Journal of İstanbul Kültür University
2006/3 pp. 173-187

ZAMAN SKALASINDA DİNAMİK SİSTEMLER

Ünal UFUKTEPE[1], Veli DÜNDAR[2], Sevcan KAHRAMAN[3]

ÖZET

Zaman Skalası, reel sayıların herhangi boş olmayan kapalı bir alt kümesidir. Zaman skalasında kalkülüs, ilk olarak 1989 yılında Stefan Hilger tarafından bulunmuştur, matematikte buna kısaca sürekli ve ayrık durumların birleştirilmesi denir. 1990'dan beri zaman skalası üzerinde bir çok bilim alanında çalışmalar yapılmış ve bu konu oldukça yaygın ve popüler hale gelmiştir. Biz bu çalışmada sürekli ve ayrık dinamik sistemlerin zaman skalasında genelleştirilmesine yer verdik.

Anahtar Kelimeler: Zaman Skalası, Dinamik Sistemler, Floquet

1. Giriş

Son yıllarda matematikçilerin büyük bir ilgi odağı olan Zaman Skalası kavramı ilk olarak 1989 yılında Stefan Hilger'in doktora çalışmasında ortaya atıldı. Hilgerin bu çalışmasını matematikteki sürekli ve kesikli durumlarının birleştirilerek genelleştirilmesi olarak açıklamak mümkün. Örneğin diferansiyel denklemler ve fark denklemleri bu çalışma ile dinamik denklemler adı altında geneleştirildi. Bu çalışmanın birinci bölümünde zaman skalasının temel kavramları, ikinci bölümde Zaman Skalasında Lyapunov dönüşümü ve kararlılık, ve dördüncü bölümde ise Floquet kuramına yer verilmiştir. Bu çalışmada 2000 yılından beri zaman skalasında dinamik sistemler üzerine yapılan çalışmalar derlenmiş ve örnekle açıklanmıştır.

2. Zaman Skalasında Temel Tanımlar

Bu bölümde zaman skalasının temel kavramlarına yer verilmiştir. İspatlar kaynaklardan bulunabilir.

Tanım 2.1: Reel sayıların (R) herhangi kapalı bir alt kümesine zaman skalası denir. Zaman skalası T ile gösterilir.

Zaman skalasında ileri sıçrama operatörü $\sigma(t)=\inf\{s\in \mathrm{T}, s>t\}$, geri sıçrama operatörü de $\rho(t)$=sup $\{s\in \mathrm{T}, s<t\}$ ile tanımlanır. $\mathrm{T}=R$ durumunda,her $t\in \mathrm{T}$ için $\sigma(t)=t$, $\rho(t)=t$, $\mathrm{T}=Z$ durumunda, her $t\in \mathrm{T}$ için $\sigma(t)=t+1$, $\rho(t)=t-1$ dir. Eğer $\rho(t)$ = t ise t noktasına sol yoğun, $\rho(t)$< t ise sol saçılmış, $\sigma(t)$>t ise sağ saçılmış $\sigma(t)=t$ ise sağ yoğun, $\sigma(t)=t=\rho(t)$ ise yoğun , $\rho(t)<t<\sigma(t)$ ise saçılmış nokta denir.

[1] İzmir Yüksek Teknoloji Enstitüsü, Matematik Bölümü, Gülbahçe Köyü, Urla, İzmir, (232)-750 76 14, unalufuktepe@iyte.edu.tr
[2] İzmir Yüksek Teknoloji Enstitüsü, Matematik Bölümü, Gülbahçe Köyü, Urla, İzmir, velidundar@iyte.edu.tr
[3] İzmir Yüksek Teknoloji Enstitüsü, Matematik Bölümü, Gülbahçe Köyü, Urla, İzmir, sevcankahraman@iyte.edu.tr

Tanım 2.2: $\mu : \mathrm{T} \to \mathrm{R}$ olmak üzere, μ(t) = $\sigma(t)$-t şeklinde tanımlanan fonksiyona sıçrama fonksiyonu denir.

Tanım 2.3: T zaman skalasının minimum değeri m olsun. Eğer m noktası sağa saçılmış ise türevlenebilirlik bölgesi $\mathrm{T}^k = \mathrm{T} - \{m\}$, diğer durumlarda $\mathrm{T}^k = \mathrm{T}$ dır.
T zaman skalasının maksimum değeri M olsun. Eğer M noktası sola saçılmış ise türevlenebilirlik bölgesi $\mathrm{T}^k = \mathrm{T} - \{M\}$, diğer durumlarda $\mathrm{T}^k = \mathrm{T}$ dır.

2.2. Zaman Skalasında Türev

Tanım 2.4: f : $\mathrm{T} \to \mathrm{R}$ olsun. t $\in \mathrm{T}^k$ olmak üzere, f fonksiyonunun delta türevi f^Δ, herhangi bir $\in > 0$ sayısı için, t noktasının

U=$(t-\delta, t+\delta) \cap T$, δ>0 komşuluğunda

$\left|(f(\sigma(t)) - f(s)) - f^\Delta(t)(\sigma(t) - s)\right| \le \varepsilon\left|\sigma(t) - s\right|$ eşitsizliği ile ifade edilir.

Eğer f fonksiyonu her t $\in \mathrm{T}^k$ noktasında delta türevlenebiliyorsa, f fonksiyonuna T^k üzerinde delta türevlenebilir denir.

Lemma 2.1: f fonksiyonu t noktasında sürekli ve t, sağa saçılmış nokta ise f fonksiyonu t noktasında türevlenebilirdir ve

$$f^\Delta(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)}$$

dir.

t noktası sağa saçılmış ise $f^\Delta(t) = \dfrac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\sigma(t) - s}$

t noktası sağ yoğun bir nokta ise $f^\Delta(t) = \lim\limits_{s \to t} \dfrac{f(t) - f(s)}{t - s}$

dir.

