İSTANBUL KÜLTÜR ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

K ve K4 MODAL MANTIKLARININ MODELLERİ ÜZERİNE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Onur KAHRAMAN

Anabilim Dalı : Matematik-Bilgisayar

Programı : Matematik-Bilgisayar

ARALIK 2011

İSTANBUL KÜLTÜR ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

K ve K4 MODAL MANTIKLARININ MODELLERİ ÜZERİNE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Onur KAHRAMAN
0809042003

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih	:	**12 Aralık 2011**
Tezin Savunulduğu Tarih	:	**28 Aralık 2011**

Tez Danışmanı	:	**Prof. Dr. Çiğdem GENCER**
Diğer Jüri Üyeleri	:	**Yrd. Doç. Dr. Müge KANUNİ**
		Yrd. Doç. Dr. Yaşar POLATOĞLU

ARALIK 2011

ÖNSÖZ

Tez çalışmam süresince danışmanlığımı yapan, yüksek lisas tez çalışmasının konusunu öneren, gerekli kaynakların sağlanmasında yardımcı olan, lisansüstü ders aşamasında ve tez çalışmam süresince görüşlerinden yararlandığım ve yakın ilgisini esirgemeyen değerli hocam Prof. Çiğdem GENCER'e teşekkürlerimi sunarım.

Lisansüstü çalışmam süresince modal mantık konusunda verdiği seminerler ile tez konumda ilerlememe yardımcı olan Prof. Dick de JONGH'a; ERASMUS programı ile Bulgaristan'da bulunduğum süre içerisinde danışmanlığımı üstlenen ve gerek bilimsel, gerekse manevi desteğini benden esirgemeyen, yüksek lisans seminerlerini sabır ve titizlikle yöneten Prof. Tinko TINCHEV'e; Bulgaristan'da bulunduğum süre içerisinde öğrenci değişimi ile ilgili tüm süreçleri ilgiyle yöneten Prof. Alexandra SOSKOVA'ya; ders ve tez süreçlerini beraberce yaşadığım takım arkadaşım Sayın İlayda ATEŞ'e; son olarak sonsuz destek ve güvenlerinden ötürü aile fertlerim Sayın Ömer KAHRAMAN ve Sayın Sebahat KAHRAMAN'a teşekkürlerimi sunuyorum.

2011 Onur KAHRAMAN

Üniversitesi	:	İstanbul Kültür Üniversitesi
Enstitüsü	:	Fen Bilimleri
Anabilim Dalı	:	Matematik-Bilgisayar
Programı	:	Matematik-Bilgisayar
Tez Danışmanı	:	Prof. Dr. Çiğdem GENCER
Tez Türü ve Tarihi	:	Yüksek Lisans - ARALIK 2011

ÖZET

K ve K4 MODAL MANTIKLARININ MODELLERİ ÜZERİNE

Onur KAHRAMAN

Bu tezde, K ve K4 modal mantıklarının sonlu Henkin yöntemiyle ve filtreleme yöntemiyle elde edilen modal modellerinin izomorf oldukları kanıtlanmıştır. Bu amaçla K ve K4'ün modal tamlığından ve kanonik modellerden yararlanılmıştır.

Anahtar Kelimeler : Modal mantık, kanonik model, sonlu Henkin yöntemi, filtreleme yöntemi, sağlamlık, tamlık

University	:	İstanbul Kültür University
Institute	:	Institute of Science
Science Programme	:	Mathematics and Computer Science
Programme	:	Mathematics and Computer Science
Supervisor	:	Prof. Dr. Çiğdem GENCER
Degree Awarded and Date	:	M.Sc. - DECEMBER 2011

ABSTRACT

ON MODELS OF The MODAL LOGICS K AND K4

Onur KAHRAMAN

We prove the models obtained for the modal logics K and K4 by the finite Henkin method is isomorphic to the ones obtained by filtration in this thesis. For that purpose we use modal completeness of K, K4 and canonical models.

