi ve Matematik Eğitimi ilgi alanlarındandır. Daha detay için web sitesine bakılabilir; <http://idak.gop.edu.tr/ncagman>.

## YÖRÜNGE METODU İLE DİNAMİK SİSTEMİN ELDE EDİLMESİ

**Kasım KOÇAK<sup>1</sup>, Hasan TATLI<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>İstanbul Teknik Üniversitesi, Meteoroloji Müh. Böl., 34469-İstanbul,  
kkocak@itu.edu.tr

<sup>2</sup>Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi, Coğrafya Böl., 17020- Çanakkale,  
tatli@comu.edu.tr

### ÖZET

Günümüzde gözlenmiş değişkenlerden hareketle, bu değişkenleri üreten dinamik sistemin yeniden kurulması önemli bir araştırma alanı oluşturmaktadır. Bu çalışmada Güneydoğu Anadolu Projesi (GAP) kapsamındaki illerimizden Şanlıurfa'da ölçülmüş olan aylık ortalama toplam yağış miktarı, aylık ortalama atmosfer basıncı ve aylık ortalama *omega* değerleri kullanılarak bu değişkenleri üreten dinamik sistem Yörünge Yöntemi yaklaşımı ile yeniden kurulmuştur. Bu dinamik sistem birinci mertebeden adi türevli bir diferansiyel denklem sistemi formunda olup gerçek verilerden elde edilen çekici ile benzer bir çekiciyi üretmektedir.

**Anahtar Kelimeler:** Dinamik Sistemin Yeniden Kurulması, Yörünge Yöntemi, GAP

## 1. GİRİŞ

Temel hedefi, Güneydoğu Anadolu Bölgesi halkının gelir düzeyi ve hayat standardını yükselterek, bu bölge ile diğer bölgeler arasındaki gelişmişlik farkını ortadan kaldırmak, kırsal alandaki verimliliği ve istihdam imkanlarını artırarak, sosyal istikrar, ekonomik büyüme gibi ulusal kalkınma hedeflerine katkıda bulunmak olan GAP, çok sektörlü, entegre ve sürdürülebilir bir kalkınma anlayışı ile ele alınan bölgesel bir kalkınma projesidir. Proje alanı Fırat ve Dicle havzaları ile yukarı Mezopotamya ovalarında yer alan 9 ili kapsamaktadır. Bunlar Adıyaman, Batman, Diyarbakır, Gaziantep, Kilis, Mardin, Siirt, Şanlıurfa ve Şırnak illeridir [1].

1970’lerde Fırat ve Dicle nehirleri üzerindeki sulama ve hidroelektrik amaçlı projeler olarak planlanan GAP, 1980’lerde çok sektörlü, sosyo-ekonomik bir bölgesel kalkınma programına dönüştürülmüştür. Kalkınma programı, sulama, hidroelektrik, enerji, tarım, kırsal ve kentsel altyapı, ormancılık, eğitim ve sağlık gibi sektörleri kapsamaktadır. Su Kaynakları Programı 22 baraj, 19 hidroelektrik santrali ve 1.7 milyon hektar alanda sulama sistemleri yapımını öngörmektedir. Enerji santrallerinin toplam kurulu gücü 7476 MW olup yılda 27 milyar kilowatsaat enerji üretimi öngörülmektedir [1].

Yukarıda ana hatları ile vurgulanan önemi nedeniyle bölgenin yağış-akış rejiminin çok dikkatli ve ayrıntılı incelenmesi gerekmektedir. Genelde tüm Türkiye’de ve özelde GAP kapsamındaki bölgelerde küresel ısınma nedeniyle yaşanacak olan olası bir iklim değişikliğinin kuraklık vb gibi olumsuz etkileri iyi takip edilmelidir. Üzerinde yaşadığımız gezegende insan gereksinimleri kadar

çeşitlilik gösteren çok az şey vardır. Bütün bu gereksinimlerin karşılanabilmesinin yolu üretimden geçmektedir. Ancak her üretim faaliyeti az veya çok doğada bir değişim meydana getirir. Bu doğaldır ve bundan kaçış mümkün değildir. İnsanoğlu üretimden vazgeçemeyeceğine göre, yapılması gereken her türden üretimin doğa dostu teknolojiler ile gerçekleştirilmesidir. Dünya atmosferinin yukarıda sözü edilen üretim faaliyetlerinden doğrudan etkilenmesi kaçınılmazdır.

Üretim faaliyetleri kuşkusuz санаayi devriminden önce de vardı ve bir takım kirlетici emisyonlar atmosfere bırakılıyordu. Ancak atmosfer, belli bir sınırın altında olan bu kirlетicileri tolere edebiliyordu. Atmosfere lokal ölçekte yapılan müdahaleler etkilerini zamanla küresel ölçekte de göstermeye başlamıştır. Özellikle санаayi devrimini izleyen yıllarda sera gazlarının atmosferdeki birikimi hızla artmıştır. Bilindiğı gibi sera gazlarının birikimindeki artış atmosferi ısıtma eğilimi göstermektedir.

Geçmiş iklim koşulları incelendiğinde iklim değişiminin doğal nedenle bağı olarak meydana geldiğı görülür. Bunlar volkanik aktiviteler, güneş enerjisi miktarındaki değişimler, dünya ekseninin eğiminde ve yörüngesinin geometrisinde meydana gelen değişimlerdir. Dolayısı ile günümüz iklimi hem insan hem de doğal kaynaklı zorlamaların etkisi altında şekillenmektedir. İklim Değişikliği Çerçeve Sözleşmesi'nin 1995 yılında tamamlanan ikinci raporunda, санаayi devriminden beri, iklimdeki doğal değişebilirliğe ek olarak, ilk kez insan etkilerinin de önemli rol oynadığı gerçeğı kabul edilmiştir. Bu raporda iklim değişimi “karşılaştırılabilir bir zaman peryodunda gözlenen doğal iklim değişikliğine ek olarak, doğrudan ya da dolaylı olarak küresel atmosferin bileşimini bozan insan etkinlikleri sonucunda iklimde oluşan bir değişiklik” şeklinde tanımlanmıştır [2].

Olası bir iklim değişiminin su kaynakları üzerindeki etkileri ayrıntılı olarak incelenmesi gereken bir konudur. Yarı kurak bir iklim kuşağında yer alan ülkemizin,

kuraklığın şiddetini yakın bir gelecekte bugünkünden çok daha fazla hissedeceği tahmin edilmektedir. Bu nedenle, küresel iklim değişiminin etkilerinin su kaynaklarının planlanması ve işletilmesi açısından ele alınması hayati bir önem taşımaktadır. İklim değişiminin olası etkileri dikkate alınarak su yapılarının projelendirilmesi ülkemiz ekonomisi açısından gerekmektedir [3].

Ülkemizi ilgilendiren özellikle gelecek 100 yıl içerisinde ve ondan sonra ülkemiz ikliminin nasıl değişeceği ve bundan nasıl etkileneceğimize, sıcaklıkta 1°C'lik bir artışın su kaynaklarımıza, tarımsal ekolojik zonlara yapacağı etkiler, tarım şekli genellikle yağışa bağımlı olan ülkemizde yağışın miktarında yersel ve zamansal değişimlerin üretimin kalite ve miktarına yapacağı etkiler, sulama ve hidroelektrik enerji üretmek amacıyla yapılmış ve yapılmakta olan su yapılarının bu değişimden nasıl etkileneceğinin bilinmesi ve bunlara çözümlerin üretilmesi gerekmektedir [4].

İklim değişiminin olası etkilerinin ortaya konabilmesi için yapılması gereken şey, büyük ölçekli iklim değişimi ile ilgili tahminlerin daha küçük ölçeğe indirilmesini sağlamak ve ülkemiz için öngörülerde bulunmaktır. Bu öngörüler dikkate alınarak, ülkemiz su kaynaklarının bundan olası etkilenme derecelerinin araştırılması gerekmektedir[3].

Bu çalışmada Yörünge metodu kullanılarak Şanlıurfa meteoroloji istasyonunda gözlenmiş olan aylık ortalama toplam yağış miktarı, aylık ortalama atmosfer basıncı ve aylık ortalama omega değerleri kullanılarak bu değişkenleri üreten dinamik sistem tahmin edilmiştir. Bu şekilde elde edilen dinamik sistemin çekicisi ile gerçek verilerin çekicisi birbirinin benzeridir.

Makalenin izleyen kısımlarında 2. alt başlık altında Yörünge metodu ayrıntılı olarak tanıtılacaktır. 3. alt başlık altında çalışmada kullanılan verilere ve uygulamaya, 4. ve son başlık altında ise sonuçlara yer verilecektir.

## 2. YÖRÜNGE METODU

Sistem tanımlama konusu fizikte ve pek çok mühendislik alanında önemli bir araştırma alanı oluşturmaktadır. Bu alanda veriler yalnızca bir sürecin kalitatif olarak tanımlanmasında değil aynı zamanda mevcut veriyi yeniden üreten sistemin matematiksel yapısı hakkında bilgiler çıkarma amacına yönelik olarak da kullanılır. Eğer ilgilenilen sürecin matematik modeli biliniyorsa bu durumda problem, bu modelin parametrelerinin tahmini halini alır. Eğer model bilinmiyorsa, bu durumda uygun bir matematiksel modelin seçilmesi gerekir. Bu son durumda problem daha karmaşık ve daha zordur.

Eğer ilgilenilen süreç, genelde olduğu gibi ihmal edilemeyecek ölçüde nonlinearlikler içeriyorsa problemin çözümü daha da güçleşir. Lineer modellemenin tersine, nonlinear modelleme halen gelişme aşamasında olan bir araştırma alanıdır.

Bu çalışmada, doğrudan gözlemlerden elde edilen matematiksel modelin yeniden kurulması üzerinde durulmaktadır. Böyle bir model kullanılarak süreç hakkında önemli bilgiler ortaya konabilir. Bu bilgiler şu şekilde sıralanabilir: a) Model, temel değişkenler arasındaki etkileşimlerin doğası ve nonlinearliklerin derecesi ve biçimi hakkında önemli bilgiler verir, b) Model, sistemin kararlılık özelliklerinin incelenmesinde kullanılabilir, c) Model, parametrelerdeki bir değişim ya da dış zorlama durumunda, sistemin buna nasıl bir tepkide bulunacağını ortaya koyabilir, d) Model, zaman serisinin öngörüsünde kullanılabilir, e) Düşük boyutlu modellerin uygun bir kuplajı ile daha karmaşık sistemler incelenebilir [4].

Verilerden hareketle diferansiyel denklemin yeniden kurulması konusunda Crutchfield and McNamara [5] önemli çalışmalar yapmıştır. Bu araştırmacılar konuyla ilgili iki yaklaşım önermişlerdir. Bunlardan birincisi sistemin kısa-vade davranışını dikkate alan lokal dinamiğin tanımlanması yaklaşımı, ikincisi ise

sistemin uzun-vade davranışından hareketle bütün bir çekicinin dinamiğinin elde edilmesi şeklindedir. Bu çalışmalarla hemen hemen aynı zamanlarda Cremers ve Hübler [6], çekicinin bütün noktalarında sistemin kısa-vade davranışının analizini esas alan akış yöntemini önermiştir. Bu yöntem daha sonra Breeden ve Hübler [6] tarafından bütün sistem değişkenlerinin gözlenemediği bir durumu da içerecek şekilde geliştirilmiştir. Sonuçta Eisenhammer vd [7] sistemin davranışının kısa ve uzun-vade davranışını Yörünge yöntemi adı altında birleştirmiştir. Bu yöntem izleyen satırlarda ayrıntılı olarak açıklanmıştır. Birinci mertebeden adi türevli bir diferansiyel denklem şeklinde tanımlanmış bir dinamik sistem

$$(1) \quad \dot{x} = f(x, t)$$

eşitliği ile verilebilir. Burada  $x$  değişken vektörünü,  $t$  ise zamanı göstermektedir. Hareket denklemlerinin yeniden kurulması problemi, orijinal fonksiyon  $f$  'ye en yakın fonksiyonun elde edilmesini içerir. Orijinal denklemin matematiksel formu bilinmediği durumlarda, modelin olası matematiksel formu için uygun bir fonksiyon uzayı belirlenir ve mevcut zaman serisine en iyi uyan model bu uzay içerisinde seçilir. Kabul edilen model, ilgilenilen sistemin karmaşıklığını iyi bir şekilde temsil edebilmek için uygun sayıda değişkene sahip olmalıdır.

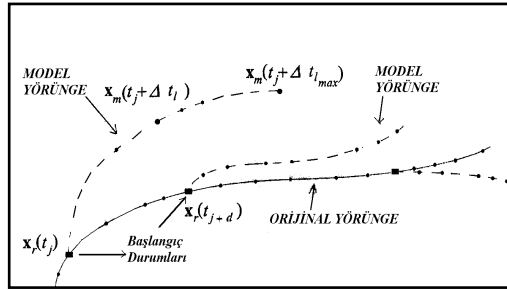
Dinamik sistemler teorisine göre, bir sistemin zamansal evrimi faz uzayındaki yörüngeleri ile temsil edilebilir. Faz uzayının koordinatları, sistemin evrimini tam olarak gösterebilmek için gerekli olan durum değişkenlerinden meydana gelir. Bu uzaydaki her bir yörünge, sistemin farklı başlangıç koşullarına karşı gelen evrimini temsil eder. Faz portreleri, geçici bir durumdan sonra bütün yörüngeleri kendi üzerine çeken ve çekici (atraktör) olarak adlandırılan özgün paternlere sahiptir [8]

Düzenli  $\Delta t$  zaman aralıklarında örneklenmiş tek bir durum değişkenine ait zaman serisinden hareketle faz uzayının yeniden kurulması (reconstruction) mümkündür. Bunun için önce çekici ile ilgili bilgilerin ve topolojik özelliklerin (örneğin boyutun) zaman serisinden tahmin edilmesi gerekir. Bir dinamik sistemin boyutu sistemin dinamiğini tanımlamak için gereken durum değişkeni sayısıdır.

Packard vd [9], gözlenmiş türbülanslı yada kaotik akıştan bir takım ölçüleri elde etmek için çekicinin, faz uzayındaki yapısının yeniden kurulmasını önermişlerdir. Bu ise dinamik sürecin, artık daha fazla bilgi taşımayana kadar bağımsız bir koordinatın eklenmesiyle, ardışık olarak daha yüksek boyutlu yeni bir faz uzayına transformasyonu (embedding) ile mümkündür. Bu uzay embedding uzayı olarak adlandırılır. Embedding uzayındaki yörüngeyi üreten  $f$  fonksiyonu gerçek fonksiyona eşdeğer olacaktır. Yörünge metodu (2) eşitliğinde verildiği gibi lineer olmayan bir diferansiyel modeli dikkate alır [4].

$$(2) \quad \dot{x}_i = \sum_{k=1}^K c_{i,k} F_{i,k}(x_1, x_2, \dots, x_D)$$

Bu eşitlikte  $i=1,2,\dots,D$  şeklindedir,  $D$  modeldeki denklem sayısıdır.  $K$  yaklaşım fonksiyonu  $F_{i,k}$  'ların sayısını,  $c_{i,k}$ 'lar ise optimize edilecek olan katsayıları göstermektedir. Şekil 1, Yörünge yöntemini şematik olarak göstermektedir. (2) eşitliği ile verilen model denklemleri orijinal yörünge üzerinde seçilen başlangıç koşullarına ( $j=1,2,\dots,j_{\max}$ ) uygulanır.  $x_r(t_n)$  ( $n=1,2,\dots,N$ ) gerçek verileri,  $x_m$ ' ler ise farklı  $\Delta t_l$  zaman aralığı için modelin  $(t_j + \Delta t_l)$  anlarında ardışık olarak ürettiği çıktılardır. Yukarıda bahsedilen prosedürün farklı  $t_j$  değerlerine karşı gelen  $x_r$  başlangıç koşullarına uygulanması gerekmektedir. Bu durumda  $Q$  kalite fonksiyonu şu şekilde verilebilir [4]:



Şekil 1. Faz uzayında Yörünge yönteminin şematik olarak gösterimi.

$$(3) \quad Q = \sum_{j=1}^{j_{\max}} \sum_{l=1}^{l_{\max}} \|x_m(t_j + \Delta t_l) - x_r(t_j + \Delta t_l)\|$$

Bu eşitlikte  $\| \cdot \|$  Euclid normunu,  $\mathbf{x}_r$  ve  $\mathbf{x}_m$  sırasıyla gerçek ve modelin ürettiği durumları,  $d$  ise iki başlangıç koşulu arasındaki zaman farkını göstermektedir. (3) eşitliğindeki  $\Delta t_l$ 'nin seçimi aşağıda verilen eşitlikle yapılabilir [10]

$$(4) \quad \Delta t_l = h(2^{l-1})$$

Yukarıdaki eşitlikte  $h$  gerçek verilerin örnekleme aralığını,  $l$  ise gerçek ve model yörünge üzerinde başlangıç koşulundan itibaren karşılıklı olarak kaç noktanın karşılaştırılacağını göstermektedir. (2) eşitliğinde verilen  $c_{i,k}$  katsayılarının optimum değerleri, (3) eşitliği ile verilen kalite fonksiyonunun en küçük kareler yöntemi ile minimize edilmesiyle elde edilir. Kalite fonksiyonunun minimum olduğu iterasyonda elde edilen katsayılar, modelin katsayıları olarak seçilirler. (3) eşitliği ile verilen kalite fonksiyonu, modelin bileşenleri ve modelin vermiş olduğu tahminler dikkate alınarak şu şekilde yazılabilir [4].

$$(5) \quad Q = \sum_{j=1}^{j_{\max}} \sum_{l=1}^{l_{\max}} \sqrt{\sum_{i=1}^D \left[ \left( \int_{t_j}^{t_j+\Delta t_l} \dot{x}_{m_i}(\tau) d\tau \right) + x_{m_i}(t_j) - x_{r_i}(t_j+\Delta t_l) \right]^2}$$

(2) eşitliği ile verilen model dikkate alınarak (5) eşitliğindeki integral aşağıda verildiği gibi yazılabilir.

$$(6) \quad \begin{aligned} \int_{t_j}^{t_j+\Delta t_l} \dot{x}_{m_i}(\tau) d\tau &= x_{m_i}(t_j + \Delta t_l) - x_{m_i}(t_j) \\ &= c_{i,1} \int_{t_j}^{t_j+\Delta t_l} F_{i,1}(\tau) d\tau + c_{i,2} \int_{t_j}^{t_j+\Delta t_l} F_{i,2}(\tau) d\tau + \dots + c_{i,K} \int_{t_j}^{t_j+\Delta t_l} F_{i,K}(\tau) d\tau \end{aligned}$$

Bu eşitlik,  $x_{m_i}(t)$  bileşeninin  $[t_j, t_j + \Delta t_l]$  aralığındaki değişimini temsil etmektedir. (6) eşitliğinin sağ tarafında verilen tüm integraller analitik olarak çözülemezler, bu nedenle nümerik olarak çözülmek zorundadırlar. (5) eşitliğinin

bilinmeyen  $c_{i,k}$  katsayılarına göre kısmi türevi alınıp sıfıra eşitlenerek her bir bileşen için ( $i=1,2,\dots,D$ ) lineer bir denklem sistemi elde edilir.

$$(7) \quad \frac{\partial Q}{\partial c_{i,k}} = \left( \sum_{z=1}^K c_{i,z} A_{k,z}^{(i)} \right) - B_k^{(i)} = 0 \quad z, k = 1, 2, \dots, K$$

Yukarıdaki eşitlikte verilen  $A$  matrisi ve  $B$  vektörü aşağıda verildiği gibidir.

$$(8) \quad A_{k,z}^{(i)} = \sum_{j=1}^{j_{max}} \sum_{l=1}^{l_{max}} \left[ \left( \int_{t_j}^{t_j+\Delta t_l} F_{i,k}(\tau) d\tau \right) \left( \int_{t_j}^{t_j+\Delta t_l} F_{i,z}(\tau) d\tau \right) \right]$$

$$(9) \quad B_{k,z}^{(i)} = \sum_{j=1}^{j_{max}} \sum_{l=1}^{l_{max}} \left[ \left( \int_{t_j}^{t_j+\Delta t_l} F_{i,k}(\tau) d\tau \right) \left( \int_{t_j}^{t_j+\Delta t_l} F_{i,z}(\tau) d\tau \right) \right]$$

(8) eşitliği ile verilen  $A$  matrisi tersinir bir matristir. (7) ile verilen lineer denklem sisteminin çözümü sonucu yeni  $c_{i,k}$  katsayıları elde edilir. Bu katsayılar optimum değerlerine ulaşana kadar iterasyonlara devam edilir.

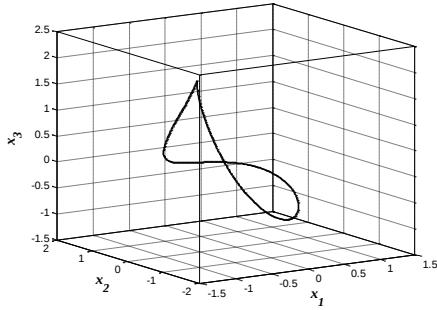
### 3. YÖRÜNGE YÖNTEMİNİN GERÇEK VERİLERE UYGULANMASI

Yukarıda anlatılan Yörünge yöntemi, ikisi Şanlıurfa meteoroloji istasyonunda ölçülmüş olan, diğeri ise re-analysis verisinden oluşan üç durum değişkenine uygulanmıştır. Bu değişkenler daha öncede bahsedildiği gibi aylık ortalama toplam yağış miktarı, aylık ortalama atmosfer basıncı ve aylık ortalama omega değerleridir. Omega değerleri için kullanılan veri yeniden incelemeye tutulmuş (reanalysis) veri kümesinden alınmıştır [10,11]. Omega değerleri düşey olarak A ve B gibi iki nokta arasında yer alan bir tabakadaki diverjansın integrasyonu ile elde edilir. Omega ile troposferdeki düşey hareketler arasında anlamlı ilişkiler vardır; örneğin Türkiye aylık toplam yağış alanları ile omega alanları arasında ilişkiler incelenmiş ve anlamlı sonuçlara ulaşılmıştır [12].

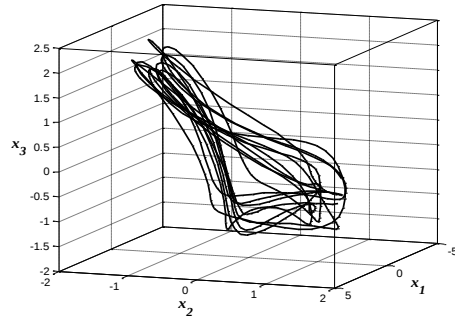
Bu veriler için ölçüm periyodu 1950-2003 yılları olmak üzere 54 yıllık aylık

değerlerden oluşmaktadır. Buna göre toplam veri uzunluğu  $N=54 \times 12=648$ 'dir. Modelin çalıştırılabilmesi için öncelikle verilerin model girişi için hazır hale getirilmesi gerekmektedir. Önce 54 yıllık aylık veri kullanılarak her 10 yılın aylık olarak uzun-vade ortalaması bulunmuştur. Bu işlemin sonucunda her bir değişken 10x12 elemanı olan bir kümeye indirgenmiştir. Bu şekilde elde edilen verilerdeki olası örnekleme hataları, mevcut serilere Fourier analizi uygulanarak giderilmiştir, diğer bir deyişle veriler yumuşatılmıştır.

Şekil 2, gerçek verilerden hareketle elde edilen yıllık ortalama çekicinin 3 boyutlu faz uzayındaki durumunu göstermektedir. Şekilden de görüldüğü gibi bu çekici kapalı bir yörünge şeklindedir. Bu şekilde kendi üstüne kapanan bir yörüngeden oluşan çekiciler “periyodik çekici” olarak adlandırılır. Şekil 3, 10 yıllık ortalamaya karşı gelen çekiciyi göstermektedir. Bu çalışmada bu çekiciyi üreten veriler kullanılarak dinamik sistem yeniden kurulmuştur.



**Şekil 2. Orijinal dinamik sistemin yıllık ortalama çekicisinin 3 boyutlu faz uzayındaki görünümü.**

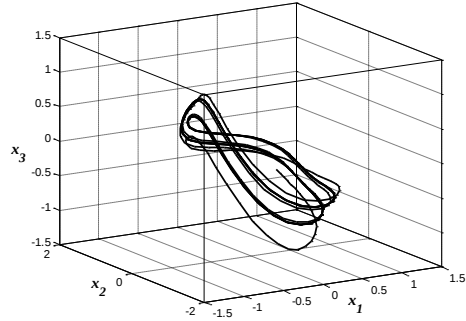


**Şekil 3. 10 yıllık aylık ortalama verilerin çekicisi.**

(2) eşitliğinde toplama sembolü altında verilen ifade 3. mertebeden bir fonksiyon olarak alınmıştır. Buna göre dinamik sistem,  $i$  durum değişkeni sayısını ( $i=1,2,...,D$ ) göstermek üzere

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_i = & c_{i,1} + c_{i,2}x_1 + c_{i,3}x_2 + c_{i,4}x_3 + c_{i,5}x_1x_2 + c_{i,6}x_1x_3 + \\
 & c_{i,7}x_2x_3 + c_{i,8}x_1^2 + c_{i,9}x_2^2 + c_{i,10}x_3^2 + c_{i,11}x_1x_2x_3 + c_{i,12}x_1^2x_2 + \\
 & c_{i,13}x_1^2x_3 + c_{i,14}x_2^2x_1 + c_{i,15}x_2^2x_3 + c_{i,16}x_3^2x_1 + c_{i,17}x_3^2x_2 + \\
 & c_{i,18}x_1^3 + c_{i,19}x_2^3 + c_{i,20}x_3^3
 \end{aligned}
 \quad (10)$$

şeklinde birinci mertebeden adi türevli bir diferansiyel denklem sistemi formundadır. Şekil 4’de verilen çekici bu dinamik sistemin  $j_{max}=100$ ,  $l_{max}=2$  ve  $d=4$  için 25 iterasyon sonunda elde edilen çekiciyi göstermektedir. Bu çekici ile Şekil 3’de verilen çekici karşılaştırılırsa genel olarak söz konusu dinamiğin elde edildiği görülür.



Şekil 4. Modelin  $j_{max}=100$ ,  $l_{max}=2$  ve  $d=4$  için 25 iterasyon sonunda ürettiği çekici.

#### 4. SONUÇLAR

Çalışmada GAP illerinden Şanlıurfa'ya ait yağış, atmosfer basıncı ve omega değerlerine Yörünge yöntemi uygulanmıştır. Elde edilen dinamik sistem önemli bir meteorolojik değişken olan yağışın dinamiğini anlamada ve öngörmede kullanılabilir.

Veriler öncelikle model girişi için hazır hale getirilmiştir. Bunun için öncelikle veriler 10 yıllık dilimlere ayrılmış ve sonrada bu dilimlerin örnek ortalaması bulunmuştur. Sonuç veriler normalize edilerek sıfır ortalama ve birim varyanslı verilere dönüştürülmüştür. Bu şekilde elde edilen veriler modele giriş verisi olarak verilmiştir. Model,  $j_{max}=100$ ,  $l_{max}=2$  ve  $d=4$  için 25 iterasyon çalıştırılmıştır. Sonuçta elde edilen çekicinin, orijinal verinin ürettiği çekici ile büyük bir benzerliğe sahip olduğu görülmüştür.

#### Kaynakça

- [1] T.C. Başbakanlık Güneydoğu Anadolu Projesi Bölge Kalkınma İdaresi Başkanlığı, (2005), <http://www.gap.gov.tr>.
- [2] Koçak, K., (2005), İklim Değişiminde İnsan Faktörü. <http://atlas.cc.itu.edu.tr>.
- [3] Kadioğlu, M., Şaylan, L., (2004), "Küresel İklim Değişimi ve Su Kaynaklarımız", İstanbul ve Su Sempozyumu, TMMOB Mimarlar Odası İst. Büyükşehir Şubesi.
- [4] Perona, P., Porporato, A., and Ridolfi, L., (2000), "On the Trajectory Method for the Reconstruction of Differential Equations from Time Series", *Nonlinear Dynamics*, 23, pp:13-33.
- [5] Crutchfield, J.P., and McNamara, B.S., (1986), "Equation of Motion from a Data Series", *Complex Systems*, 1, pp:417-452.

- [6] Breeden, J.L., and Hübler, A., (1990), “Reconstructing Equation of Motion from Experimental Data with unobserved variables”, *Physical Review A*, 42(10), pp:5817-5826.
- [7] Eisenhammer, T., Hübler, A., Packard, N., and Kelso, J.A.S., (1991), “Modelling Experimental Time Series with Ordinary Differential Equations”, *Biological Cybernetics*, 65, pp: 107-112.
- [8] Koçak, K., (1995), “Kaotik Davranış Kriteri Olarak Fraktal Boyut Değişimi ve Dinamik Sistemlere Uygulanması”, *Doktora Tezi*, İTÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.
- [9] Paackard, N.H., Crutchfield, J.P., Farmer, J.D., and Shaw, R.S., (1980), “Geometry from a Time Series”, *Physical Review Lett.*, 45, pp:712-716.
- [10] Kistler, R., E. Kalnay, Collins, S. Saha, G. White, J. Woollen, M. Chelliah, W. Ebisuzaki, M. Kanamitsu, V. Kousky, H. van den Dool, R. Jenne, and M. Fiorino, (2001), The NCEP-NCAR 50-Year Reanalysis: Monthly Means CD-ROM and Documentation. *Bull. Amer. Meteor. Soc.*, **82**, 247-268.
- [11] Kalnay, E., M. Kanamitsu, R. Kistler, W. Collins, D. Deaven, L. Gandin, M. Iredell, S. Saha, G. White, J. Woollen, Y. Zhu, M. Chelliah, W. Ebisuzaki, W. Higgins, J. Janowiak, K. C. Mo, C. Ropelewski, J. Wang, A. Leetmaa, R. Reynolds, R. Jenne, and D. Joseph, (1996), The NMC/NCAR 40-Year Reanalysis Project. *Bull. Amer. Meteor. Soc.*, 77, 437-471.
- [12] Tatlı H, H.N. Dalfes and Ş.S. Menteş, (2004), “A statistical downscaling method for monthly total precipitation over Turkey”. *Int. J. Climatol.*, 24,161-180.