$\mathrm{T} = \mathbf{R}$ aldığımızda $\mathrm{T}^k = \mathrm{T}$ olur ve her t $\in \mathrm{T}^k$ için $f^\Delta(t) = \lim\limits_{s \to t} \dfrac{f(t) - f(s)}{t - s} = f'(t)$

$\mathrm{T} = \mathbf{Z}$ aldığımızda $\mathrm{T}^k = \mathrm{T}$ olur ve her t $\in \mathrm{T}^k$ için

$$f^\Delta(t) = \lim_{\sigma(t) \to t} \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)} = \frac{f(t+1) - f(t)}{(t+1) - t} = f(t+1) - f(t) = \Delta f(t)$$

f ve g fonksiyonları delta türevlenebilir fonksiyonlar ise

$$(f.g)^\Delta(t) = f(\sigma(t))g^\Delta(t) + f^\Delta(t)g(t)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)^\Delta(t) = \frac{f^\Delta(t)g(t) - g^\Delta(t)f(t)}{g(\sigma(t))g(t)}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.5: f : T $\rightarrow$ R fonksiyonunun sağ yoğun noktalarda sağdan limiti, sol yoğun noktalarda soldan limiti varsa düzenli (regulated) fonksiyondur.

Tanım 2.6: f : T $\rightarrow$ R fonksiyonu bütün sağ yoğun noktalarda sürekli ve bütün sol yoğun noktalarda limite sahip ise, f fonksiyonuna sağ yoğun sürekli fonksiyon denir. Sağ yoğun fonksiyonlar kümesi $C_{rd} = C_{rd}(\mathrm{T}) = C_{rd}(\mathrm{T}, R)$ ile gösterilir. Bununla birlikte n. türevi var olan sağ yoğun fonksiyonlar da $C_{rd}^{n} = C_{rd}^{n}(\mathrm{T}) = C_{rd}^{n}(\mathrm{T}, R)$ ile gösterilir.

Teorem 2.1:
i) T zaman sakalasında tanımlı f fonksiyonu sürekli ise, sağ yoğun süreklidir.
ii) f sürekli ise, düzenli fonksiyondur.
iii) İleri sıçrama operatörü $\sigma(t)$ sağ yoğun süreklidir.
iv) Eğer f düzenli ya da sağ yoğun sürekli ise, $f^{\sigma} = f(\sigma(t))$ da aynı özelliği sağlar.
v) Kabul edelim ki f sürekli olsun. Eğer g:T$\rightarrow$R düzenli ya da rd-sürekli ise fog düzenli ya da sağ yoğun süreklidir.

2.3 Zaman Skalasında İntegral

Tanım 2.7: f düzenli bir fonksiyon olsun. Her t$\in$ T^{k} için $F^{\Delta}(t) = f(t)$ eşitliğini sağlayan F fonksiyonu, f fonksiyonunun anti-türevidir.

Tanım 2.8: c sabit bir sayı olmak üzere f fonksiyonunun belirsiz integrali

$$\int f(t)\Delta t = F(t) + c$$

Tanım 2.9: Her a ,b$\in$ T için f fonksiyonunun Cauchy integrali şu şekilde tanımlanır:

$$\int_{a}^{b} f(t)\Delta t = F(b) - F(a)$$

2.5. Hilger Kompleks Düzlemi

Tanım 2.10: $h > 0$ olmak üzere Hilger kompleks sayıları , Hilger reel ekseni aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır.

Hilger kompleks sayıları: $C_h := \left\{ z \in C : z \neq -\dfrac{1}{h} \right\}$

Hilger reel ekseni: $R_h := \left\{ z \in C : z \in R, z \rangle -\dfrac{1}{h} \right\}$

Hilger dönüşümlü ekseni: $A_h := \left\{ z \in C : z \in R, z \langle -\frac{1}{h} \right\}$

Hilger sanal dairesi: $I_h := \left\{ z \in C : \left| z + \frac{1}{h} \right| = \frac{1}{h} \right\}$

olarak tanımlanır. h=0 alınırsa $C_0 = C$, $R_0 = R$, $A_0 = \phi$ ve $I_0 = iR$ olur.

Tanım 2.11: $h > 0$ ve $z \in C_h$ olsun. z sayısının Hilger reel kısmı, $\operatorname{Re}_h(z) = \frac{|zh+1|-1}{h}$ olarak, Hilger sanal kısmı da $\operatorname{Im}_h(z) = \frac{\arg(zh+1)}{h}$ olarak tanımlanır. Arg(z) z'nin esas argümentini belirtmektedir. ($-\pi < \arg(z) \le \pi$)

Tanım 2.12: p: $\mathrm{T} \rightarrow$R fonksiyonu
$1 + \mu(t)p(t) \neq 0$ $t \in \mathrm{T}^k$, koşulunu sağlıyorsa regresif bir fonksiyondur. Regresif ve sağ yoğun p fonksiyonlarının kümesi $\Re = \Re(\mathrm{T}) = \Re(\mathrm{T}, R)$ ile ifade edilir.

Tanım 2.13: Zaman skalasında " dairesel toplam " işlemi
$(p \oplus q)(t) := p(t) + q(t) + \mu(t)p(t)q(t)$ $t \in \mathrm{T}^k$ ve $p, q \in \Re$
olarak tanımlanır.

Teorem 2.2: $(\Re(\mathrm{T}, R), \oplus)$ bir Abel grubudur. [3]
Bundan sonra $\Re = (\Re(\mathrm{T}, R), \oplus)$ regresif grup diye adlandırılacaktır..
$\Re^+ = \Re^+(\mathrm{T}, R) = \{ p \in \Re : 1 + \mu(t)p(t) > 0, t \in \mathrm{T}^k \}$ kümesi pozitif regresif fonksiyonlar kümesidir ve $(\Re^+, \oplus), (\Re, \oplus)$'nın alt grubudur. [3]

Tanım 2.14: Zaman skalasının (θ p) fonksiyonu
(θ p)(t)= $-\frac{p(t)}{1 + \mu(t)p(t)}$, $t \in \mathrm{T}^k$ ve $p \in \Re$
şeklinde; dairesel çıkarma işlemini de
(pθq)(t)=(p $\oplus$ (θq))(t) , $t \in \mathrm{T}^k$ ve $p, q \in \Re$ olarak tanımlanır.
$p, q \in \Re$ iken p $\oplus$ q, pθq, θ p $\in \Re$ olur.