Keywords : Modal logic, canonical model, finite Henkin method, filtration method, soundness, completeness

İçindekiler

ÖNSÖZ **iii**

ÖZET **iv**

ABSTRACT **v**

1 Giriş **1**

2 Ön Bilgiler **2**

2.1 Önermeler Mantığı 2

2.2 Modal Mantık 5

2.3 **K** Modal Mantığı 6

2.4 Modal Çatı ve Modeller 8

2.5 **K4** Modal Mantığı 11

3 K ve K4 Modal Mantıkları için Sağlamlık Teoremleri **16**

4 K ve K4 Modal Mantıkları için Tamlık Teoremleri **20**

4.1 Kanonik Model 21

4.2 Sonlu Model Özelliği 28

4.3 Sonlu Henkin Yöntemi 29

4.4 Filtreleme Yöntemi 32

5 Yeni Sonuçlar **37**

5.1 **K** Modal Mantığı için Sonuçlar 37

5.2 **K4** Modal Mantığı için Sonuçlar 41

6 Sonuç **46**

KAYNAKLAR **47**

ÖZGEÇMİŞ **48**

Bölüm 1

Giriş

Verilen bir **S** modal mantığının sağlamlık teoremi bu mantıkta sonlu adımda türetilebilen her formülün, bir **S** çatıdaki bir dünyada(noktada) doğru olduğunu ifade eder. Tamlık teoremleri ise, sağlamlık teoreminin tersidir ve bir **S** çatıdaki bir dünyada doğru olan herhangi bir formülün o mantıkta bir türetimi olduğunu söyler[6].

Sağlamlık ve tamlık teoremleri birlikte kullanıldıklarında herhangi bir mantıkta türetilebilirlik kavramı ile geçerlilik kavramının denk olduğunu ifade ederler[5]. Sağlamlık teoremlerinin ispatı bir formülün türetiminin uzunluğu üzerinde tümevarımla yapılırken tamlık teoremleri farklı şekillerde kanıtlanabilir[1]. Kripke'nin orjinal ispatı modal tablo sistemini kullanır[7]. Normal form teoremlerini kullanarak tamlık ispatı yapmak bir diğer etkili yöntemdir[8]. Modal tamlık teoremlerinin ispatı ise kanonik model etrafında odaklanır[4].

Sağlamlık ve Tamlık teoremlerine dayalı olarak ilerleyen bu tez, giriş bölümü dahil altı bölümden oluşmaktadır. İkinci bölümde önermeler mantığı ve modal mantığın temel kavramları tanımlanmıştır. Üçüncü ve dördüncü bölümde **K** ve **K4** modal mantıkları için sağlamlık ve tamlık teoremleri ispatlanmıştır. Beşinci bölümde **K** ve **K4** modal mantıklarının sonlu Henkin yöntemiyle ve filtreleme yöntemiyle elde edilen modal modellerinin izomorf oldukları kanıtlanmıştır.

Bölüm 2

Ön Bilgiler

Bu bölümde tezin okunabilirliğini kolaylaştırmak amacıyla bazı temel tanım ve kavramlar verilmiştir. Buradaki tüm bilgiler [1], [3], [4], [5], [6], [7], [9] ve [10] da bulunabilir.

2.1 Önermeler Mantığı

Önermeler mantığı her muhakemenin ya doğru ya da yanlış olduğu varsayımına dayalı en temel muhakeme modelini temsil eden bir mantıktır. Diğer mantıkların çoğu bu mantık tarafından kapsanır ya da dili yeni bağlaçlarla zenginleştirilerek onun üzerine inşa edilir.

Tanım 2.1. $\mathcal{L}_0$ önermeler mantığının dili aşağıdaki sembollerden oluşur:

(i) Önerme değişkenleri: $p, q, r, \ldots$

(ii) Önerme bağlaçları: $\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow, \neg, \perp$

(iii) Yardımcı semboller: (,).

$\mathcal{L}_0$ dilinin formülleri veya $\mathcal{L}_0$-formüller aşağıdaki gibi tanımlanır:

(a) $\mathcal{L}_0$'daki tüm değişkenler ve $\perp$ sabiti birer $\mathcal{L}_0$-formüldür.