## YAZARLARIN ÖZGEÇMİŞİ

### **Kasım KOÇAK**

1959 yılında Sivas/Şarkışla’da doğdu. İlk ve Orta öğrenimini Şarkışla’da, Lise öğrenimini ise Sivas’ta Sivas Öğretmen Lisesinde tamamladı. 1983 yılında girdiği İTÜ Uçak ve Uzay Bilimleri Fakültesi Meteoroloji Mühendisliği Bölümünü 1987 yılında tamamladı. 1988 yılında Meteoroloji Mühendisliği Anabilim Dalında Araştırma Görevlisi olarak çalışmaya başladı. Yüksek Lisansını “Yağış Verilerinin Autorun Analizi” adlı tez ile Temmuz 1992’de tamamladı. Doktora çalışmalarını, “Kaotik Davranış Kriteri Olarak Fraktal Boyut Değişimi ve Dinamik Sistemlere Uygulanması” adlı tez ile Nisan 1996 tarihinde tamamladı. 1998 yılında Meteoroloji Anabilim Dalında Yardımcı Doçent kadrosuna atandı. Haziran 2000 döneminde açılan Doçentlik sınavı sonucu Doçent ünvanını aldı, 2003 yılında Doçent kadrosuna atandı. Halen aynı kadroda çalışmakta olan Kasım Koçak’ın başlıca ilgi alanları şunlardır: Kaos Teorisi ve meteorolojik problemlere uygulanması, nonlineer zaman ve uzay serilerinin analizi ve öngörüsü, dinamik sistem analizi, hidrometeorolojik süreçlerin dinamiği, su kaynakları problemlerine meteorolojik yaklaşımlar.

## SÜREKLİLİK VE RASSALLIK

Ünal Ufuktepe-Günnur Ufuktepe

İzmir Yüksek Teknoloji Enstitüsü, Matematik Bölümü,  
35430 Urla-İzmir, Tel:02327507614 Fax:02327507509  
unalufuktepe@iyte.edu.tr- gunnurufuktepe@iyte.edu.tr

### ÖZET

Rassallık en genel anlamıyla düzensiz, kurlsız, tahmin edilemeyen kaotik yapılaradır. Bir sayı dizisine baktığımızda onun elemanlarının rassal olduğunu nereden anlıyoruz, ya da gerçekten bunlar rassal mıdır? Yaşam içinde rassal diye tanımladığımız olayları bilim tarihi sürecinde inceledik. Rassallığı, kaynağı doğrultusunda çevremizdeki rassal olaylar, başlanıç koşuluna göre rassal olan sistemler (kaos) ve esas rassallar olarak üç başlık altında ele aldık. Bu bakış altında gözlemlenen olayların ya da olguların rassallık ve süreklilik boyutları tartışıldı.

### GİRİŞ

Raslantı, bir tür bilinmezlik ve talih diye tanımlanabilir. Raslantı falcılardan çok bilim adamlarının ilgisini daha çok çekmiştir. Raslantı üzerine Pascal, Fermat, Huygens, Jacques Bernoulli, Markov, Kolmogorov gibi saygın bilim adamlarının çalışmaları olasılık kuramı dediğimiz bir bilim dalı olmuştur.

Olasılığın temel özü ise  $[0,1]$  kapalı aralığında gizlidir. Olasılık bize bir şeyin olabilme ya da olmama durumunun derecesini bildirir. Olasılık bir tür belirsizliği karakterize etmenin matematiksel bir modellemesidir. Örneğin 010101010101 ve 1011101101001 ikili

sistemlerine dikkatle baktığınızda ilk göze çarpan birincinin bir kurala göre dizildiği ikincisinde ise belirli bir kuralı tespit etmenin pek mümkün olmadığı anlaşılabilir. Yani birincide bir kural diğ erinde ise bir kuralsızlık vardır. Bu ikili sistemi şöyle yorumlamak mümkündür; İki oyuncu ellerindeki demir paraları 13 kez havaya atmış ve yazı geldiğinde 0 tura geldiğinde 1 yazmışlar (ya da iki oyuncu 13 kez bir basket potasına atış yapmış, başarılı atış 1 başarısız atış 0 ile gösterilmiştir). Sonuçlara bakıldığında akla ilk gelen birinci oyuncunun hileli bir para kullandığıdır; ilk atışta yazı sonra tura sonra yazı bu böyle gider, haliyle 2007. atışta tura geleceğini de kolayca kestirebiliriz. İkinci oyuncunun atışları için böyle bir tahminde bulunmak mümkün değildir. Hilesiz bir paranın havaya atılışında ne geleceği kestirilemez, fakat bu atışlar sürekli tekrar edildiğinde belirsizlik yüzde elliye yakın olur. İlginç olan sürekli tekrarlanan bağımsız olaylarda bilinmezlikten bilinebilirliğe geçiştir. Bir birinden bağımsız ayrı olayların sürekli olarak (buna sonsuz diyelim) tekrarlanmasında tesadüflük ortadan kalkar. Tıpkı yer yüzüne düşen kar tanelerinin milyonlarcasının üst üste yığılmasıyla ortaya kesiksiz düzgün bir görüntünün çıkması gibi.

Gerçek raslantısallık kesin ve acımasızdır. Beşeri süreçlerin ve yapay dünyanın doğaya sürekli olarak pek raslantısal olmayan bir düzen vermesinden dolayı doğada bu tür bir hoyratlık yoktur. Yani birlik üretilmesi basit bir modeldir ve bu yüzden de çok yaygındır. Bir kar tabakasının düzlüğü havanın akışkanlık kazandırma özelliğine eşlik eden yer çekimidir. Bu çekimle kar tanesi düştüğü yerdeki en alçak yeri doldurmaya çalışır. Buna karmaşıklığın bir düzene dönüşme çabası da denilebilir

Raslantı ürünleriyle birlik bir biriyle karıştırılmamalıdır. Bir ekin tarlasında tohum makinesi tohumları raslantısal şekilde eker. Bu makinenin kalitesindeki temel ölçütlerden biri tohumları eşit aralıklarla yaymasıdır. Çünkü bir birine yakın düşen tohumlar, belirli bir alandaki toprakta ancak belirli bir büyümeye yetecek kadar besin ve güneş ışığı olduğunda, yaşam ve gelişim rekabetine girerler. Dikim makinesinin kalitesinden dolayı hasat zamanında ekin tarlasında görülen düzenlilik ş anşla belirlenmemiştir. Raslantısal bir dağılım ile eşit dağılımın birbirine karıştırılması yaygın bir gelenektir. Bu raslantı yasasını yanlış anlamaktan kaynaklanır. Doğru çıkmayan öngörüler ç abuk unutulur ve pek söz edilmez. Oysa raslantısal olarak doğru çıkanlar, hem hatırlanır hem de başkalarına da anlatılır. İçinde yaşadığımız evren olasılıklı özelliklere sahiptir. Yaşam rasgelelik olgusu ile vardır. Onu dinamik kılan da budur. Sonuç olarak Rassallık Evrenin karş ılıklı

bağımlılığının ve ilişkililiğinin sonucudur. Rassallık ve belirsizlik iç içedir. Madde ve maddenin hareket biçimlerinin sonucudur. Buna göre rassallığı evrenin kendi özelliklerine sahip olması, olayların karşılıklı bağımlılığı ve ilişkililiği ile açıklamak mümkündür



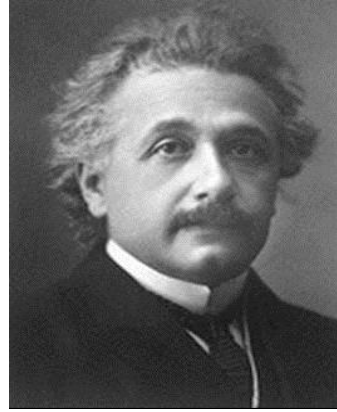
## RASSALLIĞIN TARİHSEL SÜRECİ

Rassallık insanı, kendisini ve çevresini tanıma sürecinde hep rahatsız etmiştir. Doğanın insana sunmuş olduğu belirsizlik, kestirememezlik karşısında kendini güçsüz ve çaresiz hisseden insan başlangıçta bütün olayları kaderci bir yaklaşımla, doğa üstü güçlerle ya da tanrıların istekleri doğrultusunda gerçekleştiği inancını taşıdı. M.Ö. 330 yıllarında Aristotle bunun baktığımız sistemin

### Sir Isaac Newton (1643 – 1727)

dışındaki bir tesadüflükten kaynaklanmış olabileceğini ileri

sürer. M.Ö.300 yıllarında Epicurus rassallığın, hareket eden atomlara enjekte edilmiş olacağından söz etmiştir. 1700 lerde Newton'un hareket yasaları ilk kez, gözlemlenen olgularla karşılaştırılarak kontrol edilebilecek kesin nicel öngörülerini mümkün kılmıştır. Newton yasaları belirsizliği ortadan kaldırdığı için belki de bu yüzden pek sevilmiştir. Laplace, Newton yasalarının mutlak ve evrensel olarak geçerli olduğuna inanmıştır.



### Albert Einstein (1879 – 1955)

Fakat Newton yasaları ancak belli koşullar altında uygulanabilir yaklaşımlardır. Laplace, farklı koşullar altında, fizik biliminde henüz incelenmemiş alanlarda bu yasaların değiştirilmesi ya da genişletilmesi gerekebileceğini düşünmemiştir.

Laplace'ın determinizmi, tüm evrenin herhangi bir andaki konumu ve hızı bir kez bilindiğinde, onun gelecekteki davranışının da her an için belirlenebileceğini varsaymaktadır. Bu yaklaşımda raslantıya yer yoktur.

Bu teoriye göre, şeylerin tüm zengin çeşitliliği birkaç değişkene dayanan mutlak bir nicel yasalar kümesine indirgenebilirdi. Newton'un hareket yasalarında ifade edildiği şekliyle klasik mekanik, basit neden ve sonuçlarla ilgilenir. Örneğin bir cismin bir başka cisim üzerine yalıtık etkisi gibi. Fakat pratikte bu imkânsızdır, çünkü hiçbir mekanik sistem bütünüyle yalıtık değildir. Oysa dış etkiler kaçınılmaz olarak bağlantının yalıtık bire bir karakterini yıkar.

Newton kanunlarında kesinlik vardır. Bilim dünyası bu kanunları uzun bir süre kabul ederek rasallığın huzursuzluğundan kendisini uzak tutmuştur. Kesinliği olmayan olgular yani olasılık ise bilimin kapsam alanı dışında tutulmuştur, nedensellikleri tanrının ilahi adaleti ve düzeniyle ifade edilmiştir. Atomaltı parçacıkların hayal edilemez büyüklükteki hızlarla yaptıkları görünüşte raslantısal hareketleri, Newton mekaniğinin kavramlarıyla açıklamak mümkün değildir. Kesinliklerin yerine her geçen gün artan kesinsizlikler alınca bir süre sonra bilim bir açmaza girmiştir. Bu durum yeni bir bilimin ortaya çıkışı için uygun bir zeminin var olması demektir. Bu bilimsel devrimin temel liderleri Einstein, Schrödinger ve Heisenberg'dir. Bu devrimin temel yapı taşı ise kuantum mekaniğidir. Kuantum mekaniğinin öngörü tarzı, klasik mekaniğin tarzından oldukça farklıdır.[8]



**Erwin Rudolf Josef Alexander Schrödinger**  
(12 Ağustos 1887 - 4 Ocak 1961),

Ama kuantum mekaniği de olasılık kuramını kullanarak öngörülerde bulunmaya devam etmekte ve bu öngörülerden de kesin sonuçlar çıkarmaktadır. Kesinlikten kesinsizliğe geçiş sürecinde bilmek-bilemeyiz-bilinmez konularında sofistler, idealistler ve marksistler arasında derin felsefi tartışmalar yaşanmıştır. Burada bilinmeyenle ilgilenmiyoruz. Bilimin

serüveni bilinmeyenden bilinene, bilgisizlikten bilgiye doğrudur. Bazen bilinmeyi bilinemez ile karıştırırız işte o zaman ciddi bir zorluk ortaya çıkar. “Bilmiyoruz” ile “bilemeyiz” sözcükleri arasında temel bir farklılık vardır. Rassallık tam bu noktada ortaya çıkar.

Bilim, nesnel dünyanın varolduğu ve tarafımızdan bilinebileceği temel düşüncesinden hareket etmesine karşın “bilemeyiz” kavramını Olasılık kuramı ile hafifletmeye, bilinebilir-fikir yürütülebilir konuma getirmeye çalışmaktadır.

Bilim tarihinde bazı filozoflar genel olarak nedenselliğin varolmadığını iddia etmiştir. Bir başka deyişle, neden ve sonuç yoktur. Böylelikle doğa bütünüyle nedensiz, tesadüfi bir şey olarak görünür. Tüm evren öngörülemez bir şeydir. Hiçbir şeyden “emin olamayız”. “Bunun yerine, herhangi bir özel deneyde, elde edilecek *kesin* sonuçların *tamamen keyfi* olduğu, yani bu sonuçların dünyada şu an varolan ya da hep varolmuş olan herhangi bir şeyle ne türden olursa olsun bir ilişkisi olmadığı varsayılır.”[2].

Yaşamın içinde bir çok farklı sistemde rassallık vardır. Bunların rassallık kaynakları farklıdır . Bu farklılıklar üç temel başlık altında toplanabilir: 1) Çevresel faktörler 2) Başlangıç Koşulları 3) Gerçek Rassallık [9].

### 1) Çevresel faktörler

Sistemin rassal olmasındaki temel faktör sistemin kendisiyle onu kuşatan rassal çevre faktörlerinin sürekli etkileşiminden kaynaklanır.

- 1) Örneğin Okyanusta bir aşağı bir yukarı doğru hareket eden başı boş bir sandalın hareketi rassaldır. Rassallık kaynağı ise suyun yüzey yapısının sürekli değişimidir. Bu değişimin nedenleri sayılamıyacak çokluktur. Bu nedenle okyanus ya da denizdeki dalgalanmaların boyutu ve yönü kestirilemez .
- 2) Brown hareketindeki rassallık (1820): Bir mikroskopla su yüzeyine bırakılmış bir polenin hareketi izlendiğinde bu hareketin içinden çıkılamıyacak boyutta karmakarışık olduğu gözlenebilir. Bu düzensiz hareketlerin rassallık kaynağı

ise gelişi güzel devinen moleküllerin polene sürekli çarpmasından kaynaklanmaktadır.

- 3) Radyoda frekansı tam ayarlanamayan bir radyo istasyonunda çıkan seslerin rassallığı için de bir çok faktör sayılabilir.

Bir sistemin evrimi (değişimi) onu kuşatan rassal çevreden sürekli etkilenmektedir. Peki çevremizdeki bütün bu rassallıkların kaynağı nedir?

## 2) Başlangıç koşulları

Başlangıç koşullarına aşırı ölçüde duyarlı olan bazı sistemler ve olgular kaos kuramının kapsamı içindedir. Bir sistemin rassallığı için rassal çevre faktörleriyle sürekli etkileşimi gerekmiyor.

Örneğin:

- 1) Yarı kırmızı yarı sarıya boyalı bir topu düzgün bir yüzey üzerinde yuvarladığımızda, top durduğu anda her seferinde farklı bir konumda duracaktır. Rassallık kaynağı: Top atılırken başlangıçta verilen ilk hızdır elbet. Topun üzerinde yuvarlandığı yüzey, o esnadaki çevre koşulları, topun durma konumundaki raslantının nedenselliklerinden sadece birkaçıdır. (Benzer şekilde bir demir paranın ya da zarın atılması, ya da rulet'in dönüşü). Bu başlangıç hızını sabit tutmak mümkün olmadığından bu raslantısallık hep olacaktır demektir.
- 2) İpe asılmış bir topun salınımında da benzer gözlemler yapılabilir.
- 3) Yeni doğan bir çocuğun kan grubu da rassaldır. Rassallığın kaynağı ise anne ve babanın kan guruplarıdır

Bu tür sistemler başlangıç koşullarına aşırı duyarlı olan sistemlerdir.

## 3) Gerçek Rassallık

Gerçek rassallık nesneldir. Bütünüyle insan düşüncesinden ve iradesinden bağımsızdır. Rassal olay belirli koşullarda ortaya çıkabilen ya da ortaya çıkması mümkün olmayan olaydır..

Stephen Wolfram yaklaşık 30 yıl önce şimdi Cellular Automata olarak isimlendirdiği bilim dalı üzerinde çalışmaya başlamıştır. Hücresel Otomata çok sayıda homojen etkileşimli olayların veya tanımlanan konuların hücreler şeklinde bölünmesi ve her bir hücrenin, yanındaki diğer hücrelerin durumuna bağlı olarak gelecekteki durumlarının belirlenmesinde kullanılan bir işletim sistemi ve dönüşüm mekanizmasıdır. Kısacası basit kuralları olan ve birbirini etkileyen basamaklardan oluşan bir sistemdir. Cellular Automata düzenli hücre kafeslerinden oluşur, gelişim/dönüşüm zaman süreçlerinde meydana gelir, her hücre bir durumla karakterize edilir, bu hücreler durumlarına, komşu hücre sayılarına göre gelişir[9].

Buna göre siyah bir kutucuktan başlayarak bir çok sistemi modelleyebilen kurallar bütününe ulaşmak mümkündür. Bu kurallara bağlı olarak siyah bir kutucuk ve onun komşusu olan kutucuklara bakarak bir sonraki aşamada bu siyah kutucuğun alacağı yeni renk siyah veya beyaz olarak belirlenmektedir. Her farklı kural ile farklı bir model ortaya çıkmaktadır. Bu modeller bir düzene sahip olabildiği gibi tamamen rasgele de olabilmektedir. Stephen Wolfram Cellular Automata'nın yeni bir bilim dalı olduğu iddiasındadır. Bugüne kadar keşfedilmemiş olmasını ise çok zahmetli ve ancak birçok iterasyondan sonra anlamlı şeyler elde edilebilmesine bağlamaktadır. Bilgisayarların günlük yaşama girmesinden sonra uzun ve yorucu iterasyonlar çok kolaylaşmış ve sonuçları görsel olarak sunma imkanı ortaya çıkmıştır. Bu da cellular automata'nun daha iyi anlaşılmasına neden olmuştur [9]

## RASSALLIK VE ÖNGÖRÜ

Bir parayı havaya atığımızda, “yazı ya da tura” gelme olasılığı yüzde ellidir. Bu gerçekten de öngörülemez olan rastlantısal bir olgudur. Kendi etrafında dönerken, para ne “yazı”dır



ne de “tura”; ya da hem yazı hem de turadır, tıpkı ne doğruluğu ne de yanlışlığı henüz ispatlanmamış matematiksel sonuçlar gibi. Yalnızca iki olası sonuç olduğundan, şans ağır basar. Ama çok sayıda demir para atışı söz konusu olduğunda işin şekli değişir. Olasılık kuramının uzun bir tarihi vardır ve çok farklı alanlarda kullanılmaktadır. Örneğin Gauss olasılığı hatalar kuramında kullanırken, Poisson ve Laplace ise olasılığı atışlardaki kesinlik kuramında kullanmıştır.

**Pierre-Simon Laplace(1749-1827)**

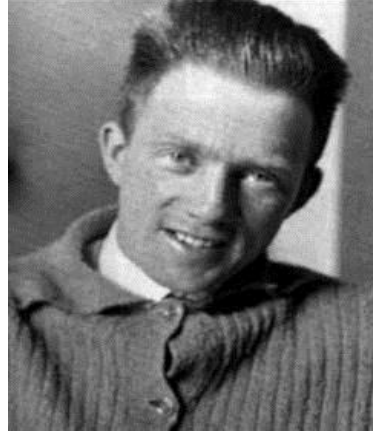
İstatistikte. ise, “büyük sayılar yasasıyla” şu genel ilke inşa etmiştir; çok fazla sayıdaki tesadüfi faktörlerin birleşik etkisi, tesadüften hemen hemen bağımsız sonuçlar üretir. Bu fikir 1713 de Bernoulli tarafından dile getirilmiştir. 1835' teki istatistiksel hukuk çalışmaları sırasında Poisson, "büyük sayılar yasası" ifadesini ortaya atmıştır. Böylece, olasılık matematiğini toplumsal konulara uygulayabilmek için yeni bir gerekçe sağlamıştır. 1867'de Çebişev bu teoriye son şeklini vermiştir. Markov, Borel, Cantelli ve Kollmogorov ise bu teoriyi geliştirmiştir. Heisenberg ise yığınsal ölçekli tesadüfi olayların matematiğini atomaltı parçacıkların hareketine uygulamıştır. Bu sayede bilim cesur öngörülerde bulunmuştur. Kuantum mekaniğinde ki öngörülerde kesinlik düzeyine ulaşmak mümkündür, bunun raslantısal olduğu söylenebilir bu ise kaos kuramındaki düzensizliğin düzeniyle ilişkilidir. Aksi taktirde herşeyin bir raslantı olduğunu nedensellik diye bir şeyin olmadığını kabul etmek



**Siméon Denis Poisson**  
(1781 – 1840 )

zorundayız. Tesadüf, şans, ihtimaller, olasılık, raslantı ele alınan nesnelerin yalnızca bilinen özellikleri aracılığıyla tanımlanamayan olgulardır. Bu onların anlaşılamayacağı anlamına gelmez. Örneğin yolda yürüyen birinin başına düşen bir nesne olayını ele alalım . Bu kaza sonsuz bir rassal olaylar dizisiyle açıklanabilir. Burada söz konusu olan nedenlerin sayısı tam anlamıyla sonsuzdur. Sonuç olarak, olay bütünüyle öngörülemeyen bir olaydır. Bir kazadır, tesadüftür ve zorunlu değildir, çünkü olabilirdi de olmayabilirdi de. Böyle olaylar, Laplace'ın teorisinin tersine, o kadar çok bağımsız faktör tarafından belirlenir ki, sonuç olarak hiçbir şekilde belirlenemezler. Ne var ki, böylesi birçok kazayı incelediğimizde, tablo tamamen değişir. İstatistiksel yasalar adı verilen yasalarca kesinlikle hesaplanabilen ve kestirilebilen eğilimler söz konusudur. Tek bir kazayı önceden kestiremeyiz ama belli bir zaman aralığında bir şehirde gerçekleşecek kazaların sayısını büyük bir kesinlikle önceden kestirebiliriz. Hepsisi bu mu? Kazaların sayısına kesin bir etkide bulunan çeşitli yasal düzenlemeler de yapılabilir. Sonuç olarak tesadüflere hükmeden ve bizzat nedensellik

yasaları kadar zorunlu olan yasalar söz konusu olur. Bilimde zorunluluk ve tesadüf arasındaki ilişki David Bohm tarafından söyle



**Werner Karl Heisenberg**  
(1901 – 1976)

*“Böylece tesadüfün önemli rolünü görüyoruz. Yeterli bir süre verildiğinde, tesadüf, şeylerin her türlü kombinasyonunu olası ve hatta gerçekte kaçınılmaz kılar. Tersinmez süreçleri ya da bir sistemi tesadüfi dalgalanmaların etkisinden kurtaran gelişim çizgilerini harekete geçiren bu kombinasyonlardan biri eninde sonunda kesin gerçekleşecektir. Bu nedenle, tesadüfün etkilerinden biri, nitel olarak yeni gelişimin çizgilerinin başlamasını mümkün kılacak şekilde “şeyleri kımıldatmaya” yardım etmektir.*

*Özel bir sorundaki nedensel yasalar a priori bilinemezler; doğadan bulunup çıkarılmak zorundadırlar. Ne var ki, yüzyıllar boyunca insanlığın ortak deneyiminin genel arka planıyla beraber birçok kuşağın yürüttüğü bilimsel deneyler karşılığında, nedensel yasaları bulmanın oldukça iyi tanımlanmış yöntemleri evrimleşmiştir. Nedensel yasaları akla getiren ilk şey, şüphesiz, çok geniş bir koşullar çeşitliliği içerisinde geçerli olan düzenli ilişkilerin varlığıdır. Böylesi düzenlilikler bulduğumuzda, bunların keyfi olarak, gelgeç biçimde ya da tesadüfi bir tarzda ortaya çıktıklarını varsaymayız, tersine ... en azından geçici olarak kabul ederiz ki, bunlar zorunlu nedensel ilişkilerin sonuçlarıdır. Ve her zaman düzenliliklerle yan yana varolan düzensizliklere ilişkin olarak bile insan kendisini, kavrayışımızın gelişiminin belli bir aşamasında bize bütünüyle düzensiz görünebilen olguların bir gün çok daha ince düzenlilik biçimleri barındırdığının görüleceğini ve bunun da çok daha derin nedensel ilişkilerin varlığını akla getireceğini kabul etmek üzere genel bilimsel deneyim temeline kendisini dayandırır”.[2]*

## MATEMATİKSEL AÇIDAN RASSALLIK

Rasgele bir deneyin tüm mümkün sonuçlarının kümesine  $\Omega$ , Örnek Uzay, Örnek uzayın her bir elemanına örnek nokta, örnek uzayın herhangi bir alt kümesine  $(A)$  ise olay denir. Örneğin bir hastane de hergün doğan bebeklerin sayısı, atılan bir çift zarın sayı değerlerinin toplamı (2 ile 12 de dahil olmak üzere bu aralıktaki herhangi bir tam sayı değeri olabilir), bir otobüsün belirli bir durağa varış anı vb. Bütün bunlar rassal değişkenlerdir. Matematiksel olarak bunu  $\Omega$  bir deneyin örnek uzayı olmak üzere.

$X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

Reel değerli fonksiyona rassal değişken denir: Örneğin 10 kez atılan bir madeni parada rassal değişken yazıların sayısıysa bu değişkenin alabileceği tesadüfi değerler  $X(w)=0,1,2,...,10$  olacaktır. Atılan bir çift zarda gelen değerlerin çarpı diye fonksiyonu tanımladığımızda ise  $X(w)=2,3,...,36$  değerlerinden birini alır. Rassal değişken ayrık değerler olabilir, sürekli değerler olabilir, veya bunların karması da olabilir, bu niteliklerine göre rassal değişkenlere farklı isimler verilir (Binom, Poisson, Düzgün, Gaussian vb.). Bir rassal değişkenin olabilme ihtimali ise olasılık fonksiyonuyla hesaplanır. Ayrık rassal değişkenlerin çok sık olması durumunda ayrıklıktan sürekliliğe geçiş söz konusudur. Fakat bu sonsuzluk durumunda söz konusu olduğundan (limit durumu) günlük yaşamla hangi boyutta örtüştüğü tartışma konusu yapılabilir. Fakat biz bu bölümde sadece rassal değişkenin matematiksel tanımını vermekle yetiniyoruz.

## SÜREKLİLİK VE RASSALLIK

Süreklilik hemen hemen herkesin yabancı olmadığı bir konudur. Süreklilik kesikli olmayan kesintisizliktir, kırılgan değildir. Sürekli olan bir grafikte boşluk yoktur. Sürekliliğin karşıtı ayrıklıktır. Okyanusu, gökyüzünü sürekli, deniz kıyısındaki kum tanelerini, evrende yaşayan her canlı nesneyi ise ayrık olarak düşünebiliriz.

Bu durum sonu gelmez kafa karışıklıklarına yol açar ve gerçekten de her türlü saçma ve keyfi düşüncüyü mazur göstermeye hizmet eden bir tür tuzaktır.