2.6. Zaman Skalasında Üstel Fonksiyon

Bu bölümde genelleştirilmiş zaman skalası üstel fonksiyonu tanımlanacak ve onunla ilgili özellikleri verilecektir. Bu özelliklerin ispatları [3]'te incelenebilir

Herhangi bir zaman skalasında genelleştirilmiş üstel fonksiyon tanımı vermek için silindirik dönüşümü kullanılır.

Tanım 2.15: $h>0$, $C_h := \left\{ z \in C : z \neq -\frac{1}{h} \right\}$ ve

$Z_h := \left\{ z \in C : -\frac{\pi}{h} < \mathrm{Im}(z) \leq \frac{\pi}{h} \right\}$ bir şerit olmak üzere,

$\xi_h : C_h \to Z_h$ silindirik dönüşümü

$$\xi_h(z) = \frac{1}{h} Log(1 + zh) \tag{2.1}$$

olarak tanımlanır. Fonksiyonun tanımından ters silindirik fonksiyonun

$$\xi_h^{-1}(z) = \frac{1}{h}\left(e^{zh} - 1\right) \tag{2.2}$$

olduğu görülür. Her z$\in C$ için $\xi_0(z) = z$ dır.

Tanım 2.16: p$\in \Re$ olmak üzere genelleştirilmiş zaman skalası üstel fonksiyonu

$e_p(t,s) = \exp\left(\int_s^t \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau))\Delta\tau \right)$, t,s $\in$ T ile tanımlanır.

Lemma 2.2: p,q$\in \Re$ ve $r,s,t \in$ T olmak üzere;

i) $e_p(t,\tau)\, e_p(\tau,s) = e_p(t,s)$

ii) $e_p(\sigma(t),s) = (1 + \mu(t)p(t))\, e_p(t,s)$

iii) Eğer p$\in \Re^+$ ise bütün t$\in$T için $e_p(t,t_0) > 0$

iv) Eğer $1 + \mu(t)p(t) < 0$ ise $e_p(t,t_0)\, e_p(\sigma(t)),t_0) < 0$

v) Eğer T=R alınırsa $e_p(t,s) = \exp \int_s^t p(\tau)d\tau$. p sabit alınırsa $e_p(t,s) = e^{p(t-s)}$

vi) Eğer T=Z alınırsa $e_p(t,s) = \prod_{\tau=s}^{t-1} (1 + p(\tau))$

T=hZ , $h>0$ ve p sabit bir sayı alınırsa $e_p(t,s) = (1 + hp)^{\frac{t-s}{h}}$

dir.

Tanım 2.17: Eğer p$\in \Re$ and f : T → R sağ yoğun sürekli ise,

$$y^{\Delta}(t) = p(t)y(t) + f(t) \tag{2.3}$$

dinamik denklemine regresif denir.

Teorem 2.3: Eğer (2.3) denklemi regresif ve $y(t_0) = y_0 \in$ R ise

$$y^{\Delta}(t) = p(t)y(t) + f(t) \qquad y(t_0) = y_0 \tag{2.4}$$

birinci mertebe dinamik denkleminin tek çözümü vardır ve bu çözüm

$$y(t) = y_0 e_p(t,t_0) + \int_{t_0}^{t} e_p(t,\sigma(\tau)) f(\tau)\Delta\tau \qquad (2.5)$$

dır. [3]

2.5 Regresif Matrisler

Tanım 2.18: A , T zaman skalası üzerinde mxn tipinde bir matris fonksiyon olsun. A matrisinin her bileşeni sağ yoğun sürekli ise A matrisine sağ yoğundur denir. T zaman skalası üzerindeki bütün mxn matris değerli sağ yoğun sürekli fonksiyonların sınıfını

$C_{rd} = C_{rd}(\mathrm{T}) = C_{rd}(\mathrm{T}, R^{mxn})$ ile gösterilir.

Tanım 2.19: T zaman skalasında A nxn matris fonksiyon olsun. Eğer,

$I + \mu(t)p(t)$, her $t \in \mathrm{T}^k$ için tersinirse (2.6)

A regresif matristir. Bu şekilde regresif ve sağ yoğun matris fonksiyonların sınıfını

$\Re = \Re(\mathrm{T}) = \Re(\mathrm{T}, R^{nxn})$ ile göstereceğiz.

$A \in \Re$ ve $f{:}\mathrm{T} \rightarrow R^{nxn}$ sağ yoğun vektör değerli fonksiyon olmak üzere , nx1 vektör değerli

$$y^{\Delta}(t) = A(t)y(t) + f(t) \qquad (2.7)$$

sistemi regresiftir.

Lemma 2.3: nxn boyutlu A matrisinin regresif olması için gerek ve yeter şart A(t) nin her $1 \le i \le n$ için $\lambda_i(t)$ özdeğerlerinin regresif olmasıdır.

Tanım 2.20: A ve B nxn matris değerli regresif fonksiyonlar olsun.

$(A \oplus B)(t) = A(t) + B(t) + \mu(t)A(t)B(t)$ ve

$(\theta A)(t) = -[I - \mu(t)A(t)]^{-1} A(t) = -A(t)[I - \mu(t)A(t)]^{-1}$

$(A\theta B)(t) = (A \oplus (\theta B))(t)$, $t \in \mathrm{T}^k$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 2.4: $(\Re(\mathrm{T}, R^{nxn}), \oplus)$ bir grup oluşturur. [3]

A^* , A matrisinin eşlenik transpozu olsun. $A \in R^{mxn}$ ise $A^* = A^T$ dir.

