

DETERMİNİSTİK VE KAOTİK SİSTEMLERDE KARARLILIK VE İNDETERMİNİZM ARASINDAKİ TRADE OFF İLİŞKİSİ

Metin ARSLAN¹

ÖZET

Nonlinear dinamik konulu çalışmalar, fizik ve sosyal bilimlerde hakim olan geleneksel (Newtonian) denge kavramının problematik karakterinin kendisini doğuran felsefi-paradigmatik arka plandan kaynaklandığını ve yapılan analizlerin üzerine kurulu olduğu teori-(matematiksel) model-test ilişkisinin elde edilen sonuçlar ışığında yeniden değerlendirilmesi gerektiğini ortaya koymaktadır. Zira, yaygın kanının aksine, hem deterministik hem de kaotik sistemlerde, teorik-matematiksel-gözlemsel düzlemlerde, kararsızlık ve indeterminizm arasındaki trade off kaçınılmaz olan random karakterin hep varolacağına; daha da önemlisi, daha derin seviyelerde gittikçe artan oranda ve zaman boyutu dikkate alındığında da tahmin/öngörü olayını zorlaştıran yönüne; işaret etmektedir.

Anahtar Kelimeler: Pür Deterministik Sistemler, Kaotik Sistemler, Kararlılık, Indeterminizm

1-MODERN BİLİMDE TEORİ-MODEL-TEST İLİŞKİSİ

Modern(ist) bilim, Pisagorcu/Platoncu anlayıştan hareketle, Matematik Objeler ve Fiziksel (Gerçek) Objeler arasında birebir bir karşılama/örtüşme (one to one correspondence/mapping) olduğu varsayımına dayanır. Bu indirgemeci yaklaşım, matematiksel formalizmin gerçek dünyayı genelde Öklit uzayı çerçevesinde temsil ettiği matematiksel bir nedenselğe bağlıdır. İlk defa Aristotile tarafından tasvir edilen aksiyomatik-dedüktif metod, noetik sezgi vasıtasıyla bu ilişkinin yanılmazlığını matematik bilginin kesinliği inancıyla örtüştürüp, hipotezlerin sınanma süreci sonrasında teorilerin kanıtlanacağı temeline dayanır. Ve tekil önermelerin (hipotez) gözleme/deneye karşı doğrulanma/yanlışlanma eylemi, bilimsel bilginin zamanla basitten karmaşığa doğru kümülatif olarak ilerlemesini sağlar. Böylece, herhangi bir disiplinde oluşmuş olan en son teori, yapısında o zamana kadar birikmiş olan bilgi stoğunun (Hümeu anlamda gözlemlenen düzenliliklerin (regularities)) matematiksel ifadesi olarak, başlangıç ve sınır şartları gibi iki girdi öğeyle birlikte, teorik çerçeveden hareketle türetilen hipotezler vasıtasıyla gözlemsel/deneysel dataya karşı test edilerek, gerçek sistemlerin temsilliğini (representation) ne ölçüde gerçekleştirdiğini gösteren bir kurgu/aygıt durumunda addedilmektedir.

Fakat, çoğu kez teorilerin dataya karşı direkt testi mümkün olmamakta, ve bu nedenle teorinin bir alt kümesi durumundaki farklı model yapılar test işleminde teorinin dolaylı kanıtlanması/doğrulanması (verification) şeklinde kullanılmaktadır. Böylece tipik olarak şu adımları içeren bir yol takip edilir:

Model belirlenmesi (model specification): Model yapısının seçimi

Kalibrasyon (calibration): Parametre tayini

Hassasiyet analizi (sensitivity analysis): Modelin değişimlere nasıl cevap verdiği

Bu noktada, özellikle son elli yılda oluşmuş bilim felsefesi tartışmalarına detayda girmeden, pür deterministik ve kaotik modellerle ilgili tartışma açısından, sadece birkaç noktaya değinmek yerinde olacaktır.

¹Hacettepe Üniversitesi, İ.İ.B.F., İktisat Bölümü, Beytepe-Ankara, Tel: 312-2992065, email: marşlan04@yahoo.com

Duhem-Quine Tezi:

Bu tez, aslında teorinin bir bütün olarak test edildiğini ve elde edilecek olumsuz bir sonucun hipotezden de teoriden de kaynaklanabileceğini söylemektedir. Ve yine test işleminde datanın yetersizliği (underdetermination of data) gözlemin problematik olasılığına binaen test sonuçlarının tartışmalı olabileceğini iddia etmektedir.