Potansiyel olanın gerçek haline gelmesi için, koşulların özel bir biçimde ardı ardına sıralanışı gerekir. Dahası, bu basit, doğrusal bir süreç değil, küçük nicel değişimlerin

birikerek en sonunda nitel bir sıçrama ürettiği diyalektik bir süreçtir. Soyut olanın tersine gerçek olanak, onun sayesinde, potansiyel olanın geçicilik karakterini yitireceği ve gerçek haline geleceği tüm gerekli faktörlerin varlığına işaret eder. Ve Hegel'in açıkladığı gibi, bu olanak, ancak bu koşullar varolduğu sürece gerçek olarak kalacaktır, daha uzun bir süre değil. İster bir bireyin yaşamına, ister bir sosyoekonomik formasyona, ister bir bilimsel teoriye, isterse de herhangi bir doğal olguya değinelim, bu doğrudur. Bir değişimin kaçınılmaz hale geldiği nokta, Hegel tarafından bulunan ve “düğümlü ölçü çizgisi” olarak bilinen yöntemle saptanabilir. Eğer herhangi bir süreci bir çizgi olarak ele alırsak, bu gelişim çizgisinde, sürecin ani bir hızlanmaya ya da nitel bir sıçramaya uğradığı özel noktalar (“düğüm noktaları”) olduğu görülecektir.[5]

Neden ve sonucu yalıtık durumlar olarak tanımlamak kolaydır, bir kimsenin bir topa beyzbol sopasıyla vurmasındaki gibi. Ama daha geniş bir anlamda, nedensellik kavramı çok daha karmaşık bir hale gelir. Tekil nedenler ve sonuçlar, nedenin sonuca dönüştüğü –ve tersi– uçsuz bucaksız bir etkileşim okyanusunda kaybolurlar. Her zaman yeni bazı nedenler olacaktır ve sırası geldiğinde onlar da açıklanmak zorunda kalınacaktır ve sonsuza değin bu böyle gidecektir. Sonuç olarak rassallık olgusunun nedensellikle koşullanır. İkisi arasındaki karşılıklı ise görecelidir, göreceliği besleyen ise sürekliliktir. Rassallıklar süreklilik içinde zorunluluğa dönüşebilir, bunun tersi de olasıdır. Yani ikisi aslında bir birini tamamlar. Yaşam içindeki her olgu ve olay iç ve dış nedenlerden etkilenir. Dış etken ile iç etken arasındaki temel bazı farklılıklar olmasına karşın, doğada ve toplumda var olan her şey bir şekilde bir birine bağlıdır ve bir birini etkiler. Şeyler arasındaki etkileşim sürekliktir. İnsan için var olmak belki tesadüfidir ama varlığını sürdürmesi için temel koşul ise yemek ve içmek zorunluluğudur. Toplumsal yaşam içinde olay ve olguların rassallık temelinde olması durumunda karmaşa ve düzensizlik baş göstereceğinden, toplumsal yaşamın sürekliliği için zorunluluk rassallıklar içinde kendi yolunu er yada geç bulur. Bu zorunluluk rassallığın bir sonucudur da. Rassallık bu noktada nesnel zorunluluğu yani bir yasayı gizler. Benzer durum bilimsel deneylerde de söz konusudur. Gaz molekülleri alabildiğine karmaşık rassal yörüngeler çizerler, fakat yine büyük sayılar yasası temelinde bu gazlar kapalı bir kap içine konulduğunda gaz moleküllerinin davranışları yine rassaldır, ama

konuldukları kabın duvarındaki gaz basıncı zorunlu olarak aynıdır. Zorunlulukla tesadüf arasındaki diyalektik ilişki doğal seleksiyon sürecinde gözlenebilir. Bir organizma içindeki rastlantısal mutasyonların sayısı sonsuz büyüklüktedir. Ne var ki, özel bir çevrede bu mutasyonlardan biri organizma açısından kullanışlıdır ve korunur, diğerleri ise yok olup gider. Sonuçta zorunluluk kendisini tesadüf aracılığıyla dışa vurur

Rastlantısal ve kaotik olduğu düşünülen doğal süreçlerin, şimdi bilimsel anlamda yasalara uygun oldukları ortaya çıkmıştır ve bu da determinist nedenler için bir temel anlamına gelmektedir. Kaos kuramı bütün bilim dallarına uygulanabilen ve bazılarının devrim dedikleri yeni bir bakış açısı ve metodoloji oluşturmuştur. Bir metal çubuğun mıknatıslanmış olduğunu kabuledelim, tüm parçacıklarının aynı yönü gösterdiği “düzenli bir durum” a geçer. Bu çubuk şu ya da bu yöne yönlendirilebilir. Teorik olarak, herhangi bir yöne dönmekte “özgür”dür. Pratikte ise metalin her küçük parçası aynı “kararı” verir.

Bir kaos bilimcisi, bir eğreltiotunun yapraklarının “fraktal geometrisini” tanımlayan temel matematiksel kuralları bütün ayrıntılarıyla inceledi. Bu bilgiyi rastlantısal sayı üreticisine sahip olan bilgisayara girdi. Bilgisayar, ekranı üzerine rastlantısal olarak konan noktaları kullanarak bir resim çizmeye programlanmıştı. Deney ilerlerken, her bir noktanın nerede ortaya çıkacağını öngörmek mümkün değildir. Ama şaşmaz bir biçimde, eğreltiotu yaprağının görüntüsü oluşur. Bu iki deney arasındaki yüzeysel benzerlik apaçıktır. Ama daha derin bir paralelliği akla getirir[4]. Tıpkı bilgisayarın görünüşteki rastlantısal nokta seçimlerini (ve bilgisayar “dışındaki” gözlemciye göre her türlü pratik amaç bakımından bu seçim rastlantısaldır) etrafıca tanımlanmış matematiksel kurallara dayandırması gibi, fotonların (ve tüm kuantum olaylarının) davranışlarının da, içinde bulunduğumuz zaman diliminde insan kavrayışının oldukça ötesindeki temel matematiksel kurallara tâbi olduğu düşünülebilir.

.

## Yararlanılan Kaynaklar

- [1] I. Asimov, *New Guide to Science*, 1986, s.540]
- [2] D. Bohm, *Causality and Chance in Modern Physics*, 1984, s.86 ve 87.
- [3] T. Ferris, *The World Treasury of Physics, Astronomy, and Mathematics*, 1993
- [4]. James Gleick and Michael Jackson, *Chaos, Making a New Scienc*,2002.
- [5] Hegel, *Philosophy of Right*, 1991, s.10-29.
- [6] E. J. Lerner, *The Big Bang Never Happened* , 1992
- [7] Özbek, L. Rasgelelik, PİVOLKA, 2(3), 2003, s 6.
- [8] I. Stewart, *Does God Play Dice?*, Blackwell Publishers ,1990
- [9]S.Wolfram, *New Kind of Science*, 2002

## YAZARLARIN ÖZGEÇMİŞİ

### Ünal UFUKTEPE

4.3.1960 Develi doğumlu, evli ve iki çocuk babasıdır. 1983 ODTÜ Matematik Lisans Bölümü mezunudur. Yüksek Lisansını Ankara Üniversitesinde 1986 yılında tamamladı, dört yıl Antalya’da özel bir eğitim kurumunda matematik ve bilgisayar öğretmenliği yaptı. 1990 yılında Akdeniz Üniversitesi Matematik Bölümünde araştırma görevlisi olarak çalıştı. Aralık 1996 da ABD de University of Missouri-Columbia’da doktorasını tamamladı. Ağustos 1998 de İzmir Yüksek Teknoloji Enstitüsünde Matematik Bölümü kurucu bölüm başkanı olarak göreve başladı. 2005 yılında doçentilik ünvanını aldı. Kendisinin uluslararası ve ulusal bir çok dergide makaleleri vardır. Ayrıntılı bilgi:<http://homes.ieu.edu.tr/~uufuktepe>

**Günnur UFUKTEPE**

4.3.1964 Develi doğumlu, evli ve iki çocuk annesidir. 1987 Ankara Üniversitesi Astronomi ve Uzay Bilimleri Bölümü mezunudur. 2006 yılında Ahmet Yesevi Üniversitesi Yönetim ve Bilişim Sistemleri Bölümünde Yüksek Lisansını tamamladı.

1987-1992 yıllarında Antalya Kolejinde bilgisayar öğretmenliği yaptı. 1992-1996 yıllarında ABD özel bir huzur evinde yönetici olarak çalıştı. 1997-1998 Antalya Koleji, 1998-2000 Ekin Kolejinde bilgisayar öğretmenliği olarak çalıştı. 2000 yılından beri İzmir Yüksek Teknoloji Enstitüsünde öğretim görevlisi olarak enformatik derslerine girmektedir. Uzaktan eğitim üzerine ulusal ve uluslararası makaleleri vardır.

## REGRESYON ANALİZİ'NİN GEOMETRİSİ

**Gülhayat Gölbaşı Şimşek<sup>1</sup>**

**Seher Arıkan Tezergil<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>Yıldız Teknik Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi,  
İstatistik Bölümü,Davutpaşa Kampüsü, Esenler, 34210, İstanbul  
Tel:0212 4491709, Fax:02124491706,  
[e-mail: gulhayat\_golbasi@yahoo.com]

<sup>2</sup>Marmara Üniversitesi, Bankacılık ve Sigortacılık Yüksekokulu,  
Aktüerya Bölümü, Göztepe Kampüsü, 81040, Kadıköy,İstanbul,  
Tel:0216 4149989-0212 5134742  
[e-mail: sehertezergil@yahoo.com]

### ÖZET

Bu çalışmanın amacı, soyut düşünce gerektirmesi ve anlatımının-aktarılmasının cebirsel yaklaşıma göre daha zor olması gibi çeşitli nedenlerden dolayı ihmal edilmiş olan fakat istatistiksel model ve varsayımlarının daya iyi anlaşılmasını ve yorumlanmasını sağlayan geometrik yaklaşımların regresyon analizinde kullanılmasıdır.

**Anahtar Kelimeler :** Geometri, En Küçük Kareler, Regresyon, Projeksiyon Matrisleri,Çoklu Doğrusal Bağlantı,KDRM varsayımları,Hipotez Testleri.

## 1. GİRİŞ

Regresyon analizini de içeren Genel Doğrusal Modeller (GDM) En Küçük Kareler(EKK) tahmin yöntemine dayanmaktadır. GDM oluşturulurken veya geliştirilirken cebirsel veya geometrik yaklaşımlar kullanılabilir. Geometrik gösterim ve çıkarsama modelin ana fikrinin, oluşturulma mantığının ve varsayımlarının daha iyi anlaşılmasını, kullanılmasını ve yorumlanmasını sağladığı halde hiçbir zaman yaygın olarak kullanılmamış, cebirsel yaklaşımlar bu güne dek popülerliklerini sürdürmüşlerdir.

Bu çelişkinin en basit ve belki de en doğru açıklaması “gelenek”tir. Ne Carl F. Gauss'un ne de A.M. Legendre'nin EKK'yı bu çalışmada verilecek olan geometrik bakış açısıyla değerlendirmemiş olmaları bu geleneğin günümüze dek sürdürülmesine sebep olmuştur. Geometrik yaklaşımın ihmal edilmesinin bir diğer sebebi de soyut düşünce gerektirmesi ve anlatımının-aktarılmasının cebirsel yaklaşıma göre oldukça zor olmasındandır.

Varyans analizi, regresyon analizi gibi çok yaygın olarak kullanılan istatistiksel teknikler N boyutlu öklit uzay matematiğinin uygulamalarını temel almaktadırlar. Maalesef bu kavramlar giriş veya orta seviyedeki istatistik derslerinde nadir olarak ele alındığından serbestlik derecesi, deneysel tasarımda diklik, dik polinomlar gibi anlaşılması oldukça zor olan kavramlara sadece cebirsel bakış açısından anlam yüklenebilmektedir. Diğer taraftan yüksek seviyedeki istatistik derslerinde de matematik o derece sofistiktir ki matematikçi olmayanların takip etmesi neredeyse olanaksızdır. Bu nedenle, bu iki ekstrem durum arasında bir köprü kurulması aradaki boşluğun tamamlanması gerekmektedir. Bu amacı gerçekleştirmenin en uygun yolu da geometrik yaklaşımdan faydalanmaktır. İstatistikte geometrik yaklaşımın kullanılmasının başka bir bakış açısından gerekçesi de beynin sol yarısının(hemisfer) ayrık, sembolik (dolayısıyla cebirsel) işleyişten sorumluyken, sağ hemisferin konumsal görsel (dolayısıyla geometrik) işleyişten sorumlu olmasına dayanmaktadır. Bu sebepten sadece cebirsel mantık kullanmak beynimizin yarısını kullanmaktan vaz geçmek anlamına gelmektedir.

Geometrik yöntemin kullanımında biri gözlem vektörü diğeri model uzayı olmak üzere iki temel malzeme; ve gözlem vektörünün model uzayına projeksiyonu ve de Pisagor Teoremi'nin uygulanması olmak üzere iki tane de temel işlem gerekmektedir.

Model uydurmak için  $Y$  vektörü  $(y = (y_1, \dots, y_n)')$   $M$  alt uzayı üzerine projeksiyon yapılmaktadır. Uydurulan model parametreleri için hipotez testlerinin yapılması için ise pisagor teoremi kullanılmaktadır. Test istatistikleri ilgili kareli uzunlukların ortalamalarının karşılaştırılması mantığına dayanmaktadır.

Özetle veriden elde edilen  $y$  ve modelden çıkarılan  $M$  malzemeleri ile projeksiyonlar ve Pisagor Teoremi'nin uygulanması geometrik analiz için yeterli olmaktadır.

Amacın  $\beta$ 'nin tahmin edilmesi ve hipotez testlerinin yapılması olan  $y = X\beta + \text{hata}$  şeklindeki regresyon modelinde veri kümesi  $y = (y_1, \dots, y_n)'$ 'nin  $n$  boyutlu öklid uzayı  $R^n$ 'de, parametre vektörü,  $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k)'$ 'nin  $R^k$ 'da olduğu varsayılmaktadır. Burada  $k \leq n$  olmak üzere  $X$   $n \times p$  boyutlu matristir.  $\beta$ 'nin tahmininde kullanılan yöntemlerden en yaygını olan EKK metodu da hata vektörünün uzunluğunun minimize edilmesine dayanmaktadır.

Bu çalışmada öncelikle istatistikte geometrik yaklaşım için literatür taraması yapılmıştır. Daha sonra istatistik ve olasılığın temel kavramlarının geometrik anlamlarına kısaca değinilerek regresyon analizinin geometrisi aşağıda verilen sırada irdelenmiştir.

- 1) Şapka (Hat) matrisi geometrik yoldan türetilmiş ve projeksiyon matrislerinin istatistikteki önemi vurgulanmıştır.
- 2)  $(y - \bar{y})$  vektörü ve bulunduğu uzay dik bileşenlerine ayrıştırılmıştır.
- 3) Klasik Doğrusal Regresyon Modeli (Gauss-Markov) varsayımlarının geometrik anlamı ve varsayımların geometrik ifadelerinden yararlanılarak  $\hat{\beta}$  bulunmuş,  $\hat{\beta}_0$  ve  $\hat{\beta}_1$ 'in geometrisi gösterilmiştir.
- 4) Belirginlik katsayısı  $R^2$  geometrik yaklaşım kullanılarak türetilmiştir.

Özetle bu çalışmanın amacı, EKK Tahmin Yönteminin ve Regresyon Modeli'nin geometrik olarak ele alınması ve incelenmesidir.

## 2. İSTATİSTİKTE GEOMETRİK YAKLAŞIMLAR

İstatistikte cebirsel yaklaşımın çok daha yaygın olarak kullanıldığı gerçeğinin inkar edilememesi ile birlikte geometrinin araç veya amaç olarak kullanıldığı son derece önemli çalışmalar da bulunmaktadır.

Herr(1980) makalesinde istatistiğe geometrik yaklaşımın tarihinden bahsetmiş ve kendisi de bir örnek olarak  $s^2$ 'nin dağılımını geometrik yaklaşımla türetmiştir[1]. Herr makalesinde Fisher(1915), Barlett(1933-34), Durbin ve Kendall(1951), Kruskal(1961,1968,1975),Zyskind(1967) ve Watson(1967)'un geometrik ifadeleri veya geometriyi kullanmaları hakkında kısa yorumlar da yapmıştır([2],[3],[4],[5],[6],[7],[8],[9]).

Fisher (1915) makalesinde iki değişkenli normal dağılımdan çekilen  $n$  birimli örnek için korelasyon katsayılarının dağılımı ile ilgilenmiş ve yaklaşımında sadece geometrik ifadelerle yer vermiştir[2].

Barlett(1933-34) makalesinde  $n$  boyutlu örneği  $n$  boyutlu vektör olarak düşünmenin avantajlarından bahsetmesinin yanı sıra Latin kare tasarımı için geometrik ifadeler kullanmıştır[3].

Durbin ve Kendall (1951) makalelerinde tahmin geometrisinden bahsetmişler, örnek ortalamasının minimum varyans ve sistematik hatasızlık özelliklerini geometrik olarak ifade etmişlerdir[4].

Kruskal(1961) makalesinde Gauss-Markov (doğrusal en küçük kareler) tahmini için geometrik yaklaşımlar önermiş ve diğer doğrusal modeller için de benzer çalışmaların yapılmasını ümit ettiğini belirtmiştir. Kruskal'da Barlett(1933-34) gibi çalışmasında analitik geometriden faydalanmıştır[5].

Zyskind (1967) makalesinde en küçük kareler tahmincisinin aynı zamanda BLUE tahminci olduğunu ifade etmek için analitik geometriden faydalanmıştır[8].

Watson (1967) makalesinde EKK regresyonunu geometrik ifadeler kullanarak anlatmış ve hata vektörlerini incelerken varyans kovaryans spektral ayrıştırmasını kullanmıştır[9].

Kruskal (1968 ve 1975) makalelerinde de doğrusal modellere analitik geometrik yaklaşım için ayrıntılı düşünülmüş örnekler sunmuştur. Kruskal(1975) makalesinde genelleştirilmiş tersler için analitik geometrik yaklaşım kullanmış[7], (1968) makalesinde ise Zyskind (1967) gibi EKK tahmincisinin BLUE özelliği üzerine yoğunlaşmıştır[8].

Bu makalelerin yanı sıra Seber (1977), Scheffe (1959) geometrik yaklaşımı kullanan kitaplar yazmışlardır[10,11]. Üstelik Scheffe(1959) saf geometrik bir kitabın değer görmeyeceğini düşünüyor olmasına rağmen böyle bir girişimde de bulunmuştur.

Konularına kısaca değinilmiş olan bu çalışmaların dışında Seely(1970a,1970b), Seely ve Zyskind(1971),Cleveland (1971),Burdick v.d. (1974), Haberman (1975), Herr (1976) ve Eaton (1970) makalelerinde analitik geometriyi kullanmışlardır. Swindel(1974), Schey(1985), Morgolis(1979), Bryant(1984)' da Kruskal (1961)'in isteğini yerine getirerek istatistik kavramlara geometrik yaklaşımlar önermişlerdir ([12],[13],[14],[15],[16],[17],[18],[19],[20],[21]). Bryant(1984) istatistik kavramların koordinattan bağımsız ve analitik biçimler, vektör uzayları olmak üzere geometrik ifadelerini, istatistik ifadelerini ve olasılık ifadelerini birlikte gösteren bir tablo hazırlamış ve bazı istatistik yöntemlerin geometrisinden de bahsetmiştir[22].

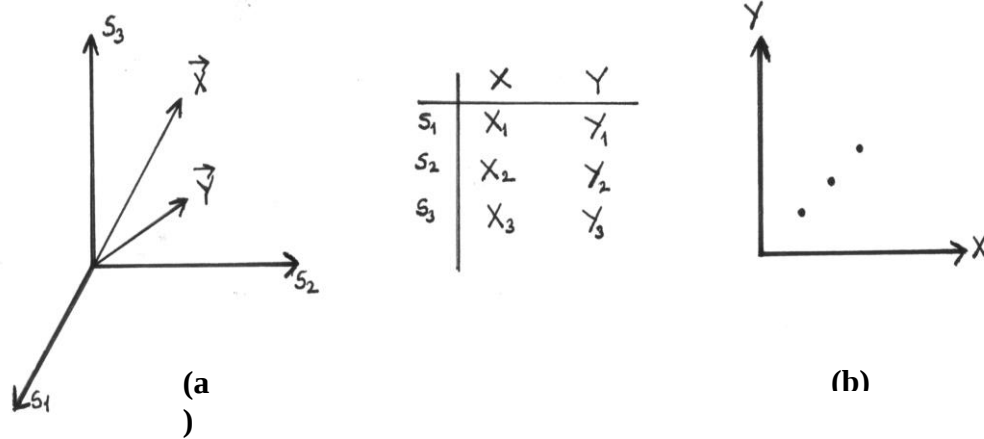
Kendall (1961) istatistiği geometrik düşünmenin temellerini örneklerle açıklayan temel bir kitap yazmıştır[23]. Bunun yanı sıra özellikle çok değişkenli istatistik yöntemlerin sadece geometrik yaklaşımla anlatıldığı Wickens (1995)'in kitabı sadece geometrik düşünmenin son dönem örneklerinden biridir[24].

Kruskal'ın geometrik çalışmalarını yapmak için kendisinden ilham aldığı Saville ve Wood (1986) da makalelerinde daha önceki makaleleri de referans göstererek, n boyutlu geometriyi kullanarak istatistik öğretmenin yöntemlerinden bahsetmişlerdir[25].

### 3. BAZI TEMEL İSTATİSTİK KAVRAMLARA GEOMETRİK YAKLAŞIMLAR

#### 3.1 GÖZLEM VEKTÖRÜ

n birimlik veri kümesi, n boyutlu öklid uzayı  $R^n$ 'de bir istatistiksel vektör tanımlamaktadır([26],[27]). Şekil 1'de  $S_1$ ,  $S_2$  ve  $S_3$  olarak adlandırılan üç birimden oluşan bir veri seti için ve  $\bar{Y}$  gözlem vektörleri gösterilmektedir.

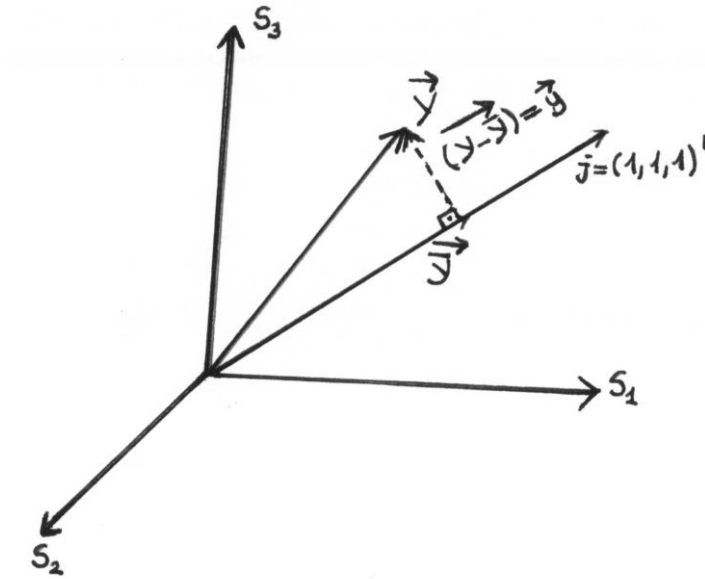


Şekil 1. (a) Gözlem vektörü (b) Serpilme Diyagramı

Şekil 1(b)'deki veri seti değişken uzayında bir serpilme diyagramı ile de gösterilebilmektedir. Şekil 1(a)'daki kişi veya obje uzayı  $R^3$ 'de ise değişkenler vektör olarak gösterilmektedirler. Serpilme diyagramlarından değişkenler arasındaki ilişkiler (doğrusal-eğrisel-ilişki yok) belirlenebilirken, soldaki gözlem vektörlerinden hareketle değişkenlerin varyansları ve aralarındaki korelasyon katsayısı hakkında bilgi edinilebilmektedir.

### 3.2 ÖRNEK ORTALAMASI

$n$  birimli örneğin ortalaması,  $Y$  gözlem vektörünün  $J = (1,1,\dots,1)'$  vektörüne projeksiyonundan elde edilmekte (Şekil 2) ve merkezileştirilmiş değişkenler veya vektörler küçük harfle gösterilmektedir ( $\vec{y}$ ).



Şekil 2. Örnek Ortalamalarının Bulunması

### 3.3 ÖRNEK VARYANSI

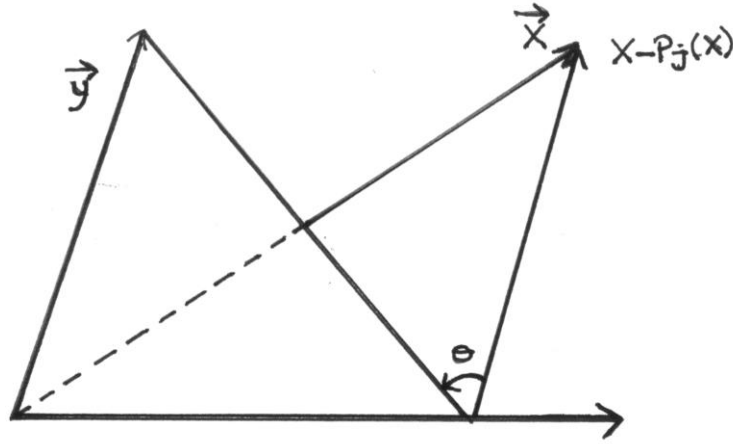
$$\text{Örnek varyansı} = s_x^2 = \frac{\sum (X_i - \bar{X})^2}{n-1} = \frac{|X - P_J(X)|^2}{n-1} \quad \text{olduğundan, } (X - \bar{X})$$

vektörünün uzunluğunun karesinin  $(n-1)$ 'e bölümü olmaktadır.  $(X - \bar{X}) = x$  olarak gösterilirse  $|\bar{x}| = (n-1)s_x$  olduğundan bir vektörün uzunluğunun bu vektörün standart sapmasıyla orantılı olduğu görülmektedir[28]. Bu bakımdan Şekil 1'de olduğu gibi gözlem vektörlerinin uzunlukları standart sapmaları hakkında bilgi sağlamaktadır.  $(n-1)$  katsayısı  $R^n$ 'deki her gözlem vektörü için aynı olduğundan bir vektörün uzunluğuna ilgili değişkenin standart sapması gözüyle bakılabilmektedir.

### 3.4 KORELASYON KATSAYISI

$$r_{XY} = \cos \angle(\vec{x}, \vec{y}) = \cos \theta = \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{|\vec{x}| |\vec{y}|} = \frac{\sum x_i y_i}{\left( \sum x_i^2 \right) \left( \sum y_i^2 \right)} \quad \text{olduğundan} \quad \text{korelasyon}$$

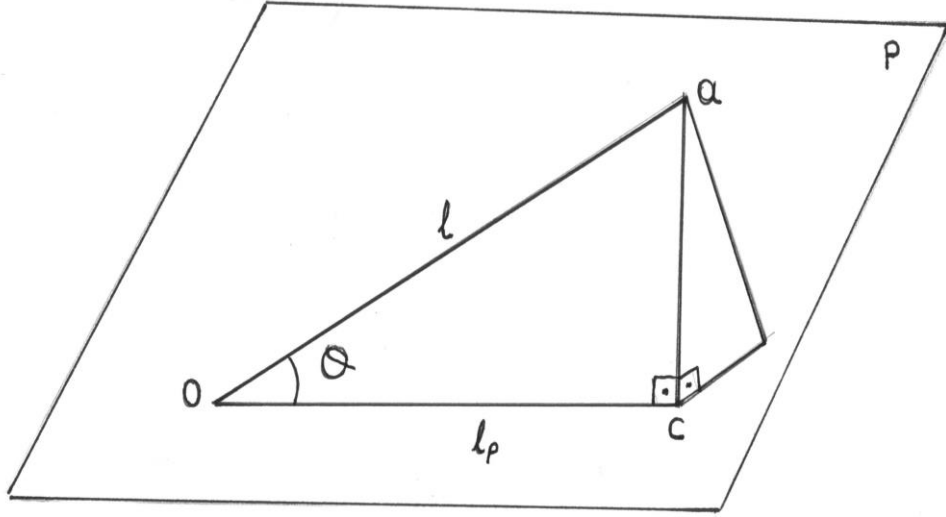
katsayısı merkezileştirilmiş iki değişken yani  $J$  vektörüne projeksiyonların gözlem vektörlerinden çıkarılmasıyla elde edilen vektörler arasındaki açının kosinüsü olmaktadır.



Şekil 3. Korelasyon Katsayısı

### 4. PROJEKSİYON MATRİSİNE GEOMETRİK YAKLAŞIM

Projeksiyon matrisleri regresyon analizi, varyans analizi, diskriminant analizi ve faktör analizleri başta olmak üzere istatistik analizlerin çoğunda kullanılmaktadır[29]. Bundan dolayı bu bölümde projeksiyon matrisi geometrik olarak elde edildikten sonra özellikleri ilgili teoremleriyle birlikte verilecektir[30]. Temel istatistik yazında projeksiyon matrisleri en fazla regresyon analizinde kullanılmakta ve  $H$  (şapka) projeksiyon matrisini göstermek üzere sadece  $H = X(X'X)^{-1}X'$  ve  $\hat{Y} = HY$ ,  $e = (I - H)Y$  olduğuna değinilmektedir. Burada  $X$ ;  $n \times (p+1)$  boyutlu bağımsız değişkenler matrisi ve  $p$  de bağımsız değişken sayısını ifade etmektedir.



**Şekil 4: Projeksiyon Matrisinin Elde Edilmesinde Kullanılan Geometrik Kavramlar [30]**

Şekil 4'deki  $E_3$  uzayındaki P düzlemi  $b_1$  ve  $b_2$  noktalarından ve orjinden geçen bir düzlem olsun.

$B = [b_1, b_2, 0]$  olduğundan  $\text{rank}(B) = 2$ 'dir.