Lemma 2.4: A ve B kompleks değerli regresif matris fonksiyonlar olmak üzere, aşağıdaki özellikler sağlanır.

i) A^* regresiftir.

ii) $A^* \oplus B^* = (A \oplus B)^*$.

Şimdi , matris değerli

$$Y^{\Delta}(t)=A(t)Y(t) \qquad Y(t_0)=I_n, \qquad I_n \text{ birim matris} \tag{2.8}$$

başlangıç değer problemini ele alalım.

Tanım 2.21: (2.8) eşitliğindeki dinamik denklemin genel çözümüne temel (fundamental) matris denir.

(2.8) başlangıç değer probleminin $t=t_0$ deki tek çözümüne matris üstel fonksiyonu denir ve $e_A(t,t_0)$ ile ifade edilir. Matris üstel fonksiyona (2.8) sisteminin geçiş matrisi de denir ve $\Phi_A(t,t_0)$ şeklinde gösterilir.

Lemma 2.5: A$\in \Re$ ve A, T zaman skalasında matris değerli fonksiyon olmak üzere

i) $\Phi_A(t,\tau)=\Phi_A(\tau,s)=\Phi_A(t,s)$, her $r,s,t\in$ T

ii) $\Phi_A(\sigma(t),s)=(1+p(t)\mu(t))\ \Phi_A(t,s)$

iii) T=R ise ve A sabitse $\Phi_A(t,t_0)=\Phi_A(t,s)\ e^{A(t-t_0)}$ dir.

iv) T=hZ, $h>0$ ve A sabit ise $\Phi_A(t,t_0)=(I+hA)^{(\frac{t-t_0}{h})}$

Şimdi regresif nx1 vektör değerli

$$y^{\Delta}(t)=A(t)y(t)+f(t) \qquad y(t_0)=y_0 \tag{2.9}$$

dinamik başlangıç değer probleminin çözümünün tek olduğuna dair bir teorem verelim.

Teorem 2.5: $t_0\in$ T ve $y(t_0)=y_0\in R^n$ olmak üzere regresif (2.9) dinamik başlangıç değer probleminin tek çözümü vardır: $y:T\to R^n$ olmak üzere

$$y(t)=\Phi_A(t,t_0)y_0+\int_{t_0}^{t}\Phi_A(t,\sigma(\tau))f(\tau)\Delta\tau$$

dır. (2.10)

İspat: (2.10) da verilen y(t) iyi tanımlıdır ve

$$y(t)=\Phi_A(t,t_0)\left\{y_0+\int_{t_0}^{t}\Phi_A(t_0,\sigma(t))f(\tau)\Delta\tau\right\}$$

yazılabilir. Buradan

$$y^{\Delta}(t)=A(t)\Phi_A(t;t_0)\left\{y_0+\int_{t_0}^{t}\Phi_A(t,\sigma(t_0))f(\tau)\Delta\tau\right\}+\Phi_A(\sigma(t),t_0)\Phi_A(t_0,\sigma(t))f(t)$$

$$=A(t)y(t)+f(t)$$

Ayrıca $y(t_0)=y_0$ olduğu açıktır. Şimdi de çözümün tekliğini ispatlayalım. w(t) (2.9) denkleminın başka bir çözümü olsun. $v(t)$ sağ yoğun sürekli bir fonksiyon olmak üzere $v(t)=\Phi_A(t_0,t)$ w(t) alalım. Bu eşitlikten w$(t)=\Phi_A(t,t_0)v(t)$ yazabiliriz.

$$A(t)\Phi_A(t,t_0)v(t)+f(t)=A(t)w(t)+f(t)$$
$$=w^{\Delta}(t)$$
$$=A(t)\Phi_A(t,t_0)v(t)+\Phi_A(\sigma(t),t_0)v^{\Delta}(t)$$

Buradan $v^{\Delta}(t)=\Phi_A(t_0,\sigma(\tau))f(\tau)$ elde edilir. $v(t_0)=w(t_0)$ olmalıdır. $v^{\Delta}(t)=\Phi_A(t_0,\sigma(\tau))f(\tau)$ eşitliğinde her iki tarafın t_0 dan t ye integrali alınırsa,

$$v(t)=y_0+\int_{t_0}^{t}\Phi_A(t_0,\sigma(\tau))f(\tau)\Delta\tau$$

bulunur. $w(t)=\Phi_A(t,t_0)v(t)$ eşitliğinde $v(t)$ yerine konduğunda

$$w(t)=\Phi_A(t,t_0)y_0+\int_{t_0}^{t}\Phi_A(t,(\sigma(t))f(\tau)\Delta\tau$$

eşitliğinden $y=w$ elde edilir.

3. Lyapunov Dönüşümü ve Kararlılık

Tanım 3.1: Bazı $\eta,\rho\in R^{+}$ sayıları $t\in \mathrm{T}$ için, bir Lyapunov dönüşümü

$$\|L(t)\|\le\rho \text{ ve det } L(t)\ge\eta \tag{3.1}$$

koşulunu sağlayan $L(t)\in C^{1}_{rd}(\mathrm{T},R^{nxn})$ tersinir matrisine Lyapunov dönüşümü denir.

$$X^{\Delta}(t)=A(t)X(t),\quad X(t_0)=X_0 \tag{3.2}$$

regresif zaman değişkenli liner dinamik sistemi ele alalım. Bu sistemde Lyapunov dönüşümü kullanılarak yapılan değişken değiştirme işleminde özelliklerin korunması kararlılıkla bağlantılıdır.

X(t), nx1 vektör olmak üzere normu $\|X(t)\|=\sqrt{X^{T}(t)X(t)}$

A, mxn herhangi bir matris olmak üzere normu $\|A\|=\max\limits_{\|X\|=1}\|A\|=\left[\max\limits_{\|X\|=1}X^{T}A^{T}AX\right]^{\frac{1}{2}}$ dır.