Yine, teori ve gözlem ilişkisinin tek doğrultulu (unidirectional) olmadığı gibi, matematik ve gerçek dünya arasında birebir bir örtüşme olasılığının pek mümkün görünmediği de söylenebilir.

2- YAPISAL DENGİ ANALİZİ VE PÜR DETERMİNİSTİK MODELLER

Tipik olarak, gerçek sistemleri mimik eden matematiksel model kurgusunda açık ve kapalı birtakım varsayımlar yapılır.

- Teorik/Matematiksel: Matematiksel modeller matematiğin kendi doğası gereği kararlılıdır (stable)
- Gözlemsel: Gerçek sistemler herhangi bir teorik yapıdan bağımsız olarak gözlemlenebilirler (the given) ve kendi içlerinde kararlılıdır.

Buna göre, matematiksel modeller gerçek sistemleri büyük bir yaklaşıklıkla (approximation), küçük değişimlerden (small perturbations) etkilenmeksizin temsil ederler ve bu anlamda da kararlılıdır.

Halbuki, neredeyse bütün matematiksel modeller değişen ölçülerde bir dizi basitleştirici varsayımlara dayanırlar ve gözlemler de ölçme problemleriyle birlikte hatalar içerirler.

2.1- KARARLILIK TANIMI VE DİNAMİK SİSTEMLER

Dinamik Sistemler aşağıda bir kaç örneği verilen basit diferansiyel denklemler vasıtasıyla temsil edilirler.

$$\frac{dx^i}{dt} = \kappa(x^i, \mu_j) \quad (I)$$

burada $i=1, \dots, N$ (N : modelin boyutu) ve $j=1, \dots, K$ (μ_j : kontrol parametreleri) yada parçalı (discrete invertable) formda

$$X_{t+1}^i = \lambda(X_t^i, \mu_j) \quad (II)$$

Bu formlar bir dizi kısıtlamalar ve basitleştirici varsayımlara dayanır ve olası farklı model tiplerinin hepsini de kapsayamazlar.

Tanımsal olarak, matematiksel bir modelin topolojik eşdeğerliliği (topological equivalence) varsa kararlılıdır, aksi halde yapısal olarak kararsızdır. Son elli yılda yapılan çalışmalar matematiksel dinamik sistemlerin önceki sanının aksine çoğunlukla kararsız olduklarını ortaya koymuştur. Örneğin;

- İki dereceden fazla serbestiye sahip Hamiltonian sistemlerin ne integralleri alınabilir ne de ergodiktirler; bu durumda, hem kararsız hem de stokastik alanlar içerirler. Bu anlamda, küçük değişimler çok büyük sonuçlar doğurabilirler.
- Smale'in nondensity teoremi, yapısal kararlı sistemlerin, tip I denklemlerde $N>3$ ve tip II de de $N>2$ olması hallerinde her yerde yoğun (dense) olmadıklarını göstermiştir.

Yani, yukarıdaki ifadeler şöyle yorumlanabilir: denklem tip I boyut 2 den büyük, tip II de boyut 1 den büyük olduğunda yapısal olarak kararsızdırlar ve küçük değişimler büyük sonuçlar doğurabilir.

Başka bir denklem tipine bakarsak; mesela, hem düzenli hem de kaotik davranış sergileyen bir denklem (noninvertible tip II)

$$X_{t+1} = \mu X_t (1 - X_t) \quad (III)$$

Burada ($X \in (0,1)$ ve μ (kontrol parametere) $\in (0,4)$) iki kaotik parametre değeri arasında her zaman periodik bir μ olduğu sonucu ortaya çıkıyor (Farmer ve Jacobsen), ki μ parametresindeki değişimler farklı davranışlar sergilemesine yol açabilen basit bir sisteme işaret ediyor.

Yukarıda söylenene örnek verme bağlamında, Saint Venant tam hidrodinamik denkleminin özel bir hali olarak Navier Stokes denklem tipini ele alalım. Bu kısmi diferansiyel denklemlerin basit ve kurgusal durumlar haricinde (analitik) çözümleri yoktur. Bu yüzden, genel uygulama tip I denklem haline dönüşecek şekilde basitleştirici varsayımlarla söz konusu denklemleri sonsuz boyutlu tip I imiş gibi muamele yaparak kısaltmak (truncation), sonrada discrete difference denklemleri kullanarak çözmektir. Kullanılan nümerik metodlar da benzer şekilde ciddi düzeyde approximation içermekte olduğundan, sonuçta farklı denklem setleri ve farklı davranış biçimleri ortaya çıkmaktadır.