Orjinden a noktasına doğru parçasına  $\ell$  diyelim. ( $a \neq 0$ )  $\ell$ 'nin bitiş noktasından P düzlemine bir dikme indirelim. Bu dikmenin P düzlemiyle kesiştiği noktaya c diyelim. O'dan c'ye doğru parçası  $\ell_p$ 'ye,  $\ell$ 'nin P'ye ortogonal(dik) projeksiyonu denir. Eğer ac doğru parçası P'ye dikse, P'deki her doğruya da diktir. Eğer P düzlemi  $b_1$  ve  $b_2$  gibi iki noktayla tanımlanmışsa, doğrultu vektörü a-c olan, c'den a'ya doğru parçası, O ve  $b_1$  noktalarından geçen ve O ve  $b_2$  noktalarından geçen doğrulara da dik olmak zorundadır. Yani;

$$(a - c)' b_1 = 0 \text{ ve } (a - c)' b_2 = 0 \quad (1)$$

P üzerindeki her nokta  $y = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2$  olarak yazılabildiğinden c noktası da  $c = \lambda_1^* b_1 + \lambda_2^* b_2$  olarak yazılabilir. c noktasını (1)'de yerine koyalım.

$$(\lambda_1^* b_1 + \lambda_2^* b_2)' b_1 = a' b_1$$

$$(\lambda_1^* b_1 + \lambda_2^* b_2)' b_2 = a' b_2$$

Buradan  $\lambda_1^*$  ve  $\lambda_2^*$  dolayısıyla c ve  $\ell$ 'nin P'ye projeksiyonu olan  $\ell_p$  bulunabilmektedir.

**Teorem 1(  $R^n$  İçin Genelleştirme)**

$P_k^n = E_n$  'de orjinden ve  $b_1, b_2, \dots, b_k$  noktalarından geçen bir düzlem olsun.

$$B = [b_1, b_2, \dots, b_k] \quad \text{rank}(B) = k$$

$\ell^*$  : a'dan c'ye doğru parçası  $P_k^n$  düzlemine diktir. Dolayısıyla düzlemdeki her bir doğruya da dik olacaktır.

$\ell^*$ 'in denklemi :

$y = \lambda (c-a) + a$  ;  $0 \leq \lambda \leq 1$  şeklinde yazılabilir.  $\ell^*$  için yön vektörü (c-a)'dır.

$$\left. \begin{array}{l} (c-a)' b_1 = 0 \\ (c-a)' b_2 = 0 \\ \vdots \\ (c-a)' b_k = 0 \end{array} \right\} \text{ ise } c' b_i = a' b_i \quad i = 1, 2, \dots, k \quad \text{veya matris gösterimiyle}$$

$$c' B = a' B \quad (2)$$

c,  $P_k^n$  düzlemi üzerinde bir nokta olacağından

$$c = \sum_{i=1}^k \lambda_i b_i \quad \text{veya } c = B \lambda \quad ; \quad \lambda' = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k]$$

c'yi (2)'de yerine koyalım:

$$\lambda' B' B = a' B$$

B matrisi k ranklı  $n \times k$  boyutlu olduğundan,  $B' B$  tekil değildir.

$$\lambda' = a' B (B' B)^{-1} \quad \text{ve}$$

$$c = B (B' B)^{-1} B' a \quad (3)$$

(3) denklemi  $c = H a$  olarak ifade edildiğinde H matrisi

$$H = B (B' B)^{-1} B' \quad (4)$$

geometrik olarak türetilmiş olmaktadır. Projeksiyon (hat) matrisi  $= H = H'$  ve  $H = H^2$  özelliklerini sağlayan simetrik ve idempotent matristir. Aşağıda projeksiyon matrislerinin serbestlik derecesi ve bağımsızlık gibi bazı istatistik kavramların açıklamasında kullanılabilecek ilgili özellikleri teoremleriyle beraber verilmektedir.

**Teorem 2 :**  $A_{n \times n}$  simetrik idempotent matris olsun.

$B_1, B_2, \dots, B_k : n \times n$  negatif olmayan matrisler olsun.

$$I = A + \sum_{i=1}^k B_i \quad (5)$$

olduğunu varsayarsak

$$AB_i = B_i A = 0 \quad i = 1, 2, \dots, k \quad (6)$$

olur.

İspat : (5) denklemini soldan A ile çarpalım.

$$A = A^2 + \sum_{i=1}^k AB_i \quad (7)$$

A idempotent olduğundan  $A^2 = A$  'dır.

$$\sum_{i=1}^k AB_i = 0 \text{ ve buradan } AB_i = 0 \quad i = 1, 2, \dots, k \text{ olmaktadır.}$$

**Teorem 3 :**  $B_{n \times n}$  idempotent matrisin rankı n ise,  $B = I$  'dır. Eğer B rankı n'den küçük olan simetrik idempotent matris ise B matrisi pozitif yarı tanımlıdır.

İspat : Eğer B'nin rankı n ise  $B^{-1}$  mevcuttur.

$$B^2 = B \text{ soldan } B^{-1} \text{ ile çarpılırsa}$$

$$B = I \text{ olur.}$$

**Teorem 4 :** B matrisi  $n \times n$  ve rankı p olsun. B idempotent matrisse, her biri 1'e eşit olan p tane sıfır olmayan karakteristik kökü vardır.

İspat :  $x \neq 0$  olsun.

$$Bx = \lambda x \text{ soldan B ile çarpalım.}$$

$$B(Bx) = B^2x = \lambda(Bx) = \lambda(\lambda x) = \lambda^2 x$$

$$B \text{ idempotent olduğundan } B = B^2$$

$$\lambda^2 x = B^2 x = Bx = \lambda x$$

$$\lambda(\lambda - 1)x = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \lambda = 0 \\ \lambda = 1 \end{array} \right\} \text{ idempotent matrislerin özdeğerleri 0 ve 1'dir.}$$

**Teorem 5 :**  $\text{rank}(B) = \text{iz}(B) = \sum \lambda_i = p$

**Teorem 6 :** B nxn simetrik idempotent matris ise ve i'nci diagonal elemanı 0 veya 1'e eşitse, i'nci satır ve i'nci sütundaki diagonal dışı elemanlar sıfırdır.

İspat :  $B^2 = B$  olduğundan  $b_{11}^2 + b_{21}^2 + b_{31}^2 = b_{11}$  olmalıdır.

**Örnek :**  $m \leq n$  olan  $n \times m$  X matrisini

$X = [X_1 \ X_2]$  şeklinde tanımlayalım.

$X_1 = n \times m_1 \quad X_2 = n \times m_2$  olsun.

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= I - X(X'X)^{-1}X' \\ A_2 &= X_1(X_1'X_1)^{-1}X_1' \\ A_3 &= X(X'X)^{-1}X' - X_1(X_1'X_1)^{-1}X_1' \end{aligned} \right\} \text{ ise } I = A_1 + A_2 + A_3 \text{ olmaktadır.}$$

**Örnek :**

$$\sum_{i=1}^n Y_i^2 = n\bar{Y}^2 + \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2 \text{ veya}$$

$Y'Y = Y'A_1Y + Y'A_2Y$  şeklinde  $A_1$  ve  $A_2$  idempotent matrisleri kuadratik

formların ayrıştırılmasında kullanabilmektedirler. Burada

$A_1 + A_2 = I$  olmak üzere

$$A_1 = \frac{1}{n}J \text{ ve } A_2 = I - \frac{1}{n}J$$

$$iz(A_1) = iz\left(\frac{1}{n}J\right) = \frac{1}{n}iz(J) = 1$$

$$iz(A_2) = n - 1 \text{ ve } A_1A_2 = 0.$$

#### 4.1 PROJEKSİYON MATRİSİNİN REGRESYON ANALİZİNDE KULLANIMI

Projeksiyon matrisleri bütün doğrusal modellerin, dolayısıyla regresyon analizinin ve serbestlik derecesi mantığının anlaşılmasında oldukça faydalı olduğu gibi  $\hat{Y}$  ve e vektörlerinin doğrudan hesaplanmasında da kullanılmaktadır[31].



$$P2 = H - P1 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & -0.5 \\ 0 & 0 & 0 \\ -0.5 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

buradan  $\text{iz}(P2)=\text{rank}(P2)=0.5+0+0.5=1$ 'dir(regresyon kareleri toplamı için serbestlik derecesi).

$$P3 = I - H = \begin{bmatrix} 0.167 & -0.333 & 0.167 \\ -0.333 & 0.667 & -0.333 \\ 0.167 & -0.333 & 0.167 \end{bmatrix} : Y\text{'nin hata uzayına projeksiyonunu}$$

sağlayan matris; buradan  $\text{iz}(P3)=\text{rank}(P3)=0.167+0.667+0.167=1$ 'dir (hata kareleri toplamı için serbestlik derecesi).

$$|H| = 0 \text{ 'dır.}$$

$$H\text{'ın özdeğerleri} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P1\text{'in özdeğerleri} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$P2\text{'nin özdeğerleri} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P3\text{'ün özdeğerleri} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Bir vektör veya matrisin oluşturduğu alt uzaya projeksiyonu kendisidir:

$$HJ = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad H \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad H \cdot X = X = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$P1 + P2 + P3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$\bar{Y} = P1 \cdot Y = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \hat{y} = \beta x = P2 \cdot Y = \begin{bmatrix} -1.5 \\ 2.498 \cdot 10^{-15} \\ 1.5 \end{bmatrix}, \quad e = P3 \cdot Y = \begin{bmatrix} -1.5 \\ 3 \\ -1.5 \end{bmatrix}$$

$$\hat{Y} = P1 \cdot Y + P2 \cdot Y = H \cdot Y = \begin{bmatrix} 3.5 \\ 5 \\ 6.5 \end{bmatrix} : \hat{Y} \text{ vektörü bulunmuş olmaktadır.}$$

$$Y = P1 \cdot Y + P2 \cdot Y + P3 \cdot Y = \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \\ 5 \end{bmatrix} Y \text{ vektörü bulunmuş olmaktadır.}$$

Bütün bunlardan hareketle  $Y$ 'nin bulunduğu  $n=3$  boyutlu uzay projeksiyon matrisleri yardımıyla birbirine dik 3 alt uzaya parçalanmış olmaktadır. Alt uzayların birbirine dik olması Pisagor Teoremi'nin kullanılmasına olanak sağlamaktadır.

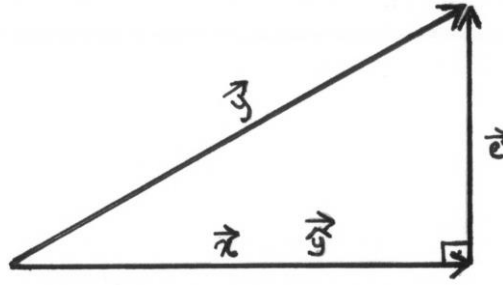
$$\sum (y - \bar{y})^2 = \sum (\hat{y} - \bar{y})^2 + \sum (y - \hat{y})^2 \text{ cebirsel ifadesinin geometrik anlamı}$$

hipotenüs<sup>2</sup> = (dik kenarların uzunluklarının karelerinin toplamı) şeklindeki pisagor teoreminden şekil 5'te görüldüğü gibi

$$(\sqrt{18})^2 = (\sqrt{4.5})^2 + (\sqrt{13.5})^2 \text{ olmaktadır.}$$

## 5. TEK DEĞİŞKENLİ REGRESYONDA PARAMETRE TAHMİNLERİNİN GEOMETRİK YOLDAN TÜRETİLMESİ

Parametre tahminleri türev kullanmadan geometrik olarak türetilbilmektedir.



**Şekil 6: Tek Değişkenli Regresyonun Ortalamalardan Farklar Cinsinden Geometrik İfadesi**

$\hat{Y} = a + bX$  modeli merkezleştirilmiş değişken vektörleri kullanılarak

$\bar{\hat{y}} = b\bar{x}$  olmaktadır. Kalıntı vektörü ise ;

$\bar{e} = \bar{y} - \bar{\hat{y}} \quad \bar{e} = \bar{y} - b\bar{x}$  şeklinde ifade edilmektedir.

Şekil 6'dan da görüldüğü gibi,

$$\bar{e} \perp \bar{\hat{y}} \text{ ve } \bar{e} \perp \bar{x} \Rightarrow \bar{x} \cdot (\bar{y} - b\bar{x}) = 0$$

$$\bar{x} \cdot \bar{y} - b(\bar{x} \cdot \bar{x}) = 0 \text{ veya}$$

$$\bar{x} \cdot \bar{y} - b|\bar{x}|^2 = 0$$

$$b = \frac{\bar{x} \cdot \bar{y}}{|\bar{x}|^2} = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2} \text{ bulunmaktadır.}$$

Not : Normal denklemlerden  $\hat{\beta}_0$  ve  $\hat{\beta}_1$  bulunurken kullandığımız iki kısıt (KDRM varsayımı) vardır.

$$1) \sum x_i e_i = 0 \quad (x \perp e) \quad x\text{'ler ve } e\text{'ler korelasyonsuz veya } \text{Cov}(x_i, e_i) = 0$$

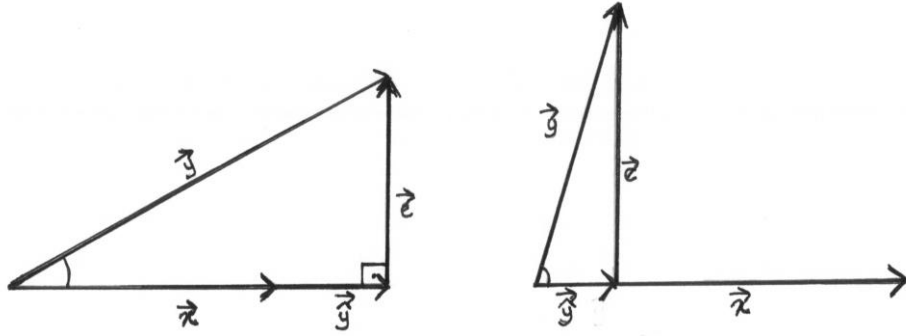
$$2) \sum e_i = 0 \quad (e \text{ vektörü regresyon düzlemine dik olduğunda } \bar{1} \text{ vektörüne, } \bar{x}$$

vektörüne ve bunların doğrusal kombinasyonu olan vektörlere de diktir, yani  $\bar{e} \perp \bar{1}$

vektörüne de dik olduğundan  $\sum e_i = 0$  dır.)

$$\bar{1}' \cdot e_i = [1 \quad 1 \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \sum e_i = 0$$

## 6. UYUM İYİLİĞİNİN ÖLÇÜLMESİ



Şekil 7: Güçlü ve Zayıf Uyum İyiliğinin Geometrik İfadesi

1)  $R = \cos \angle (\bar{y}, \hat{\bar{y}})$  Uyumun 1. ölçüsü  $\bar{y}$  ve  $\hat{\bar{y}}$  arasındaki açıdır.

2) Her zaman için  $|\hat{\bar{y}}| < |\bar{y}|$  kuralı geçerlidir. Fakat  $\hat{\bar{y}}$  vektörünün uzunluğu  $\bar{y}$  vektörünün uzunluğuna yaklaştıkça uyum artmaktadır.

$$R = \cos \angle (\hat{\bar{y}}, \bar{y}) = \frac{|\hat{\bar{y}}|}{|\bar{y}|}$$

$$|\hat{\bar{y}}| = R|\bar{y}|$$

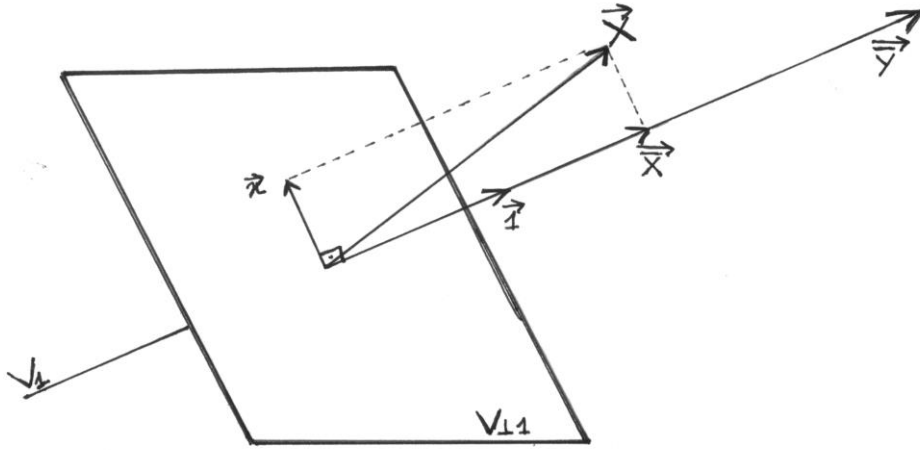
$$|\hat{\bar{y}}|^2 + |\bar{e}|^2 = |\bar{y}|^2$$

$$SS_{\text{regresyon}} + SS_{\text{kalıntı}} = SS_{\text{toplam}}$$

$$SS_{\text{regresyon}} = |\bar{\hat{y}}|^2 = R^2 |\bar{y}|^2 = R^2 \cdot SS_{\text{toplam}}$$

$$SS_{\text{kalıntı}} = |\bar{e}|^2 = (1 - R^2) SS_{\text{toplam}}$$

## 7.REGRESYON SABİTİ



Şekil 8: Regresyon Sabitinin Türetilmesinde Kullanılan Geometri

$$\bar{\hat{Y}} = a \cdot \bar{1} + b \bar{X}$$

$$\bar{Y} = \bar{\bar{Y}} + \bar{y} = \bar{Y} \bar{1} + \bar{y}$$

$$\bar{\hat{Y}} = a \cdot \bar{1} + b \bar{X}$$

$$= a \cdot \bar{1} + b(\bar{\bar{X}} + \bar{x})$$

$$\bar{\hat{Y}} = (a + b \bar{X}) \cdot \bar{1} + b \bar{x} \quad \text{ve} \quad \bar{Y} = \bar{\bar{Y}} \cdot \bar{1} + \bar{y} \quad \text{ve} \quad \bar{\hat{y}} = b \bar{x}$$

$$(a + b\bar{X}).\bar{1} = \bar{Y}.\bar{1}$$

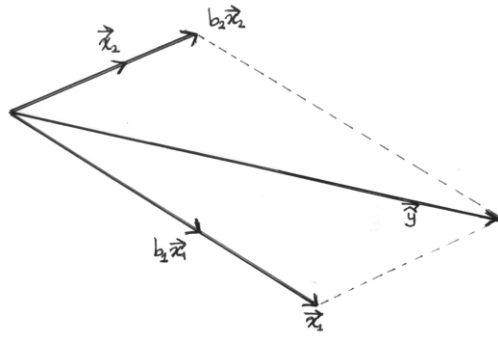
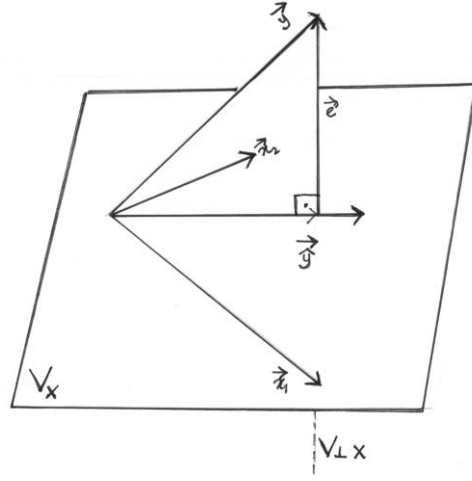
$a = \bar{Y} - b\bar{X}$  olmaktadır.

### **8.ÇOKLU REGRESYONDA PARAMETRE TAHMİNLERİNİN GEOMETRİK YOLDAN TÜRETİLMESİ**

$$\hat{Y} = a + b_1X_1 + b_2X_2 + \dots + b_pX_p$$

$$\bar{Y} = a.\bar{1} + b_1\bar{X}_1 + b_2\bar{X}_2 + \dots + b_p\bar{X}_p$$

$$\hat{y} = b_1\bar{x}_1 + b_2\bar{x}_2 + \dots + b_p\bar{x}_p$$



Şekil 9: Merkezleştirilmiş Değişkenler İçin Çoklu Regresyon Geometrisi

$$\bar{x}_1 \cdot \bar{e} = 0$$

$$\bar{x}_1 \cdot (\bar{y} - \hat{\bar{y}}) = 0$$

$$\bar{x}_1 [\bar{y} - (b_1 \bar{x}_1 + b_2 \bar{x}_2)] = 0$$

$$\bar{x}_1 \cdot \bar{y} - b_1 (\bar{x}_1 \bar{x}_1) - b_2 (\bar{x}_1 \bar{x}_2) = 0 \quad \text{ve} \quad x_1, x_2 \perp e \quad \text{için benzer denklemler}$$

yazılarak ;

$$\left. \begin{aligned} b_1 (\bar{x}_1 \bar{x}_1) + b_2 (\bar{x}_1 \bar{x}_2) &= \bar{x}_1 \bar{y} \\ b_1 (\bar{x}_1 \bar{x}_2) + b_2 (\bar{x}_2 \bar{x}_2) &= \bar{x}_2 \bar{y} \end{aligned} \right\} \text{ Bu iki denklemden } b_1 \text{ ve } b_2 \text{ bulunur.}$$

$$b_1 = \frac{(\bar{x}_1 \bar{y})(\bar{x}_2 \bar{x}_2) - (\bar{x}_2 \bar{y})(\bar{x}_1 \bar{x}_2)}{(\bar{x}_1 \bar{x}_1)(\bar{x}_2 \bar{x}_2) - (\bar{x}_1 \bar{x}_2)^2} \quad (8)$$

$$b_2 = \frac{(\bar{x}_2 \cdot \bar{y})(\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_1) - (\bar{x}_1 \cdot \bar{y})(\bar{x}_2 \cdot \bar{x}_1)}{(\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_1)(\bar{x}_2 \cdot \bar{x}_2) - (\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2)^2} \quad (9)$$

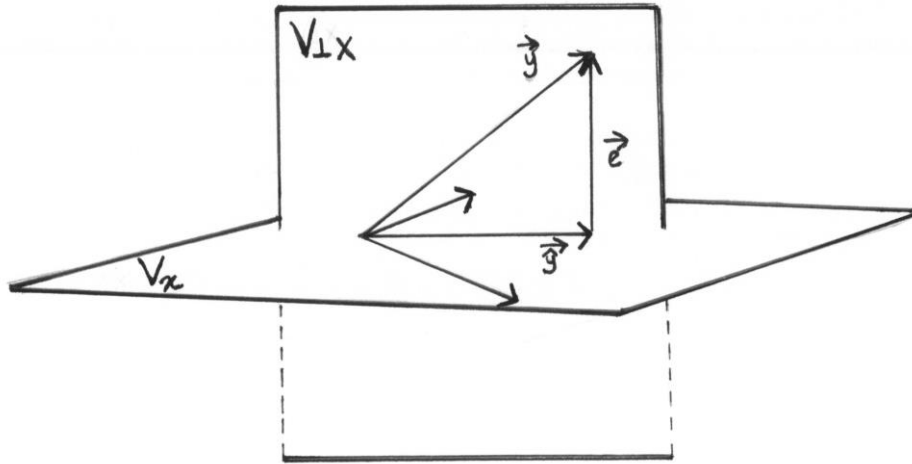
$$\bar{\hat{Y}} = a \cdot \bar{1} + b_1 \bar{x}_1 + b_2 \bar{x}_2 + \dots + b_p \bar{x}_p$$

$V_{\perp 1}$ 'deki merkezileştirilmiş değişkenlerin regresyonu ile  $b_1, b_2, \dots, b_p$  belirlenir.  $a$

katsayısı  $\bar{Y}$  ve  $\bar{\hat{Y}}$  vektörlerinin  $V_1$ 'deki projeksiyonlarını aynı yapacak şekilde seçilmektedir.

$$a = \bar{Y} - b_1 \bar{x}_1 - b_2 \bar{x}_2 - \dots - b_p \bar{x}_p$$

## 9.ÇOKLU KORELASYON KATSAYISI'NIN GEOMETRİK YOLDAN TÜRETİLMESİ



Şekil 10 : Çoklu Regresyonda Çoklu Korelasyon Katsayısının Türetilmesinde Kullanılan Geometri

$$R = \cos \angle (\bar{y}, \bar{\hat{y}}) = \frac{|\bar{\hat{y}}|}{|\bar{y}|}$$

$$\bar{\hat{y}} \cdot \bar{\hat{y}} = (b_1 \bar{x}_1 + b_2 \bar{x}_2 + \dots + b_p \bar{x}_p) \cdot \bar{\hat{y}}$$

$$= b_1 (\bar{x}_1 \cdot \bar{\hat{y}}) + b_2 (\bar{x}_2 \cdot \bar{\hat{y}}) + \dots + b_p (\bar{x}_p \cdot \bar{\hat{y}})$$

$$|\bar{\hat{y}}|^2 = b_1 (\bar{x}_1 \cdot \bar{y}) + b_2 (\bar{x}_2 \cdot \bar{y}) + \dots + b_p (\bar{x}_p \cdot \bar{y})$$

$$R^2 = \frac{|\hat{\vec{y}}|^2}{|\vec{y}|^2} = \frac{b_1(\vec{x}_1 \cdot \vec{y}) + b_2(\vec{x}_2 \cdot \vec{y}) + \dots + b_p(\vec{x}_p \cdot \vec{y})}{\vec{y} \cdot \vec{y}}$$

$$|\vec{y}|^2 = SS_{\text{toplam}}$$

$$|\hat{\vec{y}}|^2 = SS_{\text{regresyon}} = R^2 \cdot SS_{\text{toplam}}$$

$$|\vec{e}|^2 = SS_{\text{kalıntı}} = (1 - R^2) SS_{\text{toplam}}$$

$$SS_{\text{toplam}} = SS_{\text{regresyon}} + SS_{\text{kalıntı}}$$

## 10. STANDARTLAŞTIRILMIŞ REGRESYON KATSAYILARI (BETA KATSAYILARI)'NIN GEOMETRİK OLARAK TÜRETİLMESİ

Standartlaştırma sonucunda vektörlerin yönü değişmemekte fakat uzunlukları değişmekte ve birim uzunlukta olmaktadır. Elde edilen standartlaştırılmış vektörleri (8) ve (9) denklemlerinde yerlerine yazıldığında

$$b_1^z = \frac{(\vec{x}_1 \cdot \vec{y}) - (\vec{x}_2 \cdot \vec{y})(\vec{x}_1 \cdot \vec{x}_2)}{1 - (\vec{x}_1 \cdot \vec{x}_2)^2} \quad \text{ve} \quad b_2^z = \frac{(\vec{x}_2 \cdot \vec{y}) - (\vec{x}_1 \cdot \vec{y})(\vec{x}_1 \cdot \vec{x}_2)}{1 - (\vec{x}_1 \cdot \vec{x}_2)^2} \quad \text{elde}$$

edilmektedir.

Bu denklemlerde uzunluklar 1 olduğundan iç çarpımlar korelasyonları verdiğinden

$$b_1^z = \frac{r_{x_1 y} - r_{x_2 y} \cdot r_{x_1 x_2}}{1 - r_{x_1 x_2}^2} \quad \text{ve} \quad b_2^z = \frac{r_{x_2 y} - r_{x_1 y} \cdot r_{x_1 x_2}}{1 - r_{x_1 x_2}^2} \quad \text{haline gelmektedir.}$$

$$R^2 = b_1^z (\vec{x}_1 \cdot \vec{y}) + b_2^z (\vec{x}_2 \cdot \vec{y}) + \dots + b_p^z (\vec{x}_p \cdot \vec{y})$$

$$b_j^z = \frac{|\vec{x}_j|}{|\vec{y}|} \cdot b_j$$

$\cos \angle (\vec{x}_j, \vec{y})$  bileşen yükü olarak tanımlanırsa

$$\cos \angle (\vec{x}_j, \vec{y}) = \frac{\vec{x}_j \cdot \vec{y}}{|\vec{x}_j| |\vec{y}|} = \frac{\vec{x}_j \cdot \vec{y}}{|\vec{x}_j| |\hat{\vec{y}}|} = \frac{\vec{x}_j \cdot \vec{y}}{|\vec{x}_j| \cdot R |\vec{y}|} = \frac{\cos \angle (\vec{x}_j, \vec{y})}{R} \quad \text{olmaktadır.}$$

## 11. SONUÇ VE TARTIŞMA

Bu çalışmada regresyon modeli ve varsayımlarının geometrik ifadeleri verilmiş ve anılan geometrik ifadeler kullanılarak parametre tahminçileri elde edilmişlerdir. Regresyon modelinin testi için de yine geometriden faydalanılmıştır. Çalışmada koordinattan bağımsız geometri kullanılmıştır.

Regresyon analizine geometrik yaklaşımda model, varsayımları kullanılarak geometrik olarak oluşturulduğundan, geometrik yaklaşım modelin ve varsayımlarının daha iyi anlaşılmasını sağlayabilmektedir. Ayrıca bu çalışmada projeksiyon vektörleri yerine, projeksiyon matrisleri kullanılarak hipotez testi de dahil olmak üzere regresyon modelinin ve regresyon analizinin oluşturulma mantığı ve felsefesi bir bütün olarak tartışılmış olmaktadır.

### Kaynakça

- [1] Herr,D.G.,(1980). “On the History of the Use of Geometry in the General Linear Model”, *The American Statistician*, Volume 34, Number1, 43-47.
- [2] Fisher, R.A.(1915), “Frequency Distribution of the Values of the Correlation Coefficient in Samples from an Indefinitely Large Population”, *Biometrika*, 10, 507-521.
- [3] Bartlett, M.S.(1933-34), “The Vector Representation of a Sample”, *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 30,327-340.
- [4] Durbin, J., Kendall, M.G.(1951), “The Geometry of Estimation”, *Bimetrika*, 38, 150-158.
- [5] Kruskal, W.H.(1961), “The Coordinate-free Approach to Gauss-Markov Estimation and Its Application to Missing and Extra Observations”, 4th Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, 1,435-451.