Lemma 3.1: $A(t)$ her t $\in$T için nxn tersinir bir matris olsun. Eğer her t $\in$T için $\|A^{-1}(t)\|\le\alpha$ olacak şekilde bir $\alpha>0$ sabit sayısı varsa, $|\det A(t)|\ge\beta$ olacak şekilde bir β sabit sayısı vardır.

Lemma 3.2: $A(t)$ her t $\in$T için $A^{-1}(t)$ var olan nxn tersinir bir matris ise her t$\in$ T için

$$\|A^{-1}(t)\| \leq \frac{\|A(t)\|^{n-1}}{|\det A(T)|} \qquad (3.3)$$

eşitsizliği sağlanır. [2]
Lemma 3.1 ve Lemma 3.2 ten yararlanarak Lyapunov dönüşümünün tersinin sınırlı olduğunu söyleyebiliriz. (3.2) eşitsizliklerine denk olarak, her t ∈T için öyle $\rho > 0$ vardır ki

$$\|L(t)\| \leq \rho \ , \quad \|L^{-1}(t)\| \leq \rho \qquad (3.4)$$

eşitsizlikleri sağlanır.

Tanım 3.2: Herhangi bir t_0 ve ona karşılık gelen $X(t_0)$ çözümü için,

$$\|X(t)\| \leq \gamma \|X(t_0)\| \ , \quad t \geq t_0 \qquad (3.5)$$

eşitsizliğini sağlayan sonlu pozitif bir γ sabiti varsa, (3.1) zaman değişkenli liner dinamik sistemi düzgün kararlıdır.

Teorem 3.1: Zaman değişkenli liner dinamik denklem (3.1)'in düzgün kararlı olması için gerek ve yeter koşul, her $t, t_0 \in \mathrm{T}$ ve $t \geq t_0$ için

$$\|\Phi_A(t,t_0)\| \leq \gamma$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır.

İspat: $X^{\Delta}(t) = A(t)X(t)$, $X(t_0) = X_0$ ile ifade edilen (3.1) sistemi düzgün karalı olsun. O halde $\gamma > 0$ sayısı vardır öyle ki,

$\|X(t)\| \leq \lambda \|X(t_0)\|$, $t \geq t_0$ sağlanır. Verilen herhangi t_0 için $t_a \geq t_0$ ve X_a birim vektör olsun. $\|X_a\| = 1$ olur.

$$\|\Phi_A(t_a,t_0)X_a\| = \|\Phi_A(t_a,t_0)\| \, \|X_a\| = \|\Phi_A(t_a,t_0)\|$$

$X(t_a) = X_a$ (3.1) sisteminin bir çözümüdür ve t_a zamanında

$\|X(t_a)\| = \|\Phi_A(t_a,t_0)X_a\| = \|\Phi_A(t_a,t_0)\| \, \|X_a\| \leq \gamma \|X_a\|$ sağlanır. Buradan

$\|\Phi_A(t_a,t_0)\| \leq \gamma$ elde edilir.

$t_a \geq t_0$ noktasını genelleştirerek aynı sonucu bütün için $t \geq t_0$ elde edebiliriz. Sonuçta

$\|\Phi_A(t,t_0)\| \leq \gamma$ bütün $t, t_0 \in$T ve $t \geq t_0$ için sağlanır.

Kabul edelim ki $\|\Phi_A(t_a,t_0)\| \leq \gamma$ olsun. Herhangi t_0 ve $X(t_0) = X_0$ için, (3.1) 'in çözümü

$$\|X(t)\| = \|\Phi_A(t,t_0)X_0\| = \|\Phi_A(t_0,t_0)\| \, \|X_0\| \leq \gamma \|X_0\| \ , \quad t \geq t_0$$

sağlar. Sonuçta $\|X(t)\| \leq \gamma \|X_0\|$ elde edilir.

Tanım 3.3: Herhangi bir t_0 ve ona karşılık gelen $X(t_0)$ çözümü için,

$$\|X(t)\| \leq \|X(t_0)\| \gamma e_{-\lambda}(t,t_0), \quad t \geq t_0 \tag{3.6}$$

eşitsizliğini sağlayan , $-\lambda \in \Re^+$ olacak şekilde pozitif γ ve λ sabitleri varsa, (3.1) denklemi düzgün üstel kararlıdır.

Teorem 3.2: Zaman değişkenli liner dinamik denklem (3.1)'in düzgün üstel kararlı olması için gerek ve yeter koşul, her $t,t_0 \in \mathrm{T}$ ve $t \geq t_0$ için

$$\|\Phi_A(t,t_0)\| \leq \gamma e_{-\lambda}(t,t_0), \quad -\lambda \in \Re^+ \text{ ve } \lambda,\gamma > 0$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır.

İspat: (3.1) düzgün üstel kararlı olsun. Dolayısıyla öyle $-\lambda \in \Re^+$ ve $\lambda,\gamma > 0$ vardır ki, herhangi t_0 ve $X(t_0) = X_0$ için

$\|X(t)\| \leq \|X(t_0)\| \gamma e_{-\lambda}(t,t_0)$, $t \geq t_0$ sağlanır. $t_a \geq t_0$ olacak şekilde $\|X_a\| = 1$ olan X_a vektörü alalım.

$$\|\Phi_A(t_a,t_0)X_a\| = \|\Phi_A(t_a,t_0)\| \, \|X_a\| = \|\Phi_A(t_a,t_0)\|$$

$X(t_0) = X_a$ (3.1)'in bir çözümüdür ve t_0 zamanında

$\|X(t_a)\| = \|\Phi_A(t_a,t_0)X_a\| = \|\Phi_A(t_a,t_0)\| \, \|X_a\| \leq \|X_a\| \gamma e_{-\lambda}(t,t_0)$ sağlanır ve buradan

$\|\Phi_A(t_a,t_0)\| \leq \gamma e_{-\lambda}(t,t_0)$ elde edilir. $t_a \geq t_0$ noktasını genelleştirerek aynı sonucu bütün $t \geq t_0$ için elde edebiliriz. Sonuç olarak $\|\Phi_A(t,t_0)\| \leq \gamma e_{-\lambda}(t,t_0)$ sağlanır.