Sonuç olarak, gerçek sistemlerin genelde diferansiyel denklemler vasıtasıyla temsil edilerek anlamlandırılma çabalarında kullanılan yapısal denge analizi, bir paradigma olarak doğasında kararsızlık/kırılabilirlik unsurları taşımaktadır.

3- KAOS - STOKASTİK DENGE - İNDETERMİNİZM İLİŞKİSİNDE TRADE OFF

Kaotik davranış üretmede kullanılan yaklaşımlar (routes to chaos) arasında yaygın olanları aralarındaki metodolojik farklılıklara rağmen benzer sistem karakteristikleri (başlangıç şartlarına hassasiyet, kendine benzerlik) sergilerler (Encyclopaedia of Mathematics).

- Period doubling route
- Intermittency route
- Strange attractor route
- Ruelle-Takens-Newhouse route
- Crisis route

3.1- Deterministik Kaos-Stokastik Denge

Yukarıdaki metodlarla elde edilen kaotik davranış, deterministik kaosda, sistemin asimptotik karakteri attractor vasıtasıyla resmedilip gösterilirken, işlem esnasında trajectory bazı metodlar kullanılarak düzgün hale getirilir(smoothing out).

- Splines metodu
- Zeeman metodu

Aslında, bu metodların amacı yoğunluk (density) kavramı çerçevesinde kararlı sistem tanımlamasına dayanır; ki, küçük değişimlere olan hassasiyet azaltılsın ve sistem böylece kararlı hale getirilsin. İşte tamda bu operasyonda, deterministik fonksiyonel ilişki, hesapta sistemdeki noise azaltarak sistemi kararlı hale getirme pahasına, stochasticity ile tanımlanmış

hale gelir. Burada, zamanın akış yönü değişmiş olup, Hamiltonian sistemler de kararsızdır artık.

Sonuç olarak, bir tür indeterminizm ile karşı karşıyayız: Ya sistem deterministiktir ve kararsızdır, ya da kararlı hale getirilmiştir ama stokastiktir.

3.2- Quantum Kaos ve İndeterminizm

Kaos Teorisinin (CT) formalizmlerinin quantum seviyede uygulanabileceği, ya da, quantum sistemlerin kaotik olabileceği tartışması CT ve QM nin (Klasik Mekanin kararsızlığı) buluşma (arayüzü) noktasını teşkil eder. Burada QM olarak tanımlanabilecek yeterince küçük sistemlerin kaotik davranış gösteren denklem sistemleriyle ifade edilmesi söz konusudur. QM ve CT iki farklı paradigmatic yapı olarak aynı fenomenleri (Rydberg atoms, quantum suppression of chaos (Casati)) açıklamadaki başarıları açısından henüz tartışmalı bir duruma ve, bu bağlamda, teori seçimi (theory choice) olayının felsefi anlamda çetrefilli yönüne işaret etmektedir.

Analojik olarak söylersek, QM ile Klasik Mekanik (CM) arasındaki farka benzeyen bir durum da QM ile CT formalizmleri arasında olasıdır: Nasıl CM çok küçük seviyelerde bulanık bir hal alıyorsa ve quantum seviyesinde kaçınılmaz bir noise ortaya çıkıyorsa, benzer şekilde de kaotik formalizmlerin uygulanabilme olasılığı da belirli seviyelerde azalıp, noise ile sonuçlanmaktadır. Şöyle ki, bir önceki kısımda vurgulandığı gibi, kaotik trajectory ler yapılarında (güç spektralleri, Poincare haritaları ve ergodik özelliklerinde) noise barındırmakta ve noise in büyümesine paralel olarak quantum indeterminizm de artmaktadır.

Kısacası, daha derin seviyelerde noise nitel (qualitative) olarak farklılık göstermekte ve indeterminizm ile yapısal denge arasındaki trade off da nitel olarak farklılaşmaktadır.