(b) φ ve ψ $\mathcal{L}_0$-formüller ise $\varphi \vee \psi$, $\varphi \wedge \psi$, $\varphi \rightarrow \psi$, $\neg\varphi$'lerde $\mathcal{L}_0$-formüllerdir.

(c) $\mathcal{L}_0$'daki sembollerin bir dizisi bir formüldür gerek ve yeter koşul(gyk) bu dizi (i) ve (ii)'nin sonlu kez uygulanmasının bir sonucudur.

Önerme değişkenleri $p, q, r, \ldots$ ve formüller $\varphi, \psi \ldots$ ile gösterilecektir. $\mathcal{L}_0$ dilindeki tüm değişkenlerin kümesi Var$\mathcal{L}_0$ ve $\mathcal{L}_0$'daki tüm formüllerin kümesi For$\mathcal{L}_0$ ile gösterilir.

Önermeler mantığının türetim kuralları aşağıdaki gibidir:

Modus Ponens(MP): φ ve $\varphi \to \psi$ formüllerinden ψ türetilebilirdir.

Yerine yazma(Substitution): φ'den bir φ_s türetilebilirdir; burada bir s yerine yazması(YY) Var$\mathcal{L}_0$'dan For$\mathcal{L}_0$'a bir dönüşümdür ve φ_s, φ'nin karmaşıklığı üzerinde tümevarımla aşağıdaki gibi tanımlanır:

Her $p \in Var\mathcal{L}_0$ için $p_s := s(p)$;

$\bot_s := \bot$

$\Theta \in \{\vee, \wedge, \to, \leftrightarrow\}$ için $(\varphi\Theta\psi)_s := \varphi_s\Theta\psi_s$

ve $(\neg p)_s := \neg p_s$'dir.

$\mathcal{L}_0$ dilindeki bir mantık MP ve YY türetim kurallarına kapalı herhangi bir $\mathcal{L}_0 \subseteq For\mathcal{L}_0$ kümesidir.

Tanım 2.2. Γ bir formül kümesi ve φ bir formül olsun. φ formülü Γ'dan *türetilebilirdir* ($\Gamma \vdash \varphi$) gyk $\varphi = \varphi_n$ olacak şekilde bir $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ formül dizisi vardır öyle ki, her bir i için φ_i

- ya bir aksiyom,
- ya Γ'nın bir elemanı,
- ya da daha önceki φ_j'lere bir türetim kuralı uygulanarak elde edilmiştir.

Yukarıdaki gibi tanımlanan bir dizi, φ'nin Γ'dan bir türetimi olarak adlandırılır. Γ boş küme ise, yukarıdaki dizi φ'nin bir türetimi olarak adlandırılır ve $\vdash \varphi$ ile gösterilir.

Tanım 2.3. Semantik gerektirme bağıntısı $\models$, φ'nin karmaşıklığı üzerinde tümevarımla aşağıdaki gibi tanımlanır;

(i) $\mathcal{M} \models \bot$ gerçeklenmez,

(ii) $\mathcal{M} \models p$ gyk her $p \in \mathcal{L}_0$ icin, $p \in \mathcal{M}$,

(iii) $\mathcal{M} \models \psi \wedge \chi$ gyk $\mathcal{M} \models \psi$ ve $\mathcal{M} \models \chi$,

(iv) $\mathcal{M} \models \psi \vee \chi$ gyk $\mathcal{M} \models \psi$ veya $\mathcal{M} \models \chi$,

(v) $\mathcal{M} \models \psi \rightarrow \chi$ gyk $\mathcal{M} \models \psi$ ise $\mathcal{M} \models \chi$.

$\mathcal{M} \models \varphi$ gerçeklenmiyor ise, $\mathcal{M} \not\models \varphi$ yazılır ve φ, $\mathcal{M}$'de yanlıştır veya $\mathcal{M}$, φ için bir karşı modeldir denir.