$-\lambda \in \Re^+$ ve $\lambda,\gamma > 0$ olacak şekilde $\|\Phi_A(t,t_0)\| \leq \gamma e_{-\lambda}(t,t_0)$ eşitsizliği her $t,t_0 \in \mathrm{T}$ için sağlansın. Herhangi t_0 ve $X(t_0) = X_0$ için, (3.1) 'in çözümü

$\|X(t)\| = \|\Phi_A(t,t_0)X_0\| = \|\Phi_A(t_0,t_0)\| \, \|X_0\| \leq \|X_0\| \gamma e_{-\lambda}(t,t_0)$, $t \geq t_0$ sağlar. Sonuçta $\|X(t)\| \leq \|X_0\| \gamma e_{-\lambda}(t,t_0)$ elde edilir.

Teorem 3.3: Her $t \in \mathrm{T}$ için tersi var olan $L(t) \in C^1_{rd}(\mathrm{T},R^{nxn})$ matrisi ve liner dinamik sistem (3.1) den A(t) matrisi alalım. $t,\tau \in \mathrm{T}$ olmak üzere

$$Z^{\Delta}(t) = G(t)Z(t), \quad Z(\tau) = I \tag{3.7}$$

$$G(t) = L^{\sigma^{-1}}(t)A(t)L(t) - L^{\sigma^{-1}}(t)L^{\Delta}(t) \tag{3.8}$$

sisteminin geçiş matrisi

$$\Phi_G(t,\tau) = L^{-1}(t)\Phi(t,\tau)L(\tau) \quad \text{dır.} \tag{3.9}$$

İspat: Tanımdan $G(t) \in C^1_{rd}(\mathrm{T}, R^{nxn})$ dır. Herhangi bir $\tau \in \mathrm{T}$ için

$$X(t) = L^{-1}(t)\Phi_A(t,\tau)L(\tau) \tag{3.10}$$

tanımlayalım. $t=\tau$ için $X(\tau)=I$ olduğu açıktır. (3.10) eşitliğini düzenleyip, t'ye göre türevini alırsak

$$L^{\Delta}(t)X(t) + L^{\sigma}(t)X^{\Delta}(t) = \Phi^{\Delta}_A(t,\chi\tau)L(\tau) = A(t)\Phi_A(t,\tau)L(\tau)$$

$$L^{\sigma}(t)X^{\Delta}(t) = A(t)\Phi_A(t,\tau)L(\tau) - L^{\Delta}(t)X(t)$$

$$= A(t)\Phi_A(t,\tau)L(\tau) - L^{\Delta}(t)L^{-1}(t)\Phi_A(t,\tau)L(\tau)$$

$$= [A(t) - L^{\Delta}(t)L^{-1}(t)]\Phi_A(t,\tau)L(\tau)$$

Eşitliğin her iki tarafını $L^{\sigma^{-1}}(t)$ ile çarpıp (3.8) ve (3.10)' u kullanırsak

$$X^{\Delta}(t) = \left[L^{\sigma^{-1}}(t)A(t)L(t) - L^{\sigma^{-1}}(t)L^{\Delta}(t)\right]L^{-1}(t)\Phi_A(t,\tau)L(\tau)$$

$$= \left[L^{\sigma^{-1}}(t)A(t)L(t) - L^{\sigma^{-1}}(t)L^{\Delta}(t)\right]L^{-1}(t)\Phi_A(t,\tau)L(\tau)$$

$$= G(t)X(t)$$

Bu eşitlik her hangi $\tau \in T$ için geçerlidir.Yani $X^{\Delta}(t) = G(t)X(t)$ denkleminin geçiş matrisi $\Phi_G(t,\tau) = L^{-1}(t)\Phi_A(t,\tau)L(\tau)$ dir. (3.7) denklemindeki başlangıç değeri birim değilse, yani $Z(t_0) = Z_0 \neq I$ ise çözüm $X(t) = \Phi_G(t,\tau)\,Z_0$ dır.

3.1 Düzgün Kararlılığın Korunması

Teorem 3.4: $Z(t) = L^{-1}(t)X(t)$ Lyapunov dönüşümü olsun. (3.1) sisteminin düzgün kararlı olması için gerek ve yeter şart

$$Z^{\Delta}(t) = \left[L^{\sigma^{-1}}(t)A(t)L(t) - L^{\sigma^{-1}}(t)L^{\Delta}(t)\right]Z(t), \qquad Z(t_0) = Z_0 \tag{3.11}$$

denkleminin düzgün kararlı olmasıdır.

İspat: (3.1) ve (3.11) denklemleri ile $Z(t) = L^{-1}(t)X(t)$ dönüşümü birbirleriyle bağlantılıdır. Teorem 3.1 den iki geçiş matrisi arasındaki bağlantı $\Phi_G(t,t_0) = L^{-1}(t)\,\Phi_A(t,t_0)\,L(t_0)$ eşitliği ile ifade edilir. (3.1)'in düzgün kararlı olduğunu kabul edelim. $t \geq t_0$ olmak üzere her $t,t_0 \in \mathrm{T}$ için öyle bir $\gamma > 0$ vardır ki $\|\Phi_A(t,t_0)\| \leq \gamma$ dir. Teorem 3.5'ten

$$\|\Phi_G(t,t_0)\| = \|L^{-1}(t)\Phi_A(t,t_0)L(t_0)\| \leq \|L^{-1}(t)\|\,\|\Phi_A(t,t_0)\|\,\|L(t_0)\| \leq \frac{\gamma\rho^n}{n} = \gamma_G$$

elde edilir. $\|\Phi_G(t,t_0)\| \leq \gamma_G$ olduğundan (3.11) düzgün karalıdır.Karşıtı da benzer şekilde gösterilir.