4- DEĞERLENDİRME

Modern Bilim bir dizi kompleks olayların etkisiyle kaba bir materyalist (crude materialism) ontoloji üzerine kurgulanmıştır. Hakim denge/kararsızlık anlayışı Newton Mekanizminin metafizik varsayımlarının bir sonucu olarak, hemen hemen bütün entelektüel alanlarda genel geçer olduğu zannıyla adapte edilerek kullanılmıştır. Nonlineer dinamik çerçevesinde yapılan çalışmalar bu kavramsallaştırmaların problematik karakterini tartışmaya açmış durumdadır. Bu çalışma sınırları içinde, bunların üç düzlemde yapılması gereği ortaya çıkmaktadır.

Gözlem (Gerçek Sistemler):

Fiziksel dünyanın Platonik varsayımlara uygun olarak ikilemler (dichotomy) şeklinde algılanması, gözlemin nötr (neutral) ya da teori bağımlı (theory dependence thesis) olduğu tartışmasını gündeme getirmiştir. Gerçek sistemlerin kendi içlerinde kararsızlık içerip içermediği; gözlemin zaman bağımlı ve nitel değişimleri tekrarlanmayan (nonrepeatable) durumlarda (iklim sistemleri) nasıl rol oynadığı sorunu tartışmaya açıktır.

Teori:

Teori oluşumu ve yapısal niteliklerinin neler olduğu tartışmasını bir kenarda tutarak, küçük değişimlerin teorik yapılarda (matematiksel ifadesi) ne tür değişimlere yol açtığı araştırmaya değer bir konudur, yapısal denge karakteristiklerinin bilinmesi açısından. Fakat, özellikle Newton, Einstein, ya da Quantum Mekanik gibi teoriler, basit görüşlerine rağmen, karmaşık matematiksel yapılarının böyle bir testi gerçekleştirecek nitelikte çözülebilirlik açısından fazla umut vermiyor olsa gerektir. Yine de ilginç bir deney olacaktır, teori-fiziksel dünya ilişkisini anlama açısından.

Modelleme (ve test):

Yukarıda sözü edilen kompleks teoriler aslında oldukça daraltıcı kısıtlar altında pratikte çözülebilir niteliktedirler. Dolayısıyla, matematiksel modeller bu teorilerin indirekt testlerinde kullanılırlar ve farklı kısıt/varsayım setleri farklı sonuçlar ürettiği ve bunların yorum ve değerlendirmeleri de sanılanın aksine oldukça problematik olduğu için de, teori-model-test ilişkisi incommensurable nitelikler taşır. Bu bağlamda, bilim insanları topluluğu (eger yeknesak bir topluluk varsa) sorunlara yeterince duyarlı davranmamakta ve modern eğitim bu anlamda hazır hap misali (cooked book) bir formatta verilmektedir.

Sonuçta yukarıda anlatılan model yapıların kararsızlığı ve bulguların teori ve testlerinin başarıları anlamında değerlendirmeleri süreci yeterince dikkat isteyen bir konudur.

5- SOSYAL BİLİMLER

Genelde Sosyal Bilimlerde (ve özelde tipik bir örnek olarak İktisat Biliminde) kullanılan modelleme yaklaşımları, yukarıda anlatılan felsefi arkaplandan hareketle kurgulandığından, bahis konusu olan problemler sosyal bilimler alanında da geçerlidir. Bu konunun genişletilmiş bir analizi yayınlanacak olan “Nonlinear Dynamics and Lessons for Modelling in Social Science: Case of Economics Reconsidered” çalışmamızda yapılmaktadır.

6- SONUÇ

Modern Bilimin Dünya Görüşü (Weltanschauung) materyalist bir ontoloji üzerine kurgulanmış Newton Mekanizmasının doğurduğu deterministik bir evren algısına dayalı olduğundan, ürettiği kavramlar/lisan/terminoloji, kısmen de olsa, bu çerçevede dışarıda gelişmekte olan paradigmaları anlamada yetersiz kalmaktadır (Arslan). Denge Analizi Çerçevesi Newtonian bir denge kavramı üzerine inşaa edilmiş olup, kararsız denge analizleri singularity denecek izole edilmek suretiyle kontrol altına alınan istisnai hallerde kullanılmıştır.