- [6] Kruskal, W.H.(1968), “When are Gauss-Markov and Least Squares Estimators Identical? A Coordinate-free Approach, *Annals of Mathematical Statistics*, 39, 70-75.
- [7] Kruskal, W.H.(1975), “ The Geometry of Generalized Inverses ”, *Journal of the Royal Statistical Society, Ser. B*, 37, 272-283.
- [8] Zyskind, G.(1967), “On Canonical Forms, Non-negative Covariance Matrices and Best and Simple Least Squares Linear Estimators in Linear Models”, *Annals of Mathematical Statistics*, 38, 1092-1109.
- [9] Watson, G.S.(1967), “Linear Least Squares Regression”, *Annals of Mathematical Statistics*, 38, 1679-1699.
- [10] Seber, G.A.F(1977), “*Linear Regression Analysis*”, New York: John Wiley&Sons.
- [11] Scheffé,H.(1959), “*The Analysis of Variance*”, New York: John Wiley&Sons
- [12] Seely,J.(1970a), “Linear Spaces and Unbiased Estimation”, *Annals of Mathematical Statistics*, 41,1725-1734.
- [13] Seely, J.(1970b), “Linear Spaces and Unbiased Estimation-Application to Mixed Linear Model”, *Annals of Mathematical Statistics*, 41,1735-1748.
- [14] Cleveland, W.S.(1971), “Projection with the Wrong Inner Product and Its Application to Regression with Correlated Errors and Linear Filtering of Time Series”, *Annals of Mathematical Statistics*, 42, 666-620.
- [15] Burdick, D.S., Herr, D.G., O’Fallon, W.M.,O’Neil, Bernard, V.(1974), “Exact Methods in the Unbalanced, Two-way Analysis of Variance –A Geometric View”, *Communication in Statistics*, 3 , 581-595.

- [16] Heberman, S.J.(1975), "How Much Do Gauss-Markov and Least Squares Estimates Differ? A Coordinate-free Approach", *Annals of Statistics*, 3, 982-990.
- [17] Herr,D.G.(1976), "A Geometric Characterization of Connectedness in a Two-way Design", *Biometrika*, 63, 93-100.
- [18] Eaton,M.L.(1970), "Gauss-Markov Estimation for Multivariate Linear Models: A Corrdinate-free Approach", *Annals of Mathematical Statistics*, 41, 528-538.
- [19] Swindel, B.F.,(1974)., " Instability of Regression Coefficients Illusrated", *The American Statistician*, Volume 28, Number 2, 63-65.
- [20] Schey ,H.M.,(1985)., "A Geometric Description of Orthogonal Contrasts in One-WayAnalysis of Variance", *The American Statistician*, Volume 39, Number2, 104-106.
- [21] Margolis, M.S.,(1979).,"Perpendicular Projections and Elementary Statistics", *The American Statistician*, Volume 33, Number3, 131-135.
- [22] Bryant,P., (1984). " Geometry, Statistics, Probability: Variations on a Common Theme", *The American Statistician*, Volume 38, Number1, 38-49.
- [23] Kendall ,M.G.,(1961), "A Course in The Geometry of  $N$  Dimensions", London, Charles Griffin & Company Limited.
- [24]Wickens ,T.D.,(1995), "*The Geometry of Multivariate Statistics*", New Jersey: , Lawrence Erlbaum Associates.
- [25] Saville,D.J. and Wood G.R., (1986)., " A Method for Teaching Statistics Using N-Dimensional Geometry", *The American Statistician*, Volume 40, Number 3, 205-214.
- [26] Draper N.R. and Smith,(1998),"Applied Regression Analysis", Newyork, Willey-Interscience Publication.

- [27] Wonnacott R.J. and Wonnacott T.H.,(1979), “*Econometrics*”, New York, John Wiley & Sons.
- [28] Flury, B.K. and Riedwyl Hans. (1986)., “Standard Distance in Univariate and Multivariate Analysis”, *The American Statistician*, Volume 40, Number 3, 249-251.
- [29] Carroll J.D., Gren P.E. and Chaturvedi A.,(1997) ,“*Mathematical Tools For Applied Multivariate Analysis*”, London, Academic Pres.
- [30] Graybill,F.A,(1983), “*Matrices With Applications in Statistic*”, California, Wadsworth International Group .
- [31] Işıkara,B.,(2004) “*Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Seminer Notları*”, İstanbul.
- [32] Sınıksıran,E.,(1997), “*Lineer Modellerde F Testinin Geometrik Bir Yorumu*”, İstatistik ve Ekonometri Araştırma ve Uygulama Merkezi Dergisi, Sayı 1, 175-193.
- [33] Sınıksıran, E,(1993), “*Bazı İstatistik Kavram ve Tekniklere Geometrik Bir Yaklaşım*”, İstanbul ,İstanbul Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü,Yayınlanmamış Doktora Tezi.

## YAZARLARIN ÖZGEÇMİŞİ

### **Gülhayat GÖLBAŞI ŞİMŞEK**

1976 yılında Çankırı'da doğdu. Lise tahsilini Kadir Has Lisesi'nde tamamladıktan sonra 1993 yılında Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi İstatistik Bölümü'ne girdi. 1998 senesinde aynı bölümde araştırma görevlisi oldu. 2000 senesinde Mimar Sinan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İstatistik Programı'nda yüksek lisans derecesini aldı. 2002 yılında başladığı Marmara Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü İstatistik Programı'nda doktora öğrencisidir.

### **Seher ARIKAN TEZERGİL**

1972 yılında Muğla'da doğdu. Lise tahsilini Özel Sakarya Lisesi'nde tamamladıktan sonra 1989 yılında İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümüne girdi. Mezuniyet sonrasında, 1999 yılına kadar kolejlerde matematik öğretmenliği yaptı. Marmara Üniversitesi Bankacılık sigortacılık Yüksekokulu Aktüerya Bölümünde Araştırma Görevlisi olarak göreve başladığı yıl M.Ü. Bankacılık Sigortacılık Enstitüsü Sigortacılık Bölümü'nde yüksek lisans eğitimine başladı.2003 yılında halen devam etmekte olduğu Marmara üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Ekonometri Anabilimdalı İstatistik bilim dalında doktora başladı.

Pozitronların Çeşitli Kalınlıktaki Alüminyum Filmlerden İleri Geçiş Olasılıkları,  
G.İnlek-A.Aydın

## POZİTRONLARIN ÇEŞİTLİ KALINLIKTAKİ ALÜMİNYUM FİMLERDEN İLERİ GEÇİŞ OLASILIKLARI

**Gülay İNLEK-Asuman AYDIN**

Balıkesir Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi  
Fizik Bölümü, Balıkesir, TÜRKİYE  
*inlek@balikesir.edu.tr, aydina@balikesir.edu.tr*

### ÖZET

Bu çalışmada, 1-960 keV enerjili pozitronların Alüminyum ortamda Monte Carlo yöntemi ile doğrudan takibi yapılmıştır. Hazırlanan Monte Carlo programı ile 1- 6.2 keV düşük enerji bölgesi ve 159-960 keV yüksek enerji bölgesinde çeşitli kalınlıklardaki alüminyum ortamlardan pozitronların ileri geçiş olasılıkları hesaplanmış ve deneyle uyumlu sonuçlara varılmıştır. Bu çalışmada 50 eV - 1 MeV enerji aralığında geçerli olan esnek ve esnek olmayan saçılma için tesir kesitleri hesaplanmıştır. Tek tek çarpışmaların izlendiği bir Monte Carlo programı hazırlanarak çeşitli kalınlıktaki alüminyum filmlerden pozitronların ileri geçiş olasılıkları hesaplanmıştır.

## 1. GİRİŞ

Yüklü parçacık - atom çarpışması, çok parçacık problemi olduğundan, çözüm için bütün enerji bölgelerinde geçerli tek bir tesir kesiti ifadesi bulmak mümkün değildir. Bu nedenle farklı enerji bölgelerinde farklı yaklaşımlar kullanılmaktadır. Yüksek enerjili yüklü parçacıkların ortam içinde izlenmesinde, bu parçacıkların kesilme enerjisine gelinceye kadar yapacakları çarpışmaların sayısı onbinlerce olduğundan, genellikle çoklu saçılma yaklaşımı kullanılır.

Bu çalışmada Monte Carlo programı kullanılarak değişik enerjiler ile alüminyum filmlere gelen pozitronların ileri geçiş olasılıkları hesaplanmıştır.

## 2. MONTE CARLO METODU

Olasılığa dayanan sayısal bir hesap yöntemi olan Monte Carlo yönteminde gelişigüzel sayılar rol oynar. Sonuçları belirli veya olasılığı olan problemlerin gelişigüzel sayılarla yapılan deneylerle çözülmesi için geliştirilmiş olan yöntemlere Monte Carlo yöntemleri adı verilir. Bir veya birkaç gelişigüzel sayı çekip, bu sayıların değerlerini kullanarak veya onlara karşılık gelen bazı değerlere göre bir olay hakkında sonuca varmak, bir Monte Carlo deneyi meydana getirir. Tavla oyununda zar atılması bu tip bir deneydir. Bu deneysel yöntemler çok geniş bir uygulama alanı bulmuşlardır. Nükleer mühendislik, biyoloji, fizik, kimya, sosyal bilimler alanlarında çeşitli uygulama örnekleri vardır.

## SÖZDE GELİŞİGÜZEL SAYI ÜRETEÇLERİ

Monte Carlo yönteminde hesaplamaların çoğu, düzgün dağılımlı, değişik istatistiksel testleri sağlayacak  $(0,1)$  açık aralığında tekrarlanabilir “sözde gelişigüzel

sayılar”a dayandırılır. Sayılar bilgisayarda tamamen belirli bir yöntemle üretilir ve gerçekte gelişigüzel değildirler. Bu nedenle bu sayılara sözde gelişigüzel sayılar adı verilir [1].

Gelişigüzel sayı üretmek için kullanılan ilk yöntem, Von Neumann’ın “karenin ortası yöntemi” dir. Bu yöntemde ikiden çok basamaklı bir başlangıç sayısının karesi hesaplanıp elde edilen sayının ortadaki a tane rakamı alınır. Böylece devam edilerek bir sözde gelişigüzel sayı dizisi elde edilir. Başlangıç sayısı ve kullanılan sayı tabanının bazı değerleri için iyi sonuçlar alınmış olmakla birlikte, sayıların tekrarlanma olasılığı yüksektir. Bu nedenle “çarpımlı uygunluk yöntemi ” geliştirilmiştir. Bu yöntem ile gelişigüzel sayılar,

$$I_{j+1} = aI_j + c \pmod{m}$$

(2.1)

algoritması ile elde edilirler. Burada I ve a pozitif tam sayılar ve m bu sayılardan büyük olan başka bir pozitif tam sayıdır [1].

Monte Carlo benzetişimi, karmaşık olayları art arda basamaklara ayırır. Her bir basamakta belirli olasılık yoğunluk fonksiyonuna göre mümkün değerler içinden belli bir sonuç seçilir. Bunu yapmak için, düzgün dağılımlı gelişigüzel sayılar farklı aralıklarda, farklı dağılımlardan örneklenen gelişigüzel sayılara dönüştürülmelidir. Bu amaçla yaygın olarak kullanılan iki yöntem vardır.

## 2.2 TERS DÖNÜŞÜM YÖNTEMİ (TEMEL ÖRNEKLEME İLKESİ )

Bir gözlem sonucunda bir x değerinin elde edilme olasılığı, benzer gözlemler sonunda oluşan x’lerin birbirlerine göre sıklık oranı olarak tanımlanır. x, her zaman sürekli bir değer alıyorsa, x’in x ile x+dx arasında olma olasılığı  $f(x)dx$  şeklinde verilir. burada  $f(x)$  fonksiyonuna, gelişigüzel x değerinin “olasılık yoğunluk fonksiyonu” adı verilir.  $-\infty < x < +\infty$  aralığında olasılık yoğunluk fonksiyonu  $f(x)$  ise toplam dağılım fonksiyonu

$$F(a) = \int_{-\infty}^a f(x)dx$$

(2.2)

olarak tanımlanır.  $a$ ,  $f(a)$  olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip olmak üzere,  $a$  noktasına kadar olasılıkların integrali olan  $F(a)$  da  $(0,1)$  aralığında düzgün dağılımlı gelişigüzel değişkendir. Uç noktalar ihmal edilerek, sürekli  $f(x)$  olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip  $x$  değerleri aşağıdaki yolla elde edilebilir.  $q$ ,  $(0,1)$  aralığında düzgün dağılımlı gelişigüzel bir sayı olmak üzere ;

$$q=F(x)$$

(2.3)

alınırsa, buradan tersine çözümle

$$x=F^{-1}(q)$$

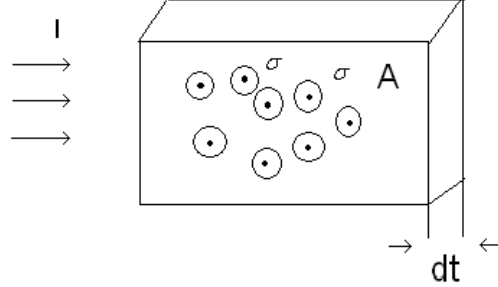
(2.4)

(2.4) dekleminde istenilen  $x$  değerleri elde edilebilir [2].

### 2.3 REDDETME YÖNTEMİ

$F(x)$  dağılım fonksiyonu çalışılmayacak kadar karmaşık yapıda olabilir. Bu durumda denklem (2.4) 'teki gibi fonksiyonun tersini elde etmek mümkün olmaz ve reddetme yöntemi kullanılır[2].

### 3. YÜKLÜ PARÇACIKLARIN BİR ORTAMDAN GEÇİŞİ



**Şekil 1 İnce bir levha üzerine gelen parçacık demeti .**

Dilim bir ortama giren paralel tek enerjili bir pozitron demetini ele alalım. Ortama dik olarak gelen parçacık ya geri yansıyacaktır ya ileri geçecektir ya da ortam içinde etkileşme yapacaktır. Ortamda hareket eden parçacık; geliş enerjisi  $E_k$ , yer koordinatları  $x, y, z$  ve doğrultu koordinatları  $\alpha, \beta, \gamma$  ile karakterize edilir[3]. Belli bir  $E_k$  enerjisi ile ortama dik olarak giren pozitron giriş doğrultusunda ilk çarpışmadan önce belli bir yol alır. Bu yol “serbest yol” olarak adlandırılır.

Pozitronun etkileşme yapmadan aldığı yola  $l$  dersek  $l$  ile  $l+dl$  arasında etkileşme yapma olasılığı,  $I = I_0 e^{-\mu l}$  ifadesine göre  $\mu = n\sigma$  ve  $q$  (0,1) arasında düzgün dağılımlı gelişigüzel sayı olmak üzere

$$P(l)dl = -\mu \frac{I}{I_0} dl \quad ,$$

(3.1)

dir.

Denklem (2.2)’ ye göre olasılık fonksiyonu

$$\int_0^1 P(l')dl' = \int_0^1 -\mu e^{-\mu l} dl = e^{-\mu l} \Big|_0^1 \quad (3.2)$$

olur.

(2.3) ve (2.4) denklemlerinden

$$q = e^{-\mu l} \rightarrow \ln q = -\mu l$$

$$l = \frac{-\ln q}{\mu}$$

(3.3)

elde edilir[3]. Burada ,  $\mu(\text{cm}^{-1})$  toplam makroskobik tesir kesitidir.

Pozitronun etkileşme türleri; esnek saçılma, esnek olmayan saçılma, yok olma ve bremsstrahlung ışıması olarak verilebilir. Esnek saçılma makroskobik tesir kesiti  $\mu_e$ ,

esnek olmayan saçılma makroskobik tesir kesiti  $\mu_i$ , yok olma makroskobik tesir kesiti  $\mu_a$  ile gösterilirse toplam makroskobik tesir kesiti

$$\mu = \mu_e + \mu_i + \mu_a$$

olur.

q yeniden üre-tilen gelişigüzel sayı olmak üzere, pozitronun etkileşmesinin ;

$$0 < q < \mu_e / \mu \quad \text{ise esnek saçılma,}$$

$$\mu_e / \mu \leq q < (\mu_e + \mu_i) / \mu \quad \text{ise esnek olmayan saçılma,}$$

$$(\mu_e + \mu_i) / \mu \leq q < (\mu_e + \mu_i + \mu_a) / \mu \quad \text{ise yok olma olduğuna karar verilir[3].}$$

### 3. ALÜMİNYUM ORTAMDA POZİTRON TESİR KESİTLERİ HESABI

Alüminyum ortamda pozitronların esnek saçılma makroskobik tesir kesit hesaplarında 10 keV – 1 MeV enerji aralığında Rutherford' un saçılma teorisine dayanan aşağıdaki eşitlik kullanılmıştır :

$$\mu_e(\theta, E_k) = nZ^2 r_e^2 2\pi \frac{1-\beta^2}{\beta^4} \int_0^\pi \frac{\sin\theta}{(1-\cos\theta + 2\eta)^2} K_{\text{rel}}(\theta, E_k) d\theta$$

Esnek olmayan saçılma makroskobik tesir kesiti hesaplarında Liljequist tarafından önerilen ;

$$\mu_i = n z_i 2\pi r_e^2 \frac{m_0 c^2}{\beta^2} \sum_{i=1}^M \left[ \frac{1}{W_i} \ln \left[ \frac{W_i}{Q_{\min}} \right] - \frac{1}{E_k} + \frac{1}{W_i} \right]$$

Eşitliği 50 eV – 100 keV enerji aralığında kullanılmıştır[4]. 100 keV – 1 MeV enerji aralığı için bu fonksiyonun extrapolasyonu alınmıştır.

Yok Olma için Heitler’ in [5] önerdiği mikroskobik tesir kesitinden makroskobik tesir kesitine geçiş yapıldığında

$$\mu_a = n \frac{\pi r_e^2}{\gamma + 1} \left[ \frac{\gamma^2 + 4\gamma + 1}{\gamma^2 - 1} \ln \left[ \gamma + \sqrt{\gamma^2 - 1} \right] - \frac{\gamma + 3}{\sqrt{\gamma^2 - 1}} \right]$$

elde edilen bu ifade kullanılmıştır.

Her etkileşme noktası için pozitronun z koordinatı

$$z \leq 0$$

(4.1)

şartı ile kıyaslanır. Eğer bu şart sağlanırsa pozitron geri yansımıştır. “Geri yansıyan pozitron” olarak saydırılır ve enerjisi kutulanır. Yeni bir pozitron izlenmeye başlanır. Bu şart sağlanmazsa pozitron, enerjisi belli bir kesilme enerjisinin altına düşene kadar izlenir.

Ayrıca z eksenini  $z = d$  düzlemi ile kestirilerek pozitronların belli bir kalınlığı geçme olasılıkları da elde edilebilir. Burada d ortamın kalınlığıdır. Bunun için ilk serbest yolun sonunda pozitronun z koordinatının

$$z \geq d$$

(4.2)

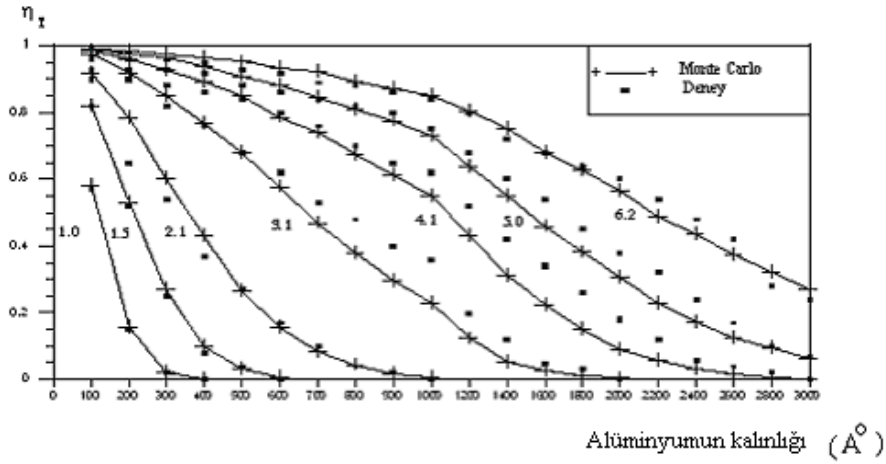
şartını sağlayıp sağlamadığına bakılır. Bu şart sağlanırsa pozitron ortamdan çıkmıştır. “İleri geçen pozitron ” olarak saydırılır ve enerjisi kutulanır. Daha sonra yeni bir pozitron izlenmeye başlanır. (4.2) şartı sağlanmazsa pozitron ortamın içindedir. Bu sebeple art arda etkileşmelerin izlenmesi gerekir.

## 5. SONUÇ VE TARTIŞMA

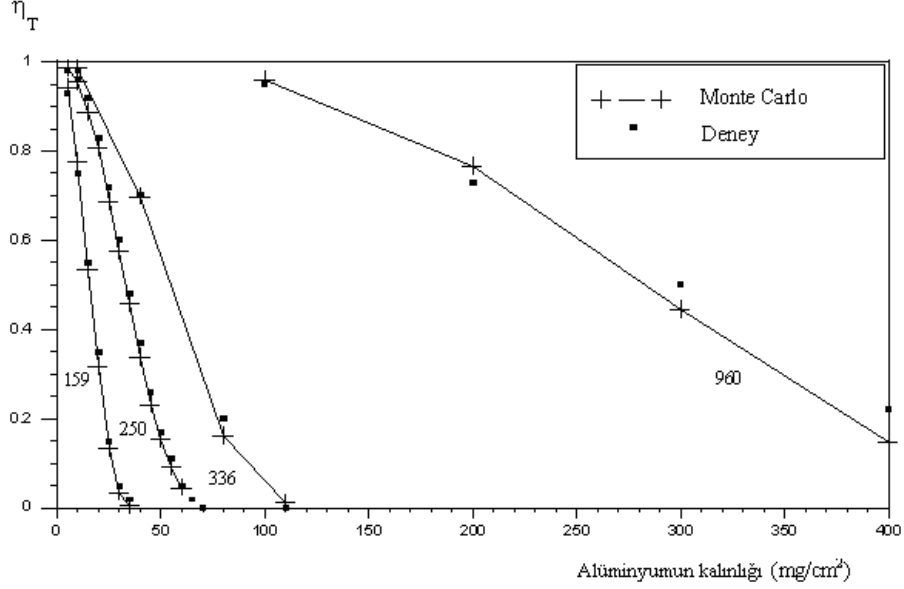
## 5.1 POZİTRONLARIN DİLİM ALÜMİNYUM ORTAMDA İLERİ GEÇİŞ OLASILIKLARI

Düşük enerjiler 1, 1.5, 2.1, 3.1, 4.1, 5.0 ve 6.2 keV için 0 - 3000 Å<sup>0</sup> kalınlıkta ve yüksek enerjiler 159, 250, 336, 960 keV için 0 - 400 mg/cm<sup>2</sup> (=1480x10<sup>4</sup> Å<sup>0</sup>) kalınlıkta dilim alüminyuma dik gelen pozitronların ileri geçiş  $\eta_T$  olasılıkları hesaplanmıştır.

Dilim alüminyum ortamdan pozitronların Monte Carlo yöntemi ile hesaplanan geçiş olasılıkları düşük enerjiler için Mills Wilson 'un deneysel sonuçlarıyla birlikte Şekil2 'de yüksek enerjiler için ise Seliger 'in deneysel sonuçlarıyla birlikte Şekil3 'de verilmiştir



Şekil2 Dilim alüminyum ortama düşük enerjilerle (1, 1.5, 2.1, 3.1, 4.1, 5.0 ve 6.2 keV) dik gelen pozitronların ileri geçiş olasılıklarının kalınlığa bağlı değişimleri.



Şekil3 Dilim alüminyum ortama yüksek enerjilerle (159, 250, 336 ve 960 keV) dik gelen pozitronların ileri geçiş olasılıklarının kalınlığa bağlı değişimleri.

## 5.2 SONUÇLARIN DEĞERLENDİRİLMESİ

Bu çalışmada, pozitronların belirli kalınlıktaki alüminyum ortamlardan ileri geçiş olasılıklarını veren bilgisayar programı hazırlanmıştır. 1 - 960 keV enerji aralığında pozitronlar tek tek izlenerek, deneysel çalışmalarla uyumlu sonuçlar elde edilmiştir.

Temel fiziksel girdiler olarak, toplam tesir kesiti ifadeleri için çeşitli yaklaşımlarla hesaplanan değerler üzerine fit yapılmıştır. Diferansiyel tesir kesiti ifadeleri de belli yaklaşımlar altında elde edilmiş bağıntılar olduğundan, deneysel verilerle uyumlu sonuçlar elde edebilmek için toplam tesir kesitlerinde yaklaşık % 10 lara varan düzeltme faktörleri kullanılmıştır.

Mills Wilson yaptığı deneylerle 3000 Å kalınlığa kadar alüminyum, bakır, silisyum ortamlara dik gelen 1 - 6 keV enerjili pozitronların ileri geçiş olasılıklarını ölçmüştür[6]. Aynı amaçlı bir başka deneysel çalışma da alüminyum, gümüş, kalay, kurşun, altın ortamlarda 159 - 960 keV enerjili pozitronlar ve elektronlar için Seliger tarafından yapılmıştır[7]. Bu çalışmada ise 1, 1.5, 2.1, 3.1, 4.1, 5.0, 6.2, 159, 250, 336, 960 keV enerjili pozitronlar alüminyum ortamda Monte Carlo yöntemi ile izlenmiştir. Bu teorik çalışma sonucunda deneylerle uyumlu sonuçlar elde edilmiştir.

Yukarıda sözü edilen sonuçlar; istatistik için düşük enerjilerde 5000, yüksek enerjilerde 10000 parçacık yeterli olmasına rağmen düşük enerjiler için 30000, yüksek enerjiler için ise 15000 pozitron izlenerek elde edilmiştir.

## Kaynakça

- [1] Hammersley J.M., Handscomb D.C., John Wiley and Sons. Inc. (1979), *Monte- Carlo Methods*, New York.
- [2] Çokiyi, N., (1994), "*Yüksek enerji hadron ve elektron gamma sağanağı benzetimi* ", M. Sc.Tezi, Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Bursa.
- [3] Aydın, A., (1993), "*Pozitronların çeşitli ortamlarda Monte Carlo yöntemi ile takibi*", Ph. D. Tezi, Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Bursa .
- [4] Liljequist, D. , J., (1983), Phys. D : Appl. Phys. , 16, 1567.
- [5] Heitler, W., (1954), *The Quantum Theory of Radiation*, The Claredon Press, Oxford.
- [6] Mills, A.P. , Wilson R.J., (1980), Physical Review A, 26, 490.
- [7] Seliger, H.H., (1955), Physical Review, 100, 1029.

Pozitronların Çeşitli Kalınlıktaki Alüminyum Filmlerden İleri Geçiş Olasılıkları,  
G.İnlek-A.Aydın

### **YAZARIN ÖZGEÇMİŞİ**

#### **Gülay İNLEK**

1972 yılında Aydın’da doğdu, orta öğrenimini Aydın Lisesinde tamamladı. 1989 yılında Uludağ Üniversitesi Necatibey Eğitim Fakültesi Fizik Bölümüne kaydolarak 1993 yılında mezun oldu. Aynı yıl Balıkesir Üniversitesi Fen- Edebiyat Fakültesi Fizik Bölümünde Araştırma Görevlisi olarak göreve başlamıştır. 1995 yılında BaÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Fizik Anabilim dalında başladığı Yüksek Lisans öğrenimini 1998 de tamamladı. Aynı Anabilim dalında 2003 yılında Doktora öğrenimine başladı. Ve halen Doktora öğrenimi devam etmektedir. Aynı üniversitenin aynı bölümünde araştırma görevlisi olarak çalışmaktadır. Çalışma alanları Nükleer Fizik ve Astro Nükleer Fizikdir.



Değişik Ortamlardaki Gama Etkileşmelerinde Toplam Saçılma Olasılığı Hesabı,  
A.Böke-C.Özmutlu

## DEĞİŞİK ORTAMLARDAKİ GAMA ETKİLEŞMELERİNDE TOPLAM SAÇILMA OLASILIĞI HESABI

**Aysun BÖKE<sup>1</sup> ve Cihan ÖZMUTLU<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>Balıkesir Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi Fizik Bölümü, Balıkesir, TÜRKİYE,  
aysun@balikesir.edu.tr

<sup>2</sup>Uludağ Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi Fizik Bölümü, Bursa, TÜRKİYE

### ÖZET

Bu çalışmada, Alüminyum, Demir, Bakır, Altın, Kurşun ortamlarında, gama enerjisinin aktarımını hesaplamak amacıyla, değişen açılarda toplam saçılma olasılığı değerleri, Turbo Basic programında, nümerik integrasyon yoluyla 0.011MeV - 3 MeV aralığındaki farklı enerji değerleri için hesaplanmıştır.