3.2. Düzgün Üstel Kararlılığın Korunması

Teorem 3.5: $Z(t)=L^{-1}(t)X(t)$ Lyapunov dönüşümü olsun. (3.1) sisteminin düzgün üstel kararlı olması için gerek ve yeter şart

$$Z^{\Delta}(t)=\left[L^{\sigma^{-1}}(t)A(t)L(t)-L^{\sigma^{-1}}(t)L^{\Delta}(t)\right]Z(t), \qquad Z(t_0)=Z_0 \tag{3.11}$$

denkleminin düzgün üstel kararlı olmasıdır.

İspat: Teorem 3.3'den $\Phi_G(t,t_0)=L^{-1}(t)\Phi_A(t,t_0)L(t_0)$ eşitliğini yazabiliriz. (3.1) sisteminin düzgün üstel kararlı olduğunu düşünelim. Dolayısıyla $t\geq t_0$ olmak üzere her $t,t_0\in\mathrm{T}$ için $-\lambda\in\Re^{+}$ sağlayan $\lambda,\gamma>0$ vardır ki,

$\|\Phi_A(t,t_0)\|\leq\gamma e_{-\lambda}(t,t_0)$ eşitsizliği sağlanır. Teorem 3.7'den

$$\begin{aligned}\|\Phi_G(t,t_0)\|&=\|L^{-1}(t)\Phi_A(t,t_0)L(t_0)\|\\&\leq\|L^{-1}(t)\|\,\|\Phi_A(t,t_0)\|\,\|L(t_0)\|\\&\leq\frac{\gamma\rho^{n}}{n}e_{-\lambda}(t,t_0)=\gamma_G e_{-\lambda}(t,t_0)\end{aligned}$$

elde edilir. $\|\Phi_G(t,t_0)\|=\gamma_G e_{-\lambda}(t,t_0)$ olduğundan (3.11) düzgün üstel kararlıdır. Karşıtı da benzer şekilde gösterilir.

4. Zaman Skalasında Floquet Teoremi

Tanım 4.1: $p\in[0,\infty)$ olsun.

i) $t\in\mathrm{T}$ iken $t+p\in\mathrm{T}$

ii) $\mu(t)=\mu(t+p)$, her $t\in\mathrm{T}$

koşulları sağlanıyorsa T zaman skalası p-periyodiktir.

Bir $A:\mathrm{T}\to R^{nxn}$ nxn matris değerli fonksiyonu her $t\in\mathrm{T}$ için $A(t)=A(t+p)$ eşitliğini sağlıyorsa p-periyodiktir. Bu bölümde zaman skalasının p-periyodik olduğunu kabul ediyoruz.

Homojen Denklem: Zaman değişkenli regresif liner dinamik

$$X^{\Delta}(t)=A(t)X(t), \qquad X(t_0)=X_0 \tag{4.1}$$

başlangıç değer problemini ele alalım. Burada her $t\in\mathrm{T}$ için $A(t)\in\Re(\mathrm{T},R^{nxn})$ ve p-periyodik olsun. Genellikle A(t)'nin periyodu söz konusu zaman skalasının bir tam katıdır. Kolaylık olması açısından A(t)'nin ve zaman skalasının periyotlarını eşit kabul edeceğiz.

Teorem 4.1: T p-periyodik bir zaman skalası ve $R\in\Re(\mathrm{T},C^{nxn})$ olsun.

$$Z^{\Delta}(t)=RZ(t), \qquad Z(t_0)=Z_0 \tag{4.2}$$

dinamik matris başlangıç değer probleminin çözümü pozitif yönde p-periyotludur. Yani, her

$t \in \mathrm{T}$ ve $k \in N_0$ olmak üzere

$$e_R(t,t_0) = e_R(t+kp,t_0+kp)$$ sağlanır.

İspat: (4.2)'nin tek çözümü $e_R(t,t_0)Z_0$ dır. [3]

$$e_R^{\Delta}(t,t_0)Z_0 = \mathrm{Re}_R(t,t_0)Z_0$$

$$e_R(t,t_0)\big|_{t=t_0} Z_0 = e_R(t_0,t_0)Z_0 = Z_0$$

Şimdi de $e_R(t,t_0) = e_R(t+kp,t_0+kp)$ olduğunu görelim. Bunu için $e_R(t+kp,t_0+kp)Z_0$ 'ın (4.2)'nin bir çözümü olduğunu gösterelim.

$$e_R^{\Delta}(t+kp,t_0+kp)Z_0 = \mathrm{Re}_R(t+kp,t_0+kp)$$

$$e_R(t+kp,t_0+kp)\big|_{tkp=t_0+kp} = e_R(t\ +kp,t_0+kp)Z_0 = Z_0$$

(4.2)'nin çözümü tektir [3]. Dolayısıyla, her $t \in \mathrm{T}$ ve $k \in N_0$ olmak üzere

$$e_R(t,t_0) = e_R(t+kp,t_0+kp) \tag{4.3}$$

sağlanır.

Teorem 4.2 (Zaman Skalasında Birleştirilmiş Floquet Teoremi): Φ_A, (4.1) sisteminin geçiş matrisi olmak üzere $e_R(p+t_0,t_0) = \Phi_A(p+t_0,t_0)$ eşitliğini sağlayacak şekilde nxn boyutlu sabit bir $R \in C^{nxn}$ matrisi olsun. A(t) p-periyodik olmak üzere geçiş matrisi, her $t,\tau \in \mathrm{T}$ için

$$\Phi_A = L(t)e_R(t,\tau)L^{-1}(\tau) \tag{4.4}$$

olarak yazılabilr. Burada $L(t) \in C_{rd}^1(\mathrm{T},R^{nxn})$ matrisi p-periyodik ve her $t \in \mathrm{T}$ için tersinirdir.