Oysaki kaotik sistemlerde phase space deki her nokta kararsız denge halinde davranmaktadır; öyleki, kararsız dengeler izole edilip kontrol altında tutulamazlar. Bu bir çeşit indeterminizm öngörülebilirlik (predictability) açısından önemli olup, başlangıç şartlarına olan hassasiyetten kaynaklanmaktadır. Burada model yapısı (ve attractor) aynı kalıp, sadece başlangıç şartlarına olan hassasiyetten kaynaklanan bir değişme ve belirsizlik vardır.

Ama yukarıda tartışılan denge analizi çerçevesinde, değişen sistemin bizzatihi kendisidir ve ona bağlı olarak da attractor ve elde edilen sonuç değerleridir. Bu bağlamda ortaya çıkan indeterminizm nitel olarak, biraz önceki satırda vurgulanan kaos halinde ortaya çıkan formdan farklıdır, ve kaos bu türün yerine geçemez: yapısal denge ve indeterminizm arasındaki trade off kalıcı nitelikte olup, random fenomenin varlığına işaret etmektedir.

Aslında, Chaos/Nonlinear Dynamics/Complexity merkezli çalışmalar farklı düzeylerde anomaly üretmek hakim paradigmayı deconstruction nin hakim olduğu bir sürece sokmuş gözüküyor. Buna dominant modernist bilim anlayışı direnç gösterip, gelişmeleri kendi lisanına çevirip yorumlarsa da, Sosyal Bilimlere yapılan Fizik Bilim merkezli benzeri modernist okumalar da eklendikçe, bu süreç daha da hızlanabilir.

KAYNAKLAR

- [1] Arslan, M. (2006). “Karmaşıklığın Bilimi, Postmodern Söylem ve Yükselen Paradigmaların Metafizik Arkapları: Kaos, Gödel Sonrası Matematik, Fuzzy Mantık, Sanal Gerçeklik ve Gaia Hipotezi -Ortak Lisan ve Kategorik Değişimi Araştırmak”. *Kaos ve Karmaşık Sistemler: I. Disiplinlerarası Kaos Sempozyumu, Uluslararası Katılımlı*. 12-13 Mayıs, İstanbul.

- [2] Casati, G. and Molinari, L. (1989). "Quantum Chaos with Time periodic Hamiltonians". *Progress of Theoretical Physics Supplement*, 98, pp. 287-322.
- [3] Casati, G., Guarneri, I., and Shepelyansky, D.L. (1980). "Classical Chaos, Quantum Localization and Fluctuations: A Unified View". *Physica A* 163.
- [4] Encyclopaedia of Mathematics. <http://eom.springer.de/>
- [5] Farmer, J. D. (1985). "Sensitive Dependence on Parameters in Nonlinear Dynamics". *Physical Review Letters*, 55, pp. 351-4.
- [6] Gallison, P. (1988). "History, Philosophy, and the Central Metaphor". *Science in Context* 2, pp. 200-201.
- [7] Grosing, G. (1989). "Quantum Systems as Order Out of Chaos Phenomena". II *Nuova Cimento B* 103, 5.
- [8] Jacobsen, Y. (1981). "Absolutely Continuous Invariant Measures for One Parameter Families of One Dimensional Maps". *Communications in Mathematical Physics*, 81, pp. 39-88.
- [9] Jordan, D.W. and Smith, P. (1992). "Nonlinear Ordinary Differential Equations", second ed. Clarendon Press, Oxford.
- [10] Luo, J. and Thiebaud, D. "Smoothing Strange Attractors with Splines". Department of Computer Science, Smith College, Northampton, MA. <http://maven.smith.edu/~thiebaud/research/spining.pdf>
- [11] Markus, I. and Meyer, K. R. (1974). "Genetic Hamiltonian Dynamical Systems are neither Integrable nor Ergodic". *Memoirs of the American Mathematical Society*. 144.
- [12] Teschl, G. "Ordinary Differential Equations and Dynamical Systems". <ftp://ftp.mat.univie.ac.at/pub/teschl/book-ode/ode.pdf>
- [13] Smale, S. (1966). "Structurally Stable Systems are not Dense". *American Journal of Mathematics*. 788, pp. 491-496.
- [14] Smale, S. (1967). "Differentiable Dynamical Systems". *Bulletin of the American Mathematical Society*. 73, pp. 747-817.
- [15] Schuster, H.G. (1989). "Deterministic Chaos: An Introduction". Weinheim, Germany.
- [16] Zeeman, E. C. (1988). "Stability of Dynamical Systems". *Nonlinearity*. 1, pp. 115-55.