## 1. GİRİŞ

Gamanın coherent artı incoherent olarak  $0-\theta$  açısına toplam saçılma olasılıkları, alüminyum, demir, bakır, altın ve kurşun ortamları için 45 farklı açı ve 3 farklı enerji değerleri için hesaplanmıştır. Hesaplamalar nümerik integrasyonda Turbo Basic programında yapılmıştır. Küçük açı ve düşük enerji bölgelerinde, diferansiyel coherent saçılma tesir kesitinin ve atomik form faktörünün[1][2][3] çok şiddetli değişmesi nedeniyle nümerik integrasyonda logaritmik bölge, benzer olarak yine küçük açı ve düşük enerji bölgelerinde, diferansiyel incoherent saçılma tesir kesitinin ve saçılma fonksiyonunun[1][2][3] değişiminin şiddetli olmaması nedeniyle nümerik integrasyonda lineer bölge seçimi yapılmıştır.

## 2. SAÇILMA OLASILIĞI

Gamanın coherent veya incoherent saçılma sonucunda ,  $0-\theta$  açısına toplam saçılma olasılığı tanımı yeteri sıklıktaki enerji bölgeleri için elde edildiğinde, gama takibinde büyük kolaylık sağlamaktadır.

Toplam saçılma olasılığı kesikli açı değerleri için hesaplanır ise, belli bir açı değerinde açı aralığına saçılma olasılığı, bu aralığı sınırlandıran açılar için toplam saçılma olasılıklarının farkı olarak elde edilir.

Gamanın  $0-\theta$  açısına toplam saçılma olasılığı,

$$P_{top} = \frac{\int_0^\theta (d\sigma_{coh} + d\sigma_{inc})}{\int_0^\pi (d\sigma_{coh} + d\sigma_{inc})} \quad (2.1)$$

$$P_{top} = \frac{\int_0^\theta \left\{ \left[ \frac{r_e^2}{2} (1 + \cos^2 \theta) [F(X, Z)]^2 \right] + \left[ \frac{r_e^2}{2} [1 + k(1 - \cos \theta)]^{-2} \left[ 1 + \cos^2 \theta + \frac{k^2 (1 - \cos \theta)^2}{1 + k(1 - \cos \theta)} \right] S(X, Z) \right] \right\} 2\pi \sin \theta d\theta}{\sigma_{coh} + \sigma_{inc}} \quad (2.2)$$

denklemleri ile tanımlanmaktadır. Denklem (2.1)'de,  $d\sigma_{coh}$ ; atom başına diferansiyel coherent saçılma tesir kesiti,  $d\sigma_{inc}$ ; atom başına diferansiyel incoherent saçılma tesir kesitidir[1][2][3]. Denklem (2.2)'de,  $\theta$ ; saçılma açısı,  $d\theta$ ; saçılma açı aralığıdır. (2.1) ve (2.2) denklemlerinin integralini analitik olarak almak mümkün değildir.  $\theta$ 'nın 0 ile  $\pi$  arasında değişen çeşitli değerleri ve gama enerjisinin çeşitli enerji aralıkları için, bu olasılıkların nümerik olarak değerleri elde edilmiştir.

0- $\theta$  açısına toplam saçılma olasılığının nümerik integrasyonu,

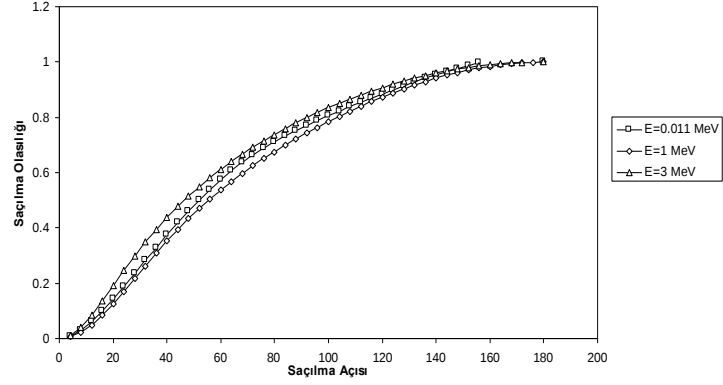
$$P_{top} = P_{top,i} + \frac{\left[ \left\{ \frac{r_e^2}{2} (1 + \cos^2 \theta_i) [F(X_i, Z)]^2 \right\} + \left\{ \frac{r_e^2}{2} [1 + k(1 - \cos \theta_i)] \left[ 1 + \cos^2 \theta_i + \frac{k^2 (1 - \cos \theta_i)^2}{1 + k(1 - \cos \theta_i)} \right] S(X_i, Z) \right\} \right]}{\sigma_{coh} + \sigma_{inc}} 2\pi \sin \theta_i \frac{4\pi}{180} \quad (2.3)$$

denklemini ile elde edilmiştir. Burada,  $i$ ; 1'den 45'e kadar değişen sayı değerine sahip olup;  $i=1$  için  $\theta=2$  derece,  $i=2$  için  $\theta=6$  derece,  $i=3$  için  $\theta=10$  derece,....., $i=45$  için  $\theta=178$  derecedir.  $4\pi/180$ ; 4 derecenin radyan cinsinden değeri olup,  $d\theta$  açı aralığını ifade eder.  $\sigma_{coh} + \sigma_{inc}$ ; seçilen bir gama enerjisinde bir ortama ait toplam saçılma tesir kesitidir. Logaritmik eşelleme yoluyla bulunan coherent ve lineer eşelleme yoluyla bulunan incoherent saçılma tesir kesitlerinin toplanmasından elde edilmiştir.

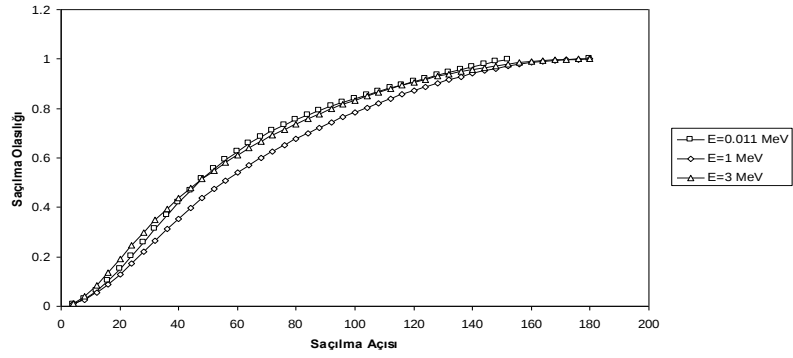
### 3. SONUÇ VE TARTIŞMA

Alüminyum, demir, bakır, altın ve kurşun ortamlarında toplam saçılma olasılığı değerleri, 0.011 MeV, 1 MeV ve 3 MeV enerji değerleri için hesaplanmıştır. Grafiklerden de görüldüğü gibi düşük enerji değerlerinde coherent saçılma, yüksek enerji değerlerinde ise incoherent saçılma daha baskın olduğundan şekiller benzer eğriler oluşturmuşlardır.

Değişik Ortamlardaki Gama Etkileşmelerinde Toplam Saçılma Olasılığı Hesabı,  
A.Böke-C.Özmutlu

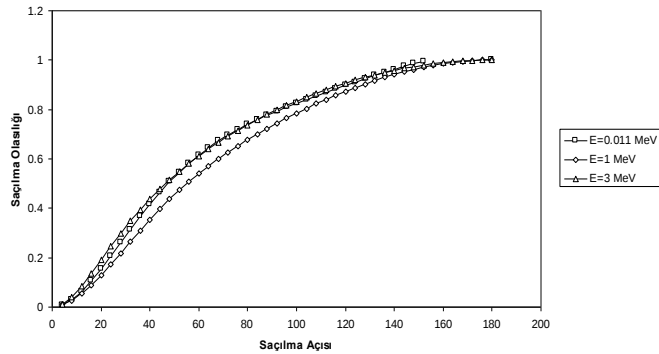


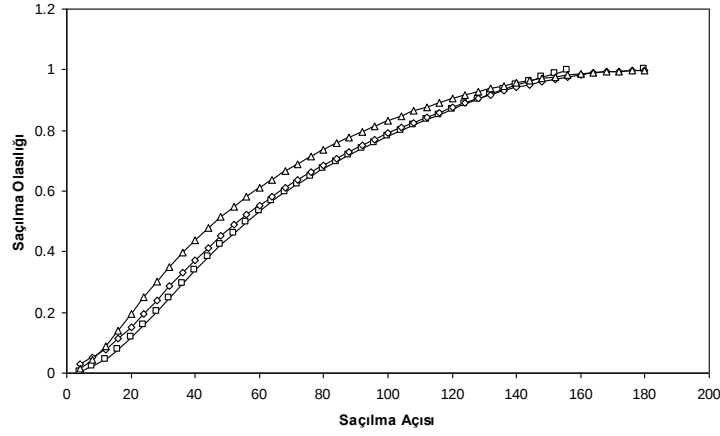
**Şekil 3.1:** Alüminyum ortamına ait,  $E=0.011$  MeV,  $E=1$  MeV ve  $E=3$  MeV enerji değerleri için gamanın toplam (coherent artı incoherent) saçılma olasılığının saçılma açısına



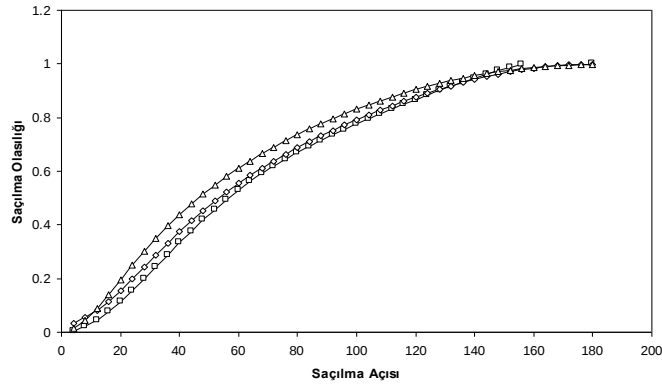
bağlı değişimi.

**Şekil 3.2:** Demir ortamına ait,  $E=0.011$  MeV,  $E=1$  MeV ve  $E=3$  MeV enerji değerleri için gamanın toplam (coherent artı incoherent) saçılma olasılığının saçılma açısına bağlı





**Şekil 3.3:** Bakır ortamına ait,  $E=0.011$  MeV,  $E=1$  MeV ve  $E=3$  MeV enerji değerleri için gamanın toplam (coherent artı incoherent) saçılma olasılığının saçılma açısına bağlı değişimi. **Şekil 3.4:** Altın ortamına ait,  $E=0.011$  MeV,  $E=1$  MeV ve  $E=3$  MeV enerji değerleri için gamanın toplam (coherent artı incoherent) saçılma olasılığının saçılma açısına bağlı değişimi.



**Şekil 3.5:** Kurşun ortamına ait,  $E=0.011$  MeV,  $E=1$  MeV ve  $E=3$  MeV enerji değerleri için gamanın toplam (coherent artı incoherent) saçılma olasılığının saçılma açısına bağlı değişimi.

#### 4. KAYNAKLAR

Değişik Ortamlardaki Gama Etkileşmelerinde Toplam Saçılma Olasılığı Hesabı,  
A.Böke-C.Özmutlu

[1] Hubbell, J.H. et Al, (1975), “Scattering Factors and Cross Sections”, *J. Phys. Chem. Ref.Data*, Vol 4, No.3

[2] Hubbell, J.H., Φverbφ, T.,(1979), *J. Phys. Chem. Ref. Data* 8, 69

[3] Kane, P.P., Kissel, Lynn., Pratt, R.H., Roy, S.C., (1986), *Phys. Reports* 140, 75

## YAZARLARIN ÖZGEÇMİŞİ

### Aysun BÖKE

1971 yılında Balıkesir’de doğdu, ilk ve orta öğrenimini Balıkesir’de tamamladı. 1993 yılında Uludağ Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Fizik Bölümünden Bölüm Birincisi olarak mezun oldu. Aynı yıl Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Fizik Anabilim Dalında başladığı Yüksek Lisans öğrenimini 1996’da tamamladı. 1998 yılında Balıkesir Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Fizik Bölümünde Araştırma Görevlisi olarak göreve başlamış ve halen bu görevi sürdürmektedir. 2003 yılında Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Fizik Anabilim Dalında Doktora programına kayıt olmuştur. Başladığı doktora programı halen devam etmektedir. Çalışma alanları Nükleer Fizik ve Astronükleer Fiziktir

# $\pi$ 'nin SANAL DENEYLE TAHMİNİ

**Mustafa Y.ATA**

Gazi Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi,  
İstatistik Bölümü , 06500 Teknikokullar, Ankara.  
E-posta: yavuzata@gazi.edu.tr

## ÖZET

$\pi$ 'nin gizemli bir *sayı* değil, ölçülebilir gerçeğe ilişkin insanoğlunun aklında tasarladığı ideal durumları tanımlayan *öteölçümler*den biri olduğu; öteölçümlerin ise ancak *tahmin* edilebileceği vurgulandıktan sonra, bir Bernoulli değişkenin beklenen değerini içeren ilişkiden yararlanılarak,  $\pi$  öteölçümünün *sanal* bir deneyle nasıl tahmin edilebileceği çerçevesinde, sanal gerçeğin matematiksel ve istatistiksel boyutları tartışılmaktadır.

## 1. GİRİŞ

İnsanoğlu, günün birinde, muhtemelen açık bir alanda, kendi etrafında dönerek, gözü ile kendisine bir güvenlik alan seçti, ve bu alanın sınırlarını, birbirine bitki liflerinden yapılmış ip benzeri bir nesne ile bağladığı iki kazıktan birini durduğu yere çakıp, diğer kazığı, aradaki esnek nesnenin esnekliği yok oluncaya kadar gerdikten sonra, sabit duran kazığın etrafında dönerek toprağın üzerine çizmeyi akıl etti. Ve yer yüzünde oluşturduğu bu şekle, Pygmallion<sup>1</sup> gibi aşık olan insanoğlunun, “bir noktadan eşit uzaklıktaki noktaların geometrik yeri” olan *Çember*’ini kusursuzlaştırarak yüceltme serüveni başladı.

Yırtıcı hayvanlardan yada düşman klanlardan korunabilmek için, güvenlik alanını bir çember biçiminde yer yüzü üzerinde işaretlemek elbette yetmezdi. Kulübelerin, köylerin, tapınak ve kalelerin yerleşeceği zeminin sınırlarını belirleyen çemberlerin üzerinde önce ağaç, sonra da taş duvarlar yükselmeye başladı. Bu barınak duvarlarının, “*ne kadar*” ağaç ya da taş kullanılarak yapılabileceği bilgisine *tasarım* aşamasında gereksinim duyan insanoğlu, bu bilgiye, çizilen çemberin çevre uzunluğunu *ölçerek* ulaşabileceğini akıl etti. Doğal olarak yararlandığı ölçme aygıtı ve ölçek, çemberi çizerken kullandığı, iki

---

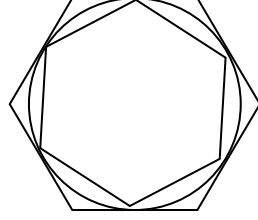
<sup>1</sup> Kendisine aşık olan Eski Yunan mitoloji kahramanı.

ucuna kazık bağlı belli uzunlukta bir ip parçası biçimindeki ilk pergeldi. Çizdiği her çemberin çevresini ölçen insanoğlu, günün birinde, çizdiği çemberin kapladığı alanın büyüklüğü ne kadar değişirse değişsin, *çizilen tüm çemberler için geçerli bir gerçeğin farkına vardı*: bir çemberin çevresi, çizim aracı olarak kullanılan ip parçasının iki katının yaklaşık üç katından biraz fazlaydı. *Kusursuz bir çember çizemediği ve kusursuz ölçüm yapamadığı için, tam değerini bulamadığı tüm çemberler için değişmez olan bu oranın değerini*, kesirli sayıları akıl edip kullanmaya başlayana kadar, *yaklaşık “3”* olarak kabul etti.<sup>2</sup>

Olgusal dünyada kusursuz bir çember çizemeyen ve kusursuz bir ölçüm yapamayan insanoğlu, yapamadıklarının, “varsayalım ki” diyerek, önce hayalini kurmayı öğrendi. Tümevarımla olgusal dünyada eriştiği gerçeği, düş gücü ile kusursuz öte-olgusal dünyaya taşıdı, ve oradan zincirleme tümdengelimle eriştiği gerçeğe döndü. Böylece, tümdengelimle indiği merdiveni tümevarımla tırmanabileceğini, içinde bulunduğu boyuttaki somut gerçekten soyut gerçeğe gidiş-geliş döngüsünün sonsuzluğunu, bu sonsuz gidiş-gelişle, kendi tanımladığı kusursuzluğa erişemeyeceğini, ama her seferinde ona biraz daha yaklaşabileceğini kavradı.

Bugün de çizdiğimiz çemberler kusurlu, ama 4000 yıl önce çizebildiklerimizden daha az kusurlu. Günümüzde *nanoteknoloji* çağını yaşamaya başlayan insanoğlunun bu yoldaki ilk adımlarından birini, “düşünsel” dünyadaki kusursuz bir çemberin çevresinin, kenarları söz konusu çemberin iç-kirişleri olan düzgün çokgenin çevre uzunluğundan büyük ve kenarları aynı çemberin dış-teğetleri olan düzgün çokgenin çevre uzunluğundan küçük olacağını, ve düzgün iç ve dış çokgenlerin kenar sayısı arttıkça, iç ve dış çokgenlerin çevre uzunlukları arasındaki farkın azalarak, çemberin çevre uzunluğunu yakınsayacağını gören Sirakuza’lı Arşimed (İ.Ö. 287–212) attı. “Düşünsel” dünyada tanımlanan bir çemberle iç-kiriş ve dış-teğet düzgün çokgenleri aşağıdaki şekilde olduğu gibi çizilebilir; bu çizimin “kusursuz” olduğu varsayılabilir ve çevresi, kusurlu ölçme yerine, kusursuz çemberi ve çokgenleri tanımlayan *değişmezler* arasındaki sağlam bağlantılardan yararlanılarak hesaplanabilir. Kendisinden yaklaşık 300 yıl önce

<sup>2</sup> İ.Ö.1650 sıralarında, Ahmes adlı Mısırlı bir kâtip tarafından yazılmış olan ve Rhind papirüsü olarak bilinen bir yazıdaki bilgiye göre, bir çemberin çevresinin çapına oranı  $256/81 \approx 3,141049$ .... dir.Ancak,tarih bu bilginin yayılmadığını ve bin yıl sonra bile Babilliler ve ilk İbraniler’in 3 değerini kullandıklarını gösteriyor.[1]



**Şekil 1.** Bir çemberin iç-kiriş ve dış-teğet düzgün çokgenleri.

Güney İtalya’da yaşamış olan Pisagor(İ.Ö.570-500)’un ünlü teoremi ile, 4-eşkenarlıdan başlayıp 96-eşkenarlı iç ve dış düzgün çokgenlerin çevresini hesaplayan Arşimed, bu oranın  $(223/71, 220/70)$  aralığında olduğunu kanıtladı[2]. Arşimed’ten sonra, iç-kiriş ve dış-teğet düzgün çokgenlerin kenar sayısını artırarak, bir çemberin çevresinin çapına olan oranının, matematiksel tanımlamalara göre kesin olarak bulunacağı aralığın sınırlarını hesaplama yarışı başladı. Viéte 1579 yılında, 393216 kenarlı çokgenlerin çevresini hesaplayarak söz konusu aralığı  $(3,1415926535, 3,1415926537)$  olarak bulduktan sonra, 1593’te yayımlanan bir eserinde bu aralığın sınırlarından birini istenen basamağa kadar

$$(1) \quad \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{2}} \times \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}}} \times \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}}}} \times \dots}$$

biçiminde sonsuz çarpım yöntemi ile hesaplayacak formülü verdi.

Bu oranın, matematikçiler tarafından 17.yüzyıl ortalarına kadar tanımlanmış bir simgesinin bulunmaması ilginçtir. Bir çemberin çevresinin çapına oranını simgelerle ifade eden ilk kişilerden biri olan William Oughtred, bu oranı 1652’de “çevre ölçüsü” anlamındaki Yunanca "*περίμετρον*" (perimetron) sözcüğünün ilk harfi olan  $\pi$  ile çemberin çevresini; “ikiye bölen ölçü” anlamındaki Yunanca "*διαίρομετρον*" (diairo-metron) sözcüğünün ilk harfi olan  $\delta$  ile de çemberin çapını simgeleyerek  $\pi/\delta$  biçiminde gösterdi.

Birim çaplı çemberin çevresi bu orana eşit olduğundan, doğal olarak daha sonraları oranın kendisi için doğrudan doğruya  $\pi$  simgesi benimsendi ve günümüzde, bir çemberin çevresinin çapına olan oranını  $\pi$  ile göstermek evrenselleşti.

$\pi$  simgesini 1685’te dönen bir cismin ağırlık merkezinin izlediği dış kenarı göstermek için kullanan John Wallis, Viéte’ninki gibi karışık kök işlemleri gerektirmeyen, tam sayıların çarpımı ve bölümü biçiminde yine sonsuz bir çarpım olan

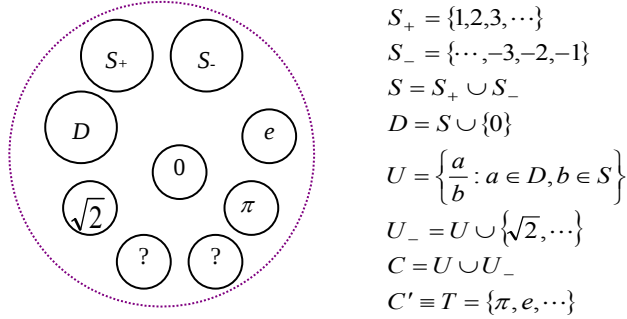
$$(2) \quad \pi = 2 \times \frac{2 \times 2 \times 4 \times 4 \times 6 \times 6 \times 8 \dots}{1 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7 \times 7 \dots}$$

algoritmasını önerdi. Viéte ve Wallis’inki gibi daha sonraları, hesaplama açısından giderek etkinleşen bir çok algoritma üretildi. Zaman içinde, matematikçiler arasında daha etkin algoritma arayışları sürse de,  $\pi$  oranının en geçerli algoritmaya göre hesaplanan *yaklaşık değerinin basamak sayısını arttırmak* ağırlık kazandı. Hesaplanan bu değer,  $\pi$  oranına ilişkin değer içinde bulunacağı gerçek sayı eksenindeki bir aralığın alt yada üst sınırı olduğu giderek unutuldu ve bulunan sayısal değer öne çıkarılarak  $\pi$  oranının kendisine “ $\pi$  sayısı” denmeye başladı.

Şekil 2’de özetlenen *gerçek sayılar kümesinin* yalnızca sayma sayılarından haberdar olan birinin, bu  $\pi$  oranının pay ile paydasındaki sayıların ve oranının kendisini de  $S$  kümesinin bir bireyi olarak görmesi ve değerini “3” olarak benimsemesi doğaldır. “Birim karenin köşegen uzunluğu” olan “ $\sqrt{2}$ ” gibi,  $\pi$ ’nin de *doğal sayılar kümesi*  $D$ ’nin bireyleri ile üretilebilen *rasyonel sayılar kümesi*  $U$ ’nun bir bireyi olmadığını keşfeden eski Yunanlılar, bu keşiflerini tanrılara yüz inek kurban ederek kutladılar. Doğal sayılar kümesinin bireyleri ile üretilemeyeceği anlaşılan<sup>3</sup>,  $\sqrt{2}$  gibi yalnızca alt ve üst sınırları kesirli sayılarla belirlenebilen sözde  $\pi$  sayısının da, önce *irrasyonel sayı kümesi*  $U$ ’nin bir bireyi olduğu, ancak katsayıları tam sayı bir polinomun çözümü olabilen *cebirsel sayılar kümesi*  $C$ ’nin özelliğini taşımadığı görüldüncü de, gerçek sayılar kümesi  $G = C \cup C'$  nin cebirsel olmayan *transandantal sayılar kümesi*  $C' \equiv T$ ’nin bir bireyi oldu.

---

<sup>3</sup>  $\pi$ ’ oranının en yaklaşık değerini,  $S_+$  kümesinin bireyleri olan pay ve payda değerlerinden elde etme çabaları bugün matematiksel ve bilişimsel eğlenceli bir uğraş olarak devam etmektedir[3].



**Şekil 2.** Gerçek sayılar kümesinin ayrık alt kümeleri ve ayrık

Saymakla başlayıp, gerçek ve sanal sayı kümelerine ulaşan, ve tanımladığı sayı kümelerinin bireyi olmayan yeni bir *sözde* sayı ile karşılaşınca, yeni sayı kümeleri tanımlamakta matematik özgürdür. Ancak, varlık nedeni olgusal dünyaya ilişkin *sayısal sorunların* çözümü olan matematik, bu özgürlüğü, istatistiksel gerçekle olgusal dünyaya bağlanamayan salt düşünsel gerçeklik boyutunda kalacak biçimde kullanamaz[4]. *Sayılar kuramının* tutarlılığı için tündengelimle türetilen *her yeni sayı*, zorunlu olarak olgusal dünyaya ilişkin bir gerçekten yola çıkılarak tanımlanır ve olgusal dünyayı daha iyi açıklamakta yararlanıldığında kuram içindeki yeri pekinleşir.

$\pi$ 'yi bir sayı olarak görenlerden, onu “gizemli bir sayı” olarak niteleyenler de var [5].  $\pi$  ve benzeri sayılarda gerçekten bir gizem var mı? Evet, var... ama, gizem sayılarda yada rakamlarda değil! Peki, öyle ise...

## 2. GİZEM $\pi$ 'nin NERESİNDE?

Önce yukarıdaki satırlar arasında değinilen  $\pi$  oranının özüne ilişkin özellikleri, şöyle yeniden bir sıralayalım: Çember, bir noktadan eşit uzaklıktaki noktalardan oluşan *yerölçümsel* bir şekildir.

*Olgusal dünyadaki bir çember, ölçülebilir iki özelliği olan çevresi ve çapı ile tanımlanabilir.*

*Olgusal dünyadaki tüm çemberler kümesi için, “Bir çemberin çevresine oranı değişmezdir.” önermesi, istatistiksel tümevarımla doğrulanan bir varsayımdır.*

*Öteolgusal dünyadaki ideal tüm çemberler kümesi için, “Bir çemberin çevresine oranı değişmezdir.” önermesi, matematiksel tümevarımla kanıtlanan bir varsayımdır.*

*Bu değişmez için, istatistiksel ve matematiksel olarak yanlışılanabilir değerler önerilebilir.*

*İstatistiksel tümevarımla doğrulanan değer, tahmin hatası; matematiksel tümevarımla kanıtlanan değer ise, yakınsama hatası içereceğinden, söz konusu değişmez için önerilen tüm değerler, hata içeren birer tahmindir.*

*Bu değişmezin, sayısal bir değeri olduğu düşünülse de, mutlak doğru değerine, ölçerek ya da sayarak ulaşamaz.*

*Bilinmeyen sayısal bir değeri olduğu düşünülen bu değişmez, olgusal dünyadaki kusurlu tüm çemberlerden esinlenerek düşünüy kurduğumuz öteolgusal dünyadaki kusursuz tüm çemberleri tanımlayan değişmezlerden biridir.*

Bu özellikleri taşıyan bir değişmez için, Yunanca'da "ölçme" anlamındaki "metros" sözcüğünün önüne, "ötesi" anlamındaki "para" önekini ekleyerek türetilen "parametros" sözcüğünden, Latince ve Yunanca kökenli dillerde "parameter" sözcüğü türetilmiştir[6]. Bizde de yaygın olarak, dilimize sokulan kökü yabancı ve öneki yabancı çıkmaz sokaklardan biri olan "parametre" sözcüğü kullanılıyor. Bu kavramla ilk karşılaşmalarımız yabancı dille düşünür olduklarından, her düşünceyi ifade edebilecek yetenek ve güzellikteki Türkçe'mizle türetilebilecek bir sözcük yakıştırmak yerine, "parameter" sözcüğünü "parametre" olarak Türkçeleştirdiler! <sup>4</sup> Oysa , *öteölçüm* gibi bir sözcük, bu kavramla ilk kez karşılaşana bile hemen anlamı ile ilgili ilk ipuçlarını verebilir.

Şimdiye kadar " $\pi$  sayısı" demekten dikkatle kaçınıp " $\pi$  oranı" olarak sözünü ettiğim bu *öteölçümün* de, bir çemberin çevre uzunluğunun çap uzunluğuna olan oranı biçimini değil, *bir çemberin çevresinin, çapının katı cinsinden uzunluğu*, ya da kısaca, *birim çemberin çevresinin yarısı* biçimindeki *işlemsel tanımını* öne çıkaracağım.  $\pi$ 'nin bu tanımı, bir çemberin kendi çapının katı biçiminde ölçülebileceği düşünülen çevresinin de ancak,  $\pi$  *öteölçümü* yardımı ile tanımlanabilen bir *öteölçüm* olabileceğini belirtir.