İspat: $e_R(p+t_0,t_0) = \Phi_A(p+t_0,t_0)$ (4.5)

eşitliğinde her iki tarafın doğal logaritmasını alarak veya Φ_A matrisinin p. kökü bulunarak sabit R matrisi elde edilebilir. R matrisi kompleks değerli olabilir.

$$L(t) = \Phi_A(t,t_0)e_R^{-1}(t,t_0) \tag{4.6}$$

olacak şekilde L(t) matrisi tanımlayalım. Tanımdan $L(t) \in C_{rd}^1(\mathrm{T},C^{nxn})$ ve her $t \in \mathrm{T}$ için tersinirdir. Buradan

$$\Phi_A(t,t_0) = L(t)e_R(t,t_0)$$

$$\Phi_A(t_0,t\ ) = e_R^{-1}(t,t_0)L^{-1}(t) = e_R(t_0,t)L^{-1}(t)$$ elde edilir veBildiri.doc

$$\Phi_A(\tau,t) = L(\tau)e_R(\tau,t)L^{-1}(t)$$

$$\Phi_A(t,\tau) = L(t)e_R(t,\tau\ )L^{-1}(\tau)$$ iddiasını kanıtlar.

L(t) matrisinin p-periyodik olarak göstererek ispatı tamamlayacağız. (4.6) eşitliğinden ve Teorem 4.1' ten

$$
\begin{aligned}
L(t+p) &= \Phi_A(t+p,t_0)e_R^{-1}(t+p,t_0) \\
&= \Phi_A(t+p,t_0+p)\Phi_A(t_0+p,t_0)e_R(t_0,t+p) \\
&= \Phi_A(t+p,t_0+p)\Phi_A(t_0+p,t_0)e_R(t_0,t_0+p)e_R(t_0+p,t+p) \\
&= \Phi_A(t+p,t_0+p)\Phi_A(t_0+p,t_0)e_R^{-1}(t_0+p,t_0)e_R(t_0+p,t+p) \\
&= \Phi_A(t+p,t_0+p)e_R^{-1}(t+p,t_0+p) \\
&= \Phi_A(t+p,t_0+p)e_R^{-1}(t,t_0)
\end{aligned}
$$

$t'=t+p$ alırsak, $\Phi_A(t',t_0+p)$ matrisi

$$\Phi_A^{\Delta}(t',t_0+p)=A(t')\Phi_A(t',t_0+p)=A(t+p)\Phi_A(t+p,t_0+p)=A(t)\Phi_A(t+p,t_0+p)$$

matris dinamik denkleminin

$$\Phi_A(t',t_0+p)\big|_{t'=t_0+p}=\Phi_A(t+p,t_0+p)\big|_{t'=t_0}=\Phi_A(t_0+p,t_0+p)=I$$

başlangıç koşulundaki bir çözümüdür. $\Phi_A(t,t_0)$ aynı dinamik denklemin bir başka çözümüdür. Çözümün tekliğinden $\Phi_A(t+p,t_0+p)=\Phi_A(t,t_0)$ dır. Böylece

$$L(t+p)=\Phi_A(t+p,t_0)e_R^{-1}(t,t_0)=\Phi_A(t,t_0)e_R^{-1}(t,t_0)=L(t)$$ elde edilir.

4.1 Örnek (Sürekli Zaman Skalası): Zaman skalası olarak T=R alalım, regresif zaman değişkenli matrisin periyodu 2π olan

$$A(t)=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ \sin(t) & 0\end{bmatrix}$$

olsun.

$$X'(t)=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ \sin(t) & 0\end{bmatrix}X(t)$$

denklem sisteminin geçiş matrisi

$$\Phi_A(t,0)=\begin{bmatrix} e^{-t} & 0\\ \frac{1}{2}-\frac{e^{-t}(\cos(t)+\sin(t))}{2} & 0\end{bmatrix}$$

R' matrisi Teorem 4.2 den

$$e_{R'}(2\pi,0)=e^{2\pi R'}=\Phi_A(2\pi,0)=\begin{bmatrix} e^{-2\pi} & 0\\ \frac{1}{2}-\frac{e^{-2\pi}}{2} & 1\end{bmatrix}$$

sağlar ve

$$R' = \frac{1}{2\pi} In\Phi_A(2\pi,0) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde hesaplanır. Ayrıca

$$e^{R't} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ \frac{1}{2} - \frac{e^{-t}}{2} & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad e^{-R't} = \begin{bmatrix} e^{t} & 0 \\ \frac{1}{2} - \frac{e^{t}}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

Tekrar Teorem 4.2 den, 2π periyotlu $L'(t)$ matrisi

$$L'(t) = \Phi_A(t,0)e_{R'}^{-1}(t,0)$$
$$= \Phi_A(t,0)e^{-R't}$$
$$= \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ \frac{1}{2} - \frac{e^{-t}(\cos(t)+\sin(t))}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{t} & 0 \\ \frac{1}{2} - \frac{e^{t}}{2} & 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ \frac{1}{2} - \frac{(\cos(t)+\sin(t))}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

elde edilir.

Zaman skalası olarak sürekli bir küme (reel sayılar kümesi) aldığımızda yani $\mu(t) = 0$ olduğunda, R' matrisini hesaplamak için $\Phi_A(2\pi,0)$ matrisinin doğal logaritması alınır ve $\frac{1}{2\pi}$ ile çarpılır. Bu örnekte $R' = \frac{1}{2\pi}(In\Phi_A(2\pi,0))$ olur. Genelleştirirsek T=R ve A(t) matrisinin periyodu p olmak üzere, $R' = \frac{1}{p}(In\Phi_A(t_0 + p, t_0))$ dır.

KAYNAKLAR

[1] Dacunha,Periyodic Linear Systems:Lyapunov Transformations and a unified Floquet Theory for time Scale,2004.

[2] Dacunha,Stability for Time Varying linear dynamic Systems on Time Scale , J . Comput.Appl.Math.,2004.

[3] M.Bohner and A.Peterson ,Dynamic Equations onTime Scales,Birkhauser ,Boston ,2001.

[4] C.D.Ahlbrandt and J.Ridenhour,Floquet Theory for Time Scales and Putzer representations of matrix logarithms,J.Dier Equqtions Appl.9.(2003)77-92