---

<sup>4</sup> Yabancı bir dilden olduğu gibi sözcükleri devşiren birileri, kendi aralarında, kendilerine özgü karma bir dil geliştirebilirler. Bunların önemli bir bölümü, düşüncelerini kendi aralarında bu karma dille tartışmak yerine, "parametre" gibi sözcükleri bolca ve sıkça araya katarak geniş kitlelerin önünde onların dili ile konuşur görünebilir. Dillerinden bilmediği sözcüklerin döküldüğünü gören sıradan insanların ise, bu bilen(!) insanlara hayranlığı ve saygısı giderek artar. Sonra bilmeyenler, bilenlerin dilindeki sözcüklerin nereden aktarıldığını fark edip, çocuklarının bilen olabilmeleri için, "dilini düşünce" olduğunu ve anadan-atadan öğrenilebileceğini unutarak, evrensel olduğu iddia edilen bir başkalarının ana dilinde eğitim veren kurumlarda eğitilmeleri(!) için çırpınırlar. "Moralim bozuk." demenin "Ahlakım bozuldu." demek olacağının ayırda olamayan, üvey ana dilinden aktarılan içi boşaltılmış sözcükleri kullandıkça çağ atladığı zannına kapılan bilenler(!) ve bilmeyenler, ana dillerinden giderek uzaklaştıkça, hep birlikte *düşünce üretmez ve konuşamaz* olurlar.

İdeal bir çemberin çapı da,  $\pi$  öteölçümüne göre çemberin çevresini belirleyen bir öteölçümdür. Dolayısı ile, her türlü düşünsel gerçeği tanımlamada olduğu gibi, bu üç öteölçüm birlikte; çevre için  $\langle Y \rangle$  ve yarıçap için  $\langle X \rangle$  simgeleri kullanılarak,

$$(3) \quad \langle Y \rangle = \pi.2.\langle X \rangle$$

biçiminde, ideal bir çemberin *matematiksel tanımını* verir.

Eğer (3)'teki ilişki çember kavramından tümü ile soyutlanarak salt matematiksel bir ilişki gibi görülürse, bu ilişkide, herhangi iki öteölçüm için *doğru olduğu varsayılan sayısal değerler* yerine konarak, aritmetik işlemlerle üçüncünün, bu varsayımlar altında mantıksal olarak doğru olacağı öngörülen değerine ulaşılabilir.

Ancak, yarıçapları  $[0, \infty)$  aralığındaki tüm çemberler *evreni* için geçerli olan (3)'teki ilişki çember kavramından soyutlanmadıkça,  $\pi$  öteölçümü için *rasgele* bir değer doğru olduğu varsayılmaz.  $\langle X \rangle$  yada  $\langle Y \rangle$  öteölçümlerinden yalnızca biri için rasgele bir değer ve rasgele bir değer verilemeyen  $\pi$  öteölçümünün istatistiksel ya da matematiksel *işlemsel* ve *nesnel* bir tanımına göre elde edilen sayısal değeri doğru varsayılarak, diğer üçüncü öteölçümün, bu varsayımlar altında doğru varsayılacak değeri tahmin edilebilir.

$\langle X \rangle$  ya da  $\langle Y \rangle$  öteölçümleri ile,  $\pi$  öteölçümü arasındaki fark, “birim çaplı çemberin çevre uzunluğunun yarısı” olan  $\pi$  öteölçümünün, tüm çemberlerin çevre uzunluğunu yarıçap uzunluğuna göre *belirleyen* “birimsiz”, ama kendisinin *evrensel* bir birim oluşudur. Evrensel bir birim olan  $\pi$  öteölçümünün *gizemi*, onun *ölçülemeyen-sayılamayan*, ancak belli bir hata ile *yakınsanabilen* yada *tahmin* edilebilen evrensel bir gerçek oluşunda yatar. *Yaklaşılabilen* ancak *erişilemeyen* tüm öteölçümler için geçerli olan bu gizem, bir öteölçümün sayısal değerini araştırmada yararlanabilecek matematiksel ve istatistiksel yaklaşımların temel mantığı kavranarak çözülebilir.

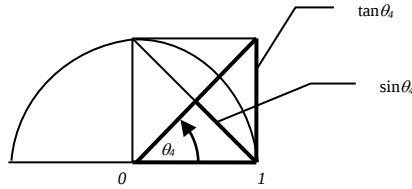
## 2.1 Matematiksel Yaklaşım

Bir öteölçüme ancak *ereysel* olarak yaklaşılacağına göre, Arşimed yöntemi olarak bilinen yöntemin temel mantığı,  $\pi$  öteölçümüne matematiksel olarak nasıl yaklaşılacağına gösteren gelmiş, geçmiş ve gelecek tüm yöntemlerin de temeli olmaya devam edecektir. Ancak, Arşimed'in yalnızca Pisagor teoremi ile düzgün 96-genin çevresini hesaplamada gösterdiği sabrı günümüzde gösterebilecek çok az kişi vardır. Bugün, trigonometrik işlevi olan bir hesap makinesi ile, hesap makinesinin basamak sayısı kadar duyarlıktaki  $\pi$  öteölçümünün doğru sayılabilecek matematiksel yaklaşık bir değerine,

çemberi yakınsayan düzgün çokgenin kenarsayısı  $10^{20}$  olmak üzere birkaç saniyede ulaşabilir.

### 2.1.1 Matematiksel Tanımlama

(3)'ün, ideal bir çemberin matematiksel tanımı olduğu söylenmişti. Aynı zamanda  $\pi$ 'nin kavramsal ilk tanımı olan (3), eğer varsa  $\pi$  öteölçümünün sayısal değeri konusunda bir fikir vermez.  $\pi$ 'nin sayısal değeri konusunda daha açık fikir verecek Arşimed'inki gibi analitik tanımları gerekir. Şekil 3'deki birim çemberin çevre uzunluğunun 8'de biri olan  $\theta$  merkez açısının gördüğü yay parçası uzunluğu  $\theta_4 = \pi/4$ ; iç kiriş düzgün 4-genin çevre uzunluğunun 8'de biri;  $a_4 = \sin(\pi/4)$ ; ve dış teğet düzgün 4-genin çevre uzunluğunun 8'de biri de,  $b_4 = \tan(\pi/4)$  olduğuna göre, matematiksel tümevarımla düzgün  $n$ -genler için,



Şekil 3  $\theta_4$  merkez açısına göre birim çemberin

$$\begin{aligned}
 a_4 &< \theta_4 < b_4 \\
 4 \times a_4 &< \pi < 4 \times b_4 \\
 4 \times \sin \frac{\pi}{4} &< \pi < 4 \times \tan \frac{\pi}{4} \\
 (4) \quad 6 \times \sin \frac{\pi}{6} &< \pi < 6 \times \tan \frac{\pi}{6} \\
 &\cdot \\
 n \cdot \sin \frac{\pi}{n} &< \pi < n \cdot \tan \frac{\pi}{n} \\
 n \cdot a_n &< \pi < n \cdot b_n
 \end{aligned}$$

yazılabilir. Buradan analitik olarak, kenar sayısı  $\infty$ 'a eren iç-kiriş ve dış-teğet düzgün çokgenin ideal çemberle tam örtüşeceği düşünülerek,

$$(5) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \sin \frac{\pi}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \tan \frac{\pi}{n} = \pi$$

ya da ,

$$(6) \quad \lim_{\theta \rightarrow 0} \sin(\theta) = \lim_{\theta \rightarrow 0} \tan(\theta) = \pi$$

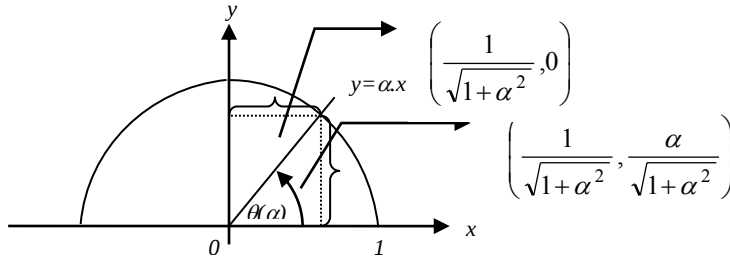
biçiminde  $\pi$  öteölçümü tanımlanabilir. (3),(4),(5) ve (6)'daki gibi türetililecek  $\pi$ 'nin denklik biçimindeki tüm matematiksel tanımları, mantık dili ile, " $\pi$ ,  $\pi$ 'dir." önermesinden başka bir şey değildir. Ancak,  $N$  sonlu ama yeterince büyük bir sayı olmak üzere,

$$(7) \quad a_N = \sin \frac{\pi}{N} \text{ ve } b_N = \tan \frac{\pi}{N}$$

değerleri hesaplanabilirse<sup>5</sup>,  $\pi - N.a_N$  ve  $N.b_N - \pi$  kadar hatalı alt ve üst sınırlar tanımlanabilir. Bu hatanın tanımında yine  $\pi$ 'nin kendisinin yer alması, *mutlak doğru* sayısal bir değerinin elde edilemeyeceğini ve  $\pi$ 'ye ilişkin her hangi sayısal bir değerın yalnızca yaklaşık bir değer olabileceğini gösterir.

$\theta$  değişkeninin sıfırı yakınsaması durumunda,  $\theta$ 'nın birer matematiksel işlevi olan  $\sin(\theta)$  ve  $\tan(\theta)$  işlevlerinin de  $\pi$ 'yi yakınsayacağını belirten (6)'daki tanımın, (3)'teki tanımdan farkı, (3)'teki  $\langle X \rangle$  ya da  $\langle Y \rangle$  öteölçümleri gibi uzunluk değil, aslında onlar gibi bir öteölçüm olan  $\theta$  açısının bir *alana* ilişkin olmasıdır.

Şekil 4.'teki,  $\theta(\alpha)$  açısı,  $\alpha$  öteölçümü ile tanımlı bir  $y=\alpha.x$  doğrusu ile,  $y=0$



Şekil 4.  $\theta(\alpha)$  açısının taradığı birim

doğrusu arasındaki birim çember diliminin,

$$(8) \quad A(\alpha) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}} \times \frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}} + \int_{1/\sqrt{1+\alpha^2}}^1 \sqrt{1-x^2} dx$$

biçiminde tanımlanabilecek alanı ile orantılı bir büyüklüktür. Bu alan,  $\beta = \sqrt{1+\alpha^2}$  dönüşümü kullanılarak,

<sup>5</sup> Kişisel bilgisayarların donatıları arasındaki sanal bir hesap makinesinde  $N=10^{20}$  için 31'inci basamağa kadar  $\pi$  değerinin,  $N.a_n=N.b_n=3.1415926535897932384626433832795$  olduğunu göstermek, olsa olsa matematiksel bir *yanılsama* olabilir.

$$(9) \quad \begin{aligned} A'(\alpha) &= A'(\beta) \cdot \beta'(\alpha) = \frac{1}{2(1+\alpha^2)} \\ A(\alpha) &= \int_0^\alpha A'(\alpha) d\alpha = \int_0^\alpha \frac{1}{1+v^2} dv \end{aligned}$$

biçiminde de yazılabilir[7].

$\pi$ 'nin (3)'teki analitik tanımına göre, tam açısı,  $2\pi$ ; yarım açısı,  $\pi$ ; dik açısı da  $\pi/2$  kadar birim çemberin yay parçalarına karşılık gelir. Bu tanımlara göre, dik açının yarısı olan  $\theta(\alpha=1)$  açısının birim çemberde taradığı alanın değeri de,

$$(10) \quad \frac{\pi}{4} = \int_0^1 \frac{1}{1+v^2} dv$$

biçiminde tanımlanabilir. Görüldüğü gibi,  $\pi$  öteölçümünün bu tanımı da,  $\pi$ 'yi yine, değeri tam olarak hesaplanamayacak, ancak *belli bir hata ile yakınsanabilecek bir büyüklük* olarak belirlemektedir.

### 2.1.2 Yakınsama Hatası

Matematiksel tanımları yapılan öteölçümlerin sayısal değerlerini verecek *işlemsel* tanımları, yaklaşık değerin nasıl hesaplanabileceği ve yaklaşık değerin öteölçümün kendisini ne kadar hata ile yakınsayacağının ölçüsü olan *yakınsama hatası* tanımlanarak yapılabilir. (10)'daki tümlev, '*kısmi binomiyal açılım*'la<sup>6</sup>,

$$(11) \quad \begin{aligned} \frac{\pi}{4} &= \int_0^1 (1-x^2+x^4-x^6+\dots+(-1)^{S-1}x^{2(S-1)}) dx \\ &+ \int_0^1 \frac{(-1)^S x^{2S}}{1+x^2} dx \end{aligned}$$

biçiminde yazılabileceğinden,

$$(12) \quad T_S^X = \sum_{x=1}^S (-1)^{x-1} \frac{1}{2x-1}$$

ile *yaklaşık değeri* hesaplanabilir.  $S$  terimli bu yaklaşık değerin,

$$(13) \quad H_S^X = \int_0^1 \frac{(-1)^S x^{2S}}{1+x^2} dx$$

ile de  $\pi/4$ 'ü *yakınsama hatası* tanımlanabilir. (13)'teki tümlenenin paydası en fazla 1 değerini alabileceğinden, *yakınsama hatasının mutlak değeri*,

<sup>6</sup>  $(1-y^S)(1-y)^{-1} = 1+y+y^2+\dots+y^{S-1} \Rightarrow (1-y)^{-1} = 1+y+y^2+\dots+y^{S-1} \wedge h_S(y) = y^S \cdot (1-y)^{-1};$   
 $y = -x^2, (1+x^2)^{-1} = 1-x^2+x^4-x^6+\dots+(-1)^{S-1}x^{2(S-1)} + h_S(-x^2) \bullet$

$$(14) \quad 0 \leq \left| T_S^X - \frac{\pi}{4} \right| < \int_0^1 x^{2S} dx = \frac{1}{2S+1}$$

aralığında olacaktır.

### 2.1.3 Matematiksel Yakınsama Yasası

(14)'teki sonuç,  $\hat{\theta}_S^X$  yaklaşık değeri (12)'deki gibi tanımlanabilen, her hangi bir evrensel  $\theta^X$  öteölçümü için geçerli olacak bir *matematiksel yakınsama yasa*sının sonucudur:

$$(15) \quad \lim_{S \rightarrow \infty} \left( \left| H_S^\theta \right| \equiv \left| \hat{\theta}_S^X - \theta^X \right| \right) \rightarrow 0 \Rightarrow \lim_{S \rightarrow \infty} \hat{\theta}_S^X \rightarrow \theta^X.$$

Sayısal bir üst sınırı, (13)'teki gibi belirlenecek bir  $H_\theta^X$  yakınsama hatasına göre de, (15)'den her zaman,

$$(16) \quad Ol \left( \left| \hat{\theta}_S^X - \theta^X \right| < H_\theta^X \right) = 1$$

yazılabilir. (16)'daki aralık,  $\theta^X$  öteölçümünün *kesinlikle* bulunacağı değer aralığıdır. Bu matematiksel yakınsama yasa, öteölçümlerin yaklaşık sayısal değerlerini elde etmeye yönelik tüm *sayısal yöntem*lerin temel mantığı olan matematiksel tümevarımdır.

### 2.2 İstatistiksel Yaklaşım

Matematiğin kusursuz dünyasındaki bir çemberin ideal tanımına olgusal dünyadan bakıldığında, bir çemberin (3)'de verilen *matematiksel modeli*, ancak *sanal* bir çemberin *eksik* bir modeli olabilir.

Olgusal dünyada gerçek bir çemberin çapı ve çevresi, ölçeklenmiş bir ölçüm aygıtı yardımı ile ölçülebilir. Aynı çemberin her hangi bir ölçümünde yarıçap için elde edilen değeri  $x_s$  ile simgelersek, bu değerlerin  $\langle X \rangle$  öteölçümünden

$$(17.a) \quad h_s^x = x_s - \langle X \rangle$$

biçimindeki farkları,  $X$  rassal değişkenine ilişkin,  $x_s$  ölçüm değerlerinin içerdiği *doğrudan ölçülemeyen* hata değerleri olup, ölçme hatası olgusunun matematiksel tanımı olan

$$(17.b) \quad H^X = X - \langle X \rangle$$

$H^X$  rassal değişkenine ilişkin sözde gözlem değerleridir. Aynı çemberin *yinelenen* ölçümlerinin farklı değerlerle sonuçlanabileceği gerçeğini göz ardı etmeyen deneysel fizik, kimya ve biyoloji gibi *istatistiksel bilim*ler için bu ölçüm değerleri, *rassal* bir *değişkenin* (17)'de tanımlanan ölçme hatasını içeren *gözlenen değer*leridir.

### 2.2.1 İstatistiksel Tanımlama

Bir çemberin *istatistiksel tanımı*, (3)'teki  $\langle X \rangle$  ve  $\langle Y \rangle$  öteölçümlerinin ilişkin olduğu olgusal dünyada değerleri ölçme yolu ile gözlenebilen  $X$  ve  $Y$  rassal değişkenlerinin (17)'deki gibi ölçme hatası olgusunu içeren tanımları (3)'te yerine konarak,  $X$  ve  $Y$ 'ye ilişkin ölçme hataları birlikte  $H$  olmak üzere,

$$\begin{aligned} Y - H^Y &= 2\pi(X - H^X) \\ (18.a) \quad Y &= 2\pi X + (H^Y - 2\pi H^X) \\ Y &= 2\pi X + H \end{aligned}$$

yada  $X$ ,  $Y$  ve  $H$  rassal değişkenlerinin her hangi bir gözleme ilişkin değerleri cinsinden

$$(18.b) \quad y_s = 2\pi x_s + h_s$$

biçiminde yapılabilir.

Bir çemberin (18)'deki istatistiksel tanımı, evrensel  $\pi$  öteölçümünün tahmini için düzenlenecek bir deneyin tasarımındaki başlangıç noktasıdır. (18)'deki istatistiksel model,  $\pi$  öteölçümünün tahmini için önce  $X$ 'in sonra  $Y$ 'nin ölçüleceğini ve bu ölçümlerin hatalı olacağını söylüyor. Hatalı verilere dayalı bir çıkarımla elde edilecek öteölçüm değerleri de hatalı olacaktır. Deneysel bilimler ortak ve temel amaçlarına<sup>7</sup> ulaşabilmek için, neden-sonuç ilişkisi içinde açıklanabilen söz konusu olgunun davranışını önceden öngörebilmelidirler. Bu öngörülerin de hatalı olacağı bellidir. Bilimlerin mutlak kesin bilgi üretme gibi bir saplantısı olamaz. Bilimler için, öngörülerindeki hatanın nesnel ve nicel tanımını verebilmeleri yeterlidir. Son derece duyarlı da olsa, ölçüm yolu ile elde edilen gözlemlerin ne kadar hata içerdiği konusunda güvenilir bir bilgi olmadan bu başarılamazdı.

### 2.2.2 Ölçme Hatası

---

<sup>7</sup> Bu bilimlerin ortak ve temel amaçları,

- kendi araştırma alanları kapsamındaki rassal değişkenler arasındaki neden-sonuç ilişkisinin *işlevsel tanımı* ile bu işlevsel tanımda yer alan rassal değişken değerlerine ilişkin gözlemsel değerlerin işlemsel tanımını yapıp,
  - ölçerek elde ettiği gözlemlerden *istatistiksel tümevarımla*, işlevsel tanımda yer alan evrensel öteölçümlerin *tahminlerine* ulaşmak ve
  - öteölçümlerin bu tahminlerine dayalı olarak olgusal dünyanın güvenilir bir açıklaması ve davranışının önceden *öngörülmesinden* sonra,
- olgusal dünyanın işlevsel tanımında neden konumundaki rassal değişkenlerin öteölçümlerini değiştirerek, sonuç konumundaki rassal değişkenlerin öteölçümlerini *denetim* altına almaktır.

*Doğrudan ölçülemeyen*  $h_s^x$  ölçme hata değerleri  $H^X$  gibi bir rassal değişkenin *sözde gözlenen değerleri* olup,  $\langle X \rangle$  için  $\langle X \rangle'$  gibi bir *doğru değer* kabul edilerek, bu sözde gözlenen değerlerin ancak,

$$(19) \quad \hat{h}_s^x = x_s - \langle X \rangle'$$

biçiminde tahminleri üretilebilir.

Farklı olanların birleşebileceği bir *denge* noktasının ancak onların *ortasında* olabileceğini söyleyen mantık,  $\langle X \rangle$  öteölçümü için doğru kabul edilebilecek değerin de,  $S$  kere yinelenen  $x_s$  gözlem değerlerinin

$$(20) \quad \bar{x}_S = \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S x_s$$

biçimindeki *aritmetik ortalaması* olacağını söyler[8]. Buna göre, (17.a) ve (18)'den,

$$(21) \quad \sum_{s=1}^S \hat{h}_s^x = \sum_{s=1}^S (x_s - \bar{x}) = 0 \Rightarrow \bar{\bar{h}}_S^x = \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S \hat{h}_s^x = 0$$

olacağı kolayca görülebilir. Kısaca (21),  $H^X$  rassal değişkenini betimleyen öteölçümlerden yalnızca biri olan  $\langle H^X \rangle$  öteölçümü için doğru kabul edilebilecek değerin *her zaman ve yalnızca* “0” olduğunu söylüyor.

$S$  kere yinelenen  $x_s$  gözlem değerlerinin her birinin ayrı bir  $X_s$  rassal değişkenine değil de aynı tek bir  $X$  rassal değişkenine ilişkin olabilmesi için, her zaman eldeki ölçüm değerleri ile,

$$(22) \quad \begin{aligned} V : \langle H^{X_s} \rangle &= 0, \quad s = 1(1)S \\ V' : \langle H^{X_s} \rangle &\neq 0 \end{aligned}$$

*varsayımının* doğrulanması yanında, başlangıca göre denge noktası olan  $\langle H^{X_s} \rangle$ 'e göre

$H^{X_s}$  rassal değişkeninin

$$(23) \quad \left\langle \left( H^{X_s} - \langle H^{X_s} \rangle \right)^2 \right\rangle = \left\langle \left( H^{X_s} \right)^2 \right\rangle$$

biçiminde tanımlanan ikinci momenti<sup>8</sup> ya da kısaca *değişkesi* için de,  $X_s$  rassal değişkeninin *değişkesi*,

---

<sup>8</sup> Dönen bir cismin, dönme eksenі üzerine etki eden kuvvetlerin eksen üzerindeki etki noktalarının dönme merkezine olan uzaklığı ile etki eden kuvvetlerin çarpımı olan döndürme kuvveti. Toplam

$$(24) \quad \sigma_{x_s}^2 = \left\langle \left( X_s - \langle X_s \rangle \right)^2 \right\rangle, \quad s = 1(1)S$$

olmak üzere,

$$(25) \quad \begin{aligned} V : \left\langle \left( H^{x_s} \right)^2 \right\rangle &= \sigma_x^2, \quad s = 1(1)S \\ V' : \left\langle \left( H^{x_s} \right)^2 \right\rangle &\neq \sigma_x^2 \end{aligned}$$

varsayımının doğrulanması gerekir.

(22) ve (25)'deki varsayımlar, sistematik ölçme hatasına yer vermeyen bir ölçme yöntemi ile,  $S$  kere yinelenen  $x_s$  gözlem değerlerinin her birinin aynı  $X$  rassal değişkenine ilişkin olması sağlandığında doğrulanmış olurlar. Ölçme hatasının yalnızca iki öteölçümünün değerleri konusunda bir fikir veren bu varsayımların doğrulanması, belli bir ölçüm değerinin ne kadar ölçme hatası içerdiğini söylemez.

### 2.2.3 Olasılık Dağılımı ve Beklenen Değerler

Bir rassal değişkeni tanımlamak için yalnızca, denge noktası biçimindeki birinci momentinin ve denge noktasına göre ikinci momenti olan değişkesinin tanımlanması yetmeyeceği gibi, rassal bir değişkenin *moment üreten işlevi*<sup>9</sup> ile tüm momentlerinin genel bir tanımını vermek ve gerektiğinde ölçülmüş değerlerden bu momentlerin tek tek sayısal tahminlerini elde etmek de bir rassal değişkeni tanımda ve belirlemede pek etkin bir yol değildir.

Bir  $X$  rassal değişkeninin alabileceği değerleri hangi olasılıkla alabileceğini belirleyen,

$$(26) \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x).dx = 1$$

koşulunu sağlayan *olasılık yoğunluk işlevi*  $f(x)$  ile, söz konusu rassal değişkenin yalnızca başlangıca göre birinci momenti ve buna göre diğer momentleri gibi özel işlevleri değil, tanım aralığı  $(a,b)$  olan rassal bir değişkenin her hangi matematiksel bir işlevi biçiminde tanımlanacak  $g(x)$  rassal değişkeninin

---

momentin sıfır olduğu nokta, ters yöndeki döndürme kuvvetlerinin denge noktası olup, dönme merkezi denge noktasına kaydırılan bir cisim dönmez.

<sup>9</sup>  $f(x)$ ,  $X$  rassal değişkeninin olasılık yoğunluk işlevi ise,  $\langle e^{tx} \rangle \equiv \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)dx$ ,  $X$ 'in moment üreten işlevidir.

$$(27) \quad \langle g(X) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f(x) \cdot dx$$

biçiminde *beklenen değeri* tanımlanabilir. Kuramsal fizik gibi *matematiksel bilimlerin*, (3)'teki gibi matematiksel tanımlarında yer alan ölçülebilen değişkenlere ilişkin öteölçümler, deneysel fizik gibi istatistiksel bilimlerde tahmin edilmeleri amaçlanan birer beklenen değerdir. Olgusal dünyadaki her hangi bir *ölçme olgusunun ideal tanımı* olan (17.b)'deki  $H^X$ ,  $X$  rassal değişkeninin bir işlevi olduğundan,  $f(x)$  olasılık yoğunluk işlevine göre beklenen değeri,

$$(28) \quad \langle H^X \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} (X - \langle X \rangle) \cdot f(x) \cdot dx = 0 \quad \text{ve}$$

değişkesi de,

$$(29) \quad \langle (H^X - \langle H^X \rangle)^2 \rangle = \langle (H^X)^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} (H^X)^2 \cdot f(x) \cdot dx = \sigma_X^2$$

biçiminde tanımlanabilir.  $\langle X \rangle = \mu_X$  ve  $\langle (X - \langle X \rangle)^2 \rangle = \sigma_X^2$  olmak üzere, ölçme olgusunun ideal tanımındaki olasılık işlevinin açık biçiminin,

$$(30) \quad f(x) = \frac{1}{\sigma_X \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{x - \mu_X}{\sigma_X} \right)^2}$$

olduğunu *Abraham De Moivre*(1677-1754) keşfetti.

(17.b)'deki matematiksel tanım, şimdi *Normal Olasılık Yasası* olarak bilinen (30) ile birlikte, ölçme olgusunun istatistiksel tanımını verir. Buna göre, ölçülebilen bir  $X$  rassal değişkeninin *dağılımı*<sup>10</sup>, beklenen değeri  $\mu_X$  ve değişkesi  $\sigma_X^2$  olan normal bir dağılım olup kısaca,

$$(31) \quad X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$$

olarak gösterilir. Ölçme hatasının dağılımı da, (17.b), (22), (25) ve (30)'a göre,

$$(32) \quad H_X \sim N(0, \sigma_X^2)$$

olup, *Hatalar Yasası* yada *Johann Karl Friedrich Gauss*(1777-1855)'a atfen *Gauss Yasası* olarak bilinir.

## 2.2.4 İstatistiksel Yakınsama Yasası

---

<sup>10</sup>  $F(x < a) = \int_{-\infty}^a f(x) \cdot dx \equiv F(a)$  ,  $-\infty < a < \infty$ .

$X$  yığının tanımlayan evrensel öteölçümlerden biri olan  $\theta^X$  beklenen değeri, kabul edilebilir bir tahmin hatasının üst sınırı  $H_\theta^X$  ve alabileceği değerlerden biri belli bir  $X$  yığınının rasgele seçilen  $S$  tane gözlem biriminden hesaplan *örnek istatistiği* değeri  $\hat{\theta}_S^X$  olmak üzere, *tahmin sanatının* temel mantığını oluşturan

$$(33) \quad \lim_{S \rightarrow \infty} \text{Ol} \left( \left| \hat{\theta}_S^X - \theta^X \right| < H_\theta^X \right) \rightarrow 1 \Rightarrow \lim_{S \rightarrow \infty} \hat{\theta}_S^X \rightarrow \theta^X.$$

biçimindeki *istatistiksel yakınsama yasanı*na göre tahmin edilebilir. Bu gün, *Büyük Sayılar Yasası* olarak bilinen bu teoremi, yeğeni *Nicolas Bernoulli*(1687-1759) tarafından ölümünden sekiz yıl sonra yayınlanan *Ars Conjectandi* adlı eserinde ilk kez ifade ederek kanıtlayan *Jacob Bernoulli*(1654-1705) *çağdaş istatistiksel bilimlerin* de yolunu açan kişi oldu[9],[10].

(15)'deki matematiksel yakınsama yasanındaki  $X$ , alabileceği değerler belli bir *sayı kümesinin* bireyleri olan bir *değişkeni*; (33)'teki istatistiksel yakınsama yasanındaki  $X$  ise, belli bir *gözlem kümesinin* bireylerine ilişkin *rassal* bir değişkenin gözlenen değerlerini simgelemektedir. Dolayısı ile istatistiksel yakınsama yasanında, matematiksel yakınsama yasanında olduğu gibi doğrudan yakınsama hatasının, yaklaşık değerin hesaplanmasında kullanılan terim sayısı  $S$  sonsuza giderken yakınsayacağı değer değil, kendisi de rassal bir değişken olan tahmin hatasının, örnek istatistiğinin hesaplanmasında kullanılan örnek bireyleri sayısı  $S$  sonsuza giderken, belli bir tahmin hata değerinden büyük ya da küçük olma olasılığının yakınsayacağı değer söz konusu olabilir. Bu nedenle de *istatistiksel yakınsama yasanı*nda,  $\theta^X$  öteölçümünün (16)'daki gibi *kesinlikle* bulunacağı bir değer aralığı değil,  $0 < \alpha < 1$  olmak üzere,  $\theta^X$  beklenen değerinin (30)'a göre  $1-\alpha$  *olasılıkla* bulunacağı

$$(34) \quad \text{Ol} \left( \left| \hat{\theta}_S^X - \theta^X \right| < H_\theta^X \right) = 1 - \alpha$$

bir değer aralığı tanımlanabilir.

(33) ve (34)'de ifade edilen istatistiksel yakınsama yasanı, beklenen değerlerin tahminlerini gözlemsel değerlerden elde etmeye yönelik tüm *istatistiksel yöntemlerin* temel mantığı olan *istatistiksel çıkarımdır*. Bu çıkarımın işlevsel olabilmesi için, bir rassal değişken olan  $\hat{\theta}_S^X$  örnek istatistiğinin olasılık dağılımının bilinmesi gerekir.

## 2.2.5 Merkezsel Erey Teoremi

Örnek istatistiği  $\hat{\theta}_s^x$ 'in gözlenen değerinin,  $X$  yığınınından rasgele seçilen  $S$  tane bireye ilişkin (20)'de tanımlandığı gibi bir aritmetik ortalama olması durumunda, istatistiksel yakınsama yasasına göre, beklenen değerinin

$$(35) \quad \langle \hat{\theta}_s^x \equiv \bar{X}_s \rangle = \left\langle \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S X_s \right\rangle = \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S \langle X_s \rangle = \frac{1}{S} \cdot S \cdot \mu_x = \mu_x \cdot$$

ve değişkesinin

$$(36) \quad \begin{aligned} \langle (\bar{X}_s - \mu_x)^2 \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \bar{X}_s^2 dF(\bar{X}_s) - \mu_x^2 = \dots \\ &= \frac{1}{S^2} \cdot \sum_{s=1}^S X_s^2 - S \cdot \mu_x^2 = \frac{\sigma_x^2}{S} \equiv \sigma_{\bar{X}}^2 \cdot \end{aligned}$$

olduğu biliniyor.<sup>11</sup>

$$X_s \sim \text{Binomial}(p, S) \text{ için, } \bar{X}_s = \frac{X_s}{S} \xrightarrow{\text{Olasılıkta}} p \text{ ve}$$

$\sqrt{S}(\bar{X}_s - p) \xrightarrow{\text{Dağılımda}} N(0, p \cdot q)$  olduğunu, 1733'de gösteren De Moivre'un bu sonucunu, her hangi bir  $F$  dağılımına sahip birbirinden bağımsız ve aynı dağılımlı  $\{X_s : s = 1(1)S\}$  rassal değişkenlerin ortak beklenen değeri  $\langle X \rangle = \mu_x$  ve değişkesi  $\langle (X - \langle X \rangle)^2 \rangle = \sigma_x^2 < \infty$  olmak üzere,

$$(37) \quad \bar{X}_s \xrightarrow{\text{Dağılımda}} N\left(\mu_x, \frac{\sigma_x^2}{S}\right).$$

biçiminde genelleştiren *Pierre Simon de Laplace*(1749-1827)'ın 1810'daki katkısı ile tahmin sanatının kapısı istatistiksel bilimler için ardına kadar açıldı[11],[12]. (37)'deki sonuç, *Pierre de Fermat*(1601-1605) ve *Blaise Pascal*(1623-1662)'ın birlikte ilk adımlarını attıkları *olasılık kuramı* bahçesinin tam merkezinde, Bernoulli'nin 1713'de ilk biçimini verdiği (33)'deki istatistiksel yakınsama yasası ile tanımladığı yerden fişkıran bu pınarın adı, haklı olarak Polya(1920) tarafından *Merkezsiz Erey Teoremi* (MET) olarak kondu[13].

$$Z_S^X = \frac{\bar{X}_s - \mu_x}{\sigma_{\bar{X}_s}} \text{ rassal değişkeninin, MET'ne göre,}$$

$$\text{er } \bar{X}_s \xrightarrow{S \rightarrow \infty} \mu_x \therefore \langle Z_S^X \rangle = 0 \text{ beklenen değerli ve}$$

<sup>11</sup> (35)'deki tanımın geçerli olabilmesi için,  $\{X_s : s = 1(1)S\}$  rassal değişkenler kümesinin bireyleri olan rassal değişkenlerin birbirinden bağımsız ve aynı dağılımlı(b.a.d.) olması ve  $\{x_s : s = 1(1)S\}$  örnek bireylerinin aynı  $X$  yığınınından rasgele örnekleme ile elde edilmesi yeterlidir. Ancak (33)'ün çıkarımı için  $S$ 'ye göre ereysel bir dağılım olan  $F(\bar{x}_s)$  dağılımının bilinmesi gerekir.

$$\left\langle \left( Z_s^x \right)^2 \right\rangle = \left\langle \left( \frac{\bar{X}_s - \mu_x}{\sigma_{\bar{X}_s}} \right)^2 \right\rangle = \frac{1}{\sigma_{\bar{X}_s}^2} \left\langle \left( \bar{X}_s - \mu_x \right)^2 \right\rangle = \frac{1}{\sigma_{\bar{X}_s}^2} \sigma_{\bar{X}_s}^2 = 1 \text{ değişkeli,}$$

$$(38) \quad \Phi(z^*) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z^*} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$

standart normal dağılımı yakınsayacağı açıktır.

Artık, bir  $X$  yığınınından rasgele seçilen  $\{x_s : s = 1(1)S\}$  örnekleminin (20)'deki ortalamasına göre  $\mu_x$  'in bulunacağı *güven aralığı*nın alt ve üst sınırlarını belirleyecek

(34)'deki *istatistiksel yakınsama hatasının değeri*,  $z_{\alpha/2} = \Phi^{-1}(1 - \alpha/2)$  olmak üzere,

$$(39) \quad H_\theta^X = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma_X}{\sqrt{S}}$$

alınarak,  $\mu_x$  beklenen değerinin  $(1-\alpha)$  güvenle,

$$(40) \quad \left( \bar{x}_s - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma_X}{\sqrt{S}}, \bar{x}_s + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma_X}{\sqrt{S}} \right)$$

aralığında olacağı söylenebilir ve (33)'deki istatistiksel yakınsama yasaının (34)'deki sonucu, bu durumda

$$(41) \quad Ol\left( \left| \bar{x}_s - \mu_x \right| \leq z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma_X}{\sqrt{S}} \right) = 1 - \alpha.$$

biçiminde ifade edilir.

## 2.2.6 $\pi$ Öteölçümünün İstatistiksel Tahmini

Bu bilgilerin ışığında, (18)'de verilen bir çemberin çapı ile çevresi arasındaki zorunlu ve nedensel ilişkinin istatistiksel modelindeki  $\pi$  öteölçümünün istatistiksel tahmini,  $\langle X \rangle$  yarıçaplı bir çember çizilerek,  $Y$  rassal değişkeni için (22) , (25) ve (32) varsayımlarının geçerli olduğu

$$(42) \quad \left\{ y_s : s = 1(1)S \mid x_s = \langle X \rangle, \forall s \right\}$$

deneysel verilerinden elde edilir.  $Y$  rassal değişkeninin beklenen değerinin ve değişkesinin tahminleri olan  $\bar{y}_s$  ve  $\hat{\sigma}_{y_s}^2$  değerleri, (42)'deki verilerden; ve bu değerlerden de,

$$\begin{aligned}\hat{\pi}_s &= \frac{\bar{y}_s}{2\langle X \rangle} \text{ ve } \sigma_{\hat{\pi}_s}^2 \equiv \langle (\hat{\pi}_s - \pi)^2 \rangle = \left\langle \left( \frac{\bar{y}_s}{2\langle X \rangle} - \frac{\langle Y \rangle}{2\langle X \rangle} \right)^2 \right\rangle = \frac{1}{4\langle X \rangle^2} \langle (\bar{y}_s - \langle Y \rangle)^2 \rangle \\ &= \frac{1}{4\langle X \rangle^2} \sigma_{\bar{y}_s}^2 = \frac{1}{4\langle X \rangle^2} \frac{\sigma_y^2}{S}; \hat{\sigma}_{\hat{\pi}_s}^2 = \frac{1}{4\langle X \rangle^2} \frac{\hat{\sigma}_{y_s}^2}{S}.\end{aligned}$$

tahminleri bulunarak, eldeki deneysel kanıtlara göre gerçek  $\pi$  değeri için, (41)'deki gibi,

$$(43) \quad Ol(|\hat{\pi}_s - \pi| < z_{\alpha/2} \hat{\sigma}_{\hat{\pi}_s}) = 1 - \alpha$$

olduğu söylenir.

### 3. SANAL GERÇEK

#### 2.1

Bir çemberin (3)'de verilen matematiksel modelinin, ölçme hatası olgusunu göz ardı ettiği için, olgusal dünyada çizilmek üzere tasarlanan sanal bir çemberin ancak eksik bir modeli olabileceği daha önce belirtilmişti. (18)'de verilen istatistiksel model de, bir dizi varsayıma dayalı olarak, yine sanal bir çemberin tanımı olmakla birlikte, olgusal dünyada ölçme eylemi ile çizilecek bir çembere ilişkindir. Bu varsayımların yeterince geçerli olduğu yaklaşık bir durum, çok dikkatli bir deney tasarımı ile gerçek dünyada oluşturulabilirse, (42)'deki verilerden (43)'teki bilgiye ulaşılabilir.

Tasarlanan deneysel ortamın, gerçekleşen deneysel ortamla ne kadar benzeştiği, gerçek deney verileri kullanılarak, “Model hatası, ölçme hatası ile örtüşür.” varsayımının, a posteriori sınanması ile belirlenir. Gerçek dünyanın, tutarlı, yeterli ve güvenilir bir açıklaması ve öngörüsüne, kuramla uygulama arasında, bu varsayımın her aşamada doğrulandığı, yönlendirilmiş gelgitsel bir süreç sonunda ulaşılır[14].

Tasarlanan deneysel ortamın tam benzeştiği, başka bir deyişle, “model hatasının ölçme hatası ile tam örtüştüğü”, sanal deney ortamları da oluşturulabilir.

Sanal deneyin ön koşulu, söz konusu olguya ilişkin istatistiksel modelde, temel girdi niteliğindeki, öteölçüm değerlerinin doğru olduğu varsayılan değerlerinin a priori belirlenebilmesi ve rassal değişkenlere ilişkin gözlemsel değerlerin, gerçek bir deneyde olduğu gibi ölçme ile değil, olasılık dağılımlarından rasgele örnekleme ile elde edilebilmesidir. Bu koşulu sağlayan istatistiksel bir modelin, neden-sonuç ilişkileri görünürde ne kadar karmaşık olursa olsun, temel girdi değerleri modelin yapısal biçiminde yerlerine konarak, çıktı değerleri matematiksel hesaplamalarla elde edilebilir. Bu tür istatistiksel modeller, sanal bir gerçek canlandırılarak, çıktı niteliğindeki rassal değişkenlerin bilinmeyen öteölçümlerinin tahmininde kullanılırlar.

### 3.1. Monte Carlo Tahmin Yöntemi

Gerçek deneyin olanaksız olduğu, girdi niteliğindeki değişkenlerin olasılık dağılımları üzerine geçerli varsayımlarla, çıktı niteliğindeki rassal değişkenlerin *sözde gözlem değerlerini* tanımlayan istatistiksel modelin kurulabildiği ve çıktı niteliğindeki rassal değişkenlerin bilinmeyen öteölçümlere ilişkin tahminlerin amaçlandığı durumlarda, istatistiksel bilimlerin hepsi *sanal deney* yoluna başvurur. Sanal deneyle sözde gözlem üretmeye, *benzetim*; bu yöntemle istenildiği kadar çok *büyük sayılarda* benzetim verilerinden istatistiksel yakınsama yasasının sonlu biçimi olan,

$$(44) \quad \text{er}_{S \rightarrow S^*} \bar{x}_S \rightarrow \bar{x}_{S^*} \approx \mu_X$$

ile  $X$  rassal değişkenin beklenen değerini tahmin etmeye de *Monte Carlo(MC) tahmin yöntemi* diyoruz. Veri elde etme maliyetinin çok düşük olduğu durumlarda, MC tahmin yöntemi biçilmiş kaftandır.

Sanal gözlem üretme, ya da benzetim yöntemi, gerçek bir yığın yerine, belli bir olasılık dağılımından rasgele örneklemedir. Herhangi bir  $R=F(x)$  olasılık dağılımının dağılımı, *standart tekdüze dağılım* olduğundan,  $F(x)$  olasılık dağılımının tersi varsa,  $r$  standart tekdüze rassal bir değişkenin gerçek yada sanal bir gözlem değeri olmak üzere,

$$(45) \quad x = F^{-1}(r)$$

biçiminde sanal gözlem değerleri elde edilecek  $X$  rassal değişkeninin dağılımının  $F(x)$  olacağı açıktır[15] .

Gerçekten tek düze dağılmış bir rassal değişkenin değerini gözlemek yerine, *sözde* tek düze olan bir rassal değişkenin sanal gözlem değerleri,  $K \in \mathbb{R}$  katsayı,  $h \in \mathbb{N}$  hane sayısı ve  $r_0$  bir başlangıç değeri olmak üzere,

$$(46) \quad r_i = \left[ K \cdot 10^h \cdot r_{i-1} \bmod (10^h + 1) \right] / 10^h$$

biçiminde belli bir algoritmayla üretilerek, bir olasılık dağılımından rasgele örnekle yapmak, MC yöntemi açısından daha uygundur. (46)'daki algoritmaya göre üretilecek bir birinden bağımsız,

$$(47) \quad \{r_s^{(1)}, s=1(1)S | K, h, r_0^{(1)}\}, \{r_s^{(2)}, s=1(1)S | K, h, r_0^{(2)}\}$$

tek düze dizilerinden, örneğin

$$(48) \quad \begin{bmatrix} z_i^{(1)} \\ z_i^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{-2 \ln r_i^{(1)}} \cdot \sin(2\pi r_i^{(2)}) \\ \sqrt{-2 \ln r_i^{(1)}} \cdot \cos(2\pi r_i^{(2)}) \end{bmatrix}$$

biçiminde iki değişkenli standart normal dağılımdan rasgele değerler elde edilebilir[16],[17]. Böylece, sanal gerçeğin istatistiksel modelinde temel girdi niteliğindeki rassal değişkenlerin her biri için, bir birinden bağımsız, sözde tek düze rassal değişkenlerin değerleriyle belli bir sanal gerçek, istenen sayıda canlandırılabilir.

### 3.2. $\pi$ 'nin Monte Carlo Tahmini

Sanal bir çemberin (18)'deki istatistiksel genel modelinde temel girdiler;  $\pi$  öteölçümünün kendisi ve çemberin yarıçapı  $X$  ile ölçme hatası  $H$  rassal değişkenleri; çıktı ise çemberin çevresi olan  $Y$  rassal değişkenidir.  $\pi$ ,  $\langle X \rangle$  ve  $\sigma_H^2$  öteölçümlerinin doğru olduğu kabul edilen değerleri ile, (46) ve (48)'deki algoritmalara göre elde edilen rassal değerler (18)'deki modelde yerlerine konarak, (42)'deki verilerin sanal değerleri,

$$(49) \quad y_s = 2 \cdot \pi \cdot \langle X \rangle + \sigma_H \cdot z_s^{(1)}, s = s(1)S$$

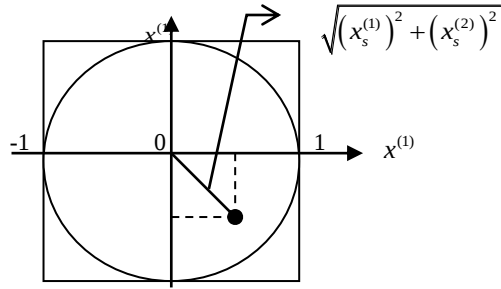
biçiminde üretilebilir.

$\pi$ ,  $\langle X \rangle$  ve  $\sigma_H^2$  öteölçümlerinin doğru olduğu kabul edilen değerleri, (42)'deki verilere göre elde edilen istatistiksel tahminler olabilir. Ancak, (49)'deki sanal gözlem değerlerinden,  $\pi$  öteölçümünün (43)'teki gibi istatistiksel bir tahminini MC yöntemiyle elde etmek, uygulanan yöntemlerin başarısını belirleme dışında, anlamsızdır. Eğer  $\pi$ 'nin doğru olduğu baştan kabul edilen istatistiksel tahmini ile MC tahmini uyuyorsa, MC sanal deneyde işlemsel ve yöntemsel bir yanlış yapılmadığı sonucundan başka mantıksal bir

sonuç çıkmaz. Dolayısı ile (18)'deki model,  $\pi$ 'nin kendisini de bir girdi olarak içerdiğinden,  $\pi$  öteölçümünün tahminine yönelik sanal bir deneyin istatistiksel modeli olamaz.

(18)'deki istatistiksel modelin temeli, (3)'te verilen matematiksel modeldi.  $\pi$  öteölçümünün tahminine yönelik sanal bir deneyin istatistiksel modelini kurabilmek için,  $\pi$  öteölçümünün diğer matematiksel tanımlarından yararlanılabilir. Bu tanımlar arasından, istatistiksel modele temel oluşturacak matematiksel modeldeki,  $\pi$ 'nin dışındaki tüm öteölçümlerin, gerçek verilerle istatistiksel tahminlerinin elde edilebilmesi gerekir. Bu açıdan bakıldığında, (10)'daki matematiksel model,  $\pi$  öteölçümünün tahminine yönelik sanal bir deneyin istatistiksel modelini kurulmasında temel alınabilir. Bu tanıma göre  $\pi$ , birim çemberin alanıdır. Birim çemberin alanı ise, istatistiksel tahmini gerçek deneysel verilerden elde edilebilir bir öteölçümdür.

Bu amaçla, Şekil.5'deki gibi kenarları birim çembere teğet olan kare bir alanın içine rasgele atışlar yapılabilir ve çemberin içine düşen atışlar sayılabilir.



Şekil 5. Kare içine rasgele atış.

Çemberin içine düşen atışların oranı, istatistiksel yakınsama yasasına göre, deneme sayısı arttıkça

$$(50) \quad \theta = \frac{\text{Çemberin Alanı}}{\text{Karenin Alanı}} = \frac{\pi}{4}$$

olasılığını yakınsar. Söz konusu kare alan içine rasgele bir atışın çemberin içine düşme olasılığı olan  $\theta$ 'nın;  $(x_s^{(1)}, x_s^{(2)})$ , s. rasgele atışın koordinatları olmak üzere,

$$(51) \quad y_s = \begin{cases} 1, & \sqrt{(x_s^{(1)})^2 + (x_s^{(2)})^2} < 1 \\ 0, & \sqrt{(x_s^{(1)})^2 + (x_s^{(2)})^2} \geq 1 \end{cases}, s = 1(1)S$$

biçiminde tanımlanacak bir Bernoulli değişkenin beklenen değeri olup,

$$(52) \quad \bar{y}_s = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s y_i$$

MC örnek ortalamasının yakınsayacağı,

$$(53) \quad \text{er}_{s \rightarrow S}(\bar{y}_s) \rightarrow Ol(Y=1)_{MC} \equiv \hat{\theta}_{MC}$$

değerle, MC tahmini elde edilebilir.

Gerçek bir deneyde, (42)'deki değerler doğrudan gözlem yolu ile bulunur. Deney çıktısı olan bu değerlerin (51)'deki matematiksel tanımında,  $(x_s^{(1)}, x_s^{(2)})$  değerleri, bir birinden bağımsız,  $(-1,1)$  aralığında tek düze rassal iki değişkenin değerleri olarak algılanıp, (47)'ye göre üretilecek standart tek düze dizilerinden,

$$(54) \quad \begin{aligned} x_s^{(1)} &= 2r_s^{(1)} - 1 \\ x_s^{(2)} &= 2r_s^{(2)} - 1 \end{aligned}$$

biçiminde elde edilebileceğinden, sırası ile (47), (54) ve (51) algoritmaları,  $\pi$  öteölçümünün doğru kabul edilecek bir değerini kullanmadan, (42)'deki gözlem değerlerinin sanal benzerleri olan (51)'deki değerleri üretir. Bu sanal verilerden de, (52), (53) ve (50)'ye göre,  $\pi$ 'nin MC tahmini elde edilir.

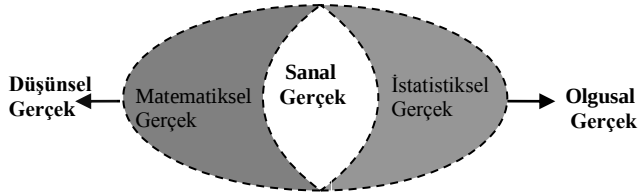
Tasarlanan sanal bir deneyin, ancak bir bilgisayar ortamında gerçekleştirilebileceği açıktır. Genel amaçlı programlama dillerinden birini bilen sanal deneyci için böyle bir ortamı oluşturmak ise oldukça kolaydır[18].

#### 4.SONUÇ

Olgusal dünyadaki gözlemlerimizden yola çıkarak, olgu ve nesnelerin ideal biçimlerini salt matematiksel dünyamızda soyutlayarak oluşturabildiğimizi, bu ideal tanımlarda yer alan öteölçümlerin de, matematiksel yakınsama ve istatistiksel yakınsama yasalarından yararlanılarak tahmin edilebileceğini, ideal bir çemberi tanımlayan  $\pi$  öteölçümü çerçevesinde tartıştık. Benzer biçimde, günümüz teknolojisinin genetik ve uzay başarımlarının temelinde olduğu gibi, bir birleri ile tutarlı matematiksel gerçeklikle istatistiksel gerçeklik bir araya getirilerek, son derece karmaşık ve kapsamlı sanal gerçekler de oluşturulabilir. Böylece, olgusal dünyanın istatistiksel yaklaşımla keşfedilen rassallık yasaları kullanılarak tasarlanan yeni olgusalılıkların da öteölçümleri sanal deney

verilerinden, Monte Carlo yöntemlerle tahmin edilebilir ve rassallık yasaları keşfedilebilir. Monte Carlo yöntemlerle keşfedilen yeni olgulara ilişkin olasılıklara dayalı bilgi, yaşam güvenliği ve niteliği olumlu yönde artacağını söylüyorsa, söz konusu sanal gerçek olgusal dünyaya aktarılır. Evrensel gerçeğe ilişkin bilişsel kavrayışımız, salt matematik dili ile tanımlayabildiğimiz matematiksel gerçeğin, düşünsel gerçeği; matematiksel gerçeğe rassallık boyutu kazandırarak tanımlayabildiğimiz istatistiksel gerçeğin de, olgusal gerçeği keşfetme gücü ile doğru orantılı olarak giderek artmaktadır. Evrensel gerçeği kavramaya çalışan tüm bilimlerin ve onun güzelliğini anlatmaya çalışan tüm güzel sanatların olgusal dünyada ürettikleri, matematiksel gerçeğe dönüştürülebilen düşünsel gerçekle, istatistiksel gerçeğe dönüştürülebilen olgusal gerçeğin örtüştüğü sanal gerçekler, giderek daha geniş bir boyutta, olgusal dünyamızı ve düşünsel dünyamızı biçimlendiriyor.

Gerçek ve sanal gerçeğe ilişkin bilgimizi ayıran kesin bir sınır da yoktur. Tümevarımla ulaştığımız olgusal dünyaya ilişkin genellemelerimizi, bir kuram altında toplarken, bu kuramın tutarlılığını sağlamak için doğruluğu *a priori* kabul edilerek öne sürülecek önermeler, olgusal dünyadan tümü ile kopuk yeni önermelerle yalnızca matematiksel olarak kanıtlanabilir üst düzeyde *icat edilen* önermeler değil, aynı zamanda gelecekte deneysel yoldan da yanlışlanabilir *keşfedilen* önermeler olmalıdır. Çağdaş bilim, gerçek ve sanal gerçeğe ilişkin bilgimizi, zaman içinde sanal gerçeği gerçeğe dönüştürerek ilerleyen devingen bir denge üzerinde yürümektedir. Bu nedenle tüm bilimlerin ortak dili olan matematik başta olmak üzere, tüm bilimler çağdaşlığın gereği olan bu dengeyi hiçbir zaman unutmamalı ve gözden kaçırmamalıdır.



Şekil 6. “Bir şekil bin söze bedel.” -Çin

#### Kaynaklar

- 3 [1] Blatner,D., (2003), *Pi Coşkusu*, 3.Basım, Çev.N.Arık, Ankara, TÜBİTAK
- [2] Hooper,A., (1948), *Makers of Mathematics*, New York, Random House,Inc.,60-62.

- [3] Heidemann, John, (2006), “Rational Approximations to Pi”,  
<http://www.isi.edu/~johnh/index.html>
- [4] Poincaré,H.,(1998), *Bilim ve Hipotez*, Çev.F.Yücel, İstanbul:MEB.
- [5] Koç,S.,(1996), “Gizemli Bir Sayı,  $\pi$ ”, *Bilim ve Teknik*, Sayı:340,TÜBİTAK,Sayfa:64.
- [6] Wikipedia, (2006) <http://www.m-w.com/cgi-bin/dictionary?book=Dictionary&va=para-meter>
- [7] Hewson,S.F.,(2003), *A Mathematical Bridge-An Intuitive Journey in Higher Mathematics*, New Jersey:World Scientific Publishing,Co.Pte.Ltd.
- [8] Yıldırım,C.,(1991) *Bilim Felsefesi*, 3. Baskı, İstanbul:Remzi Kitabevi.
- [9] Bernoulli,J.,(1713) *Ars Conjectandi*,Basle.
- [10] Hacking,I.,(1975) *Emergence of Probability*, Bristol, Cambridge University Pres.
- [11] De Moivre, A.,(1733) “Approximatio ad summam termorum binom in seriem expansi”, *Printed for private circulation*, London.
- [12] Laplace,P.S.,(1810) “Mémoire sur les approximations des formules qui sont fonctions de très grands nombres et sur leur application aux probabilités”, *Mémoires de l’académie des Sciences de Paris*, 1809:353-415.
- [13] Polya,G.,(1920) “Über den Zentralen Grenzwertsatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung und das Moment problem”,*Math.Z.*,8:171-178.
- [14] Box,G.E.P.,(1976) Statistics and Science, *Journal of the American Statistical Association*, 71(356):791-799.
- [15] DeGroot,M.H.,(1975)*Probability and statistics*,California :Addison-Wesley.:127
- [16] Ross,S.M.,(2002)*Simulation*, San Diego: Academic Pres.
- [17] Box, G.E.P.- Muller,M.E., (1958). “A Note on the Generation of Random Normal Deviates,” *The Annals of Mathematical Statistics*, 29 : 610-611
- [18] Ata,M.Y.,(2006)“Sanal Bir Deney Laboratuvarının Tasarımı ve Uyarlanması İlk Adımlar”,*G.Ü.,Endüstriyel Sanatlar Eğitim Fakültesi Dergisi*, 18(1):56-77.

## YAZARIN ÖZGEÇMİŞİ

### Mustafa Y.ATA

1949 Ankara doğumlu, evli ve iki çocuklu. 1966 yılında Ankara Kurtuluş Lisesi’nden ve 1974 yılında Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ekonomi ve İstatistik Bölümü’nden yüksek şeref öğrencisi olarak mezun oldu. 1975 yılında, Ankara Ticaret ve Turizm Yüksek Öğretmen Okulu’nda, İstatistik Asistanı olarak göreve başladı. 1976-1977 yıllarında, K.K.K.Plan ve Prensipler Dairesi, Komuta Kontrol Otomatik Bilgi İşlem Şubesi’nde Program Subayı ve İdare Amiri olarak askerlik görevini tamamladıktan sonra, Ankara

Değişik Ortamlardaki Gama Etkileşmelerinde Toplam Saçılma Olasılığı Hesabı,  
A.Böke-C.Özmutlu

İktisadi ve İdari İlimler Akademisi(A.İ.T.İ.A.), Temel Bilimler ve İstatistik Fakültesi'ne İstatistik Asistanı olarak atandı. 1980 yılında, A.İ.T.İ.A., İstatistik Enstitüsü'nden İstatistik Bilim Uzmanlığı derecesini aldı. 1981 yılında, A.İ.T.İ.A., Temel Bilimler ve İstatistik Fakültesi, İstatistik Doktora programından yeterlik aldıktan sonra, bir yıl süre ile A.B.D.Wisconsin Üniversitesi, İstatistik Bölümü'nde konuk doktora öğrencisi olarak Matematiksel İstatistik, Zaman Dizileri Analizi ve Bayesgil Karar Kuramı derslerini izledi. 1982 yılında, Gazi Üniversitesi(G.Ü.), Fen-Edebiyat Fakültesi, İstatistik Bölümü'ne öğretim görevlisi olarak atandı. 1993 yılında, Gazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, İstatistik Ana Bilim Dalı'nda İstatistik Doktorası'nı tamamladıktan sonra, 1995 yılında, G.Ü.Fen-Edebiyat Fakültesi, İstatistik Bölümü'ne Yrd.Doç.Dr. olarak atandı. Bu bölümde, Deneysel Bilimlere Giriş, İstatistiksel Yöntemler, Kestirim Yöntemleri, Bilgisayar Programlama, Zaman Dizileri Analizi, Simülasyon ve İstatistiksel Danışmanlık dersleri verdi.