Γ bir formül kümesi olduğunda, $\Gamma \models \varphi$ ifadesi Γ için her model φ içinde bir modeldir anlamındadır ve Γ, φ'yi semantik olarak gerektirir diye okunur.

Örnek 2.1. Herhangi bir formül için $\varphi \rightarrow \varphi$'nin bir türetimini yapınız.
İspat.

1. $(p_0 \rightarrow (p_1 \rightarrow p_2)) \rightarrow ((p_0 \rightarrow p_1) \rightarrow (p_0 \rightarrow p_2))$	Totoloji
2. $\varphi \rightarrow ((\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi) \rightarrow ((\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi))$	1 YY
3. $p_0 \rightarrow (p_1 \rightarrow p_0)$	Totoloji
4. $\varphi \rightarrow ((\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi)$	3 YY
5. $((\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi))$	2, 4 MP
6. $\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi)$	3 YY
7. $\varphi \rightarrow \varphi$	5, 6 MP

$\therefore \ \vdash \varphi \rightarrow \varphi$'dir. ⊠

Teorem 2.1.1. [Türetim Teoremi][10] Γ önermeler mantığı dilindeki herhangi bir formül kümesi, φ ve ψ önermeler mantığında iki formül olsun. $\Gamma, \psi \vdash \varphi$ ise $\Gamma \vdash \psi \rightarrow \varphi$' dir.

İspat. φ'nin türetiminin uzunluğu üzerinde tümevarımla yapılır. $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, $\varphi = \varphi_n$'nin $\Gamma \cup \{\psi\}$'den bir türetimi olsun. Her $i \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ için $\Gamma \vdash \psi \rightarrow \varphi_i$ olduğunu göstermek gerekir.

φ_i bir aksiyom veya Γ'da bir formül ise,

1. φ_i	Öncül
2. $p_0 \rightarrow (p_1 \rightarrow p_0)$	Totoloji
3. $\varphi_i \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi_i)$	2 YY
4. $\psi \rightarrow \varphi_i$	1, 3 MP

O halde $\Gamma \vdash \psi \rightarrow \varphi_i$'dir.

- $\varphi_i = \psi$ ise, örnek 2.1. den $\psi \rightarrow \psi$'dir. $\vdash \psi \rightarrow \varphi_i$.

$\therefore \Gamma \vdash \psi \rightarrow \varphi_i$'dir.

- φ_i, φ_j ve $\varphi_k = \varphi_j \to \varphi_i$, MP ile elde edilmişse bu durumda Γ'dan tümevarım hipotezi ile $\Gamma \vdash \psi \to (\varphi_j \to \varphi_i)$'dir. Bu durumda $\Gamma \vdash \psi \to \varphi_j$, $(p_0 \to (p_1 \to p_2)) \to ((p_0 \to p_1) \to (p_0 \to p_2))$ totolojisini kullanarak YY ve iki defa MP uygulanırsa $\Gamma \vdash \psi \to \varphi_i$ elde edilir.

- $\varphi_i = \varphi_j s$, φ_j bir aksiyomdur ve $\psi \to \varphi_i$'nin Γ'dan türetimi için φ_j ve yukarıdaki türetimde 1., 2., 3. ve 4. adımları kullanarak $\Gamma \vdash \psi \to \varphi_i$ elde edilir.

⊠

Teorem 2.1.2. φ, $\mathcal{L}_0$ dilinde yazılmış bir formül olsun. $\vdash \varphi$ ise, $\models \varphi$ dir; yani φ'nin bir türetimi var ise, φ bir totolojidir.
İspat. [10] ⊠

Teorem 2.1.3. φ, $\mathcal{L}_0$ dilinde yazılmış bir formül olsun. $\models \varphi$ ise, $\vdash \varphi$ dir; yani φ bir totoloji ise, φ'nin bir türetimi vardır.
İspat. [10] ⊠

2.2 Modal Mantık

Modal mantık Aristo'nun "olasıdır" ve "gereklidir" kelimelerini içeren durum analizleri ile başlamıştır. Bu kavramlar doğal ve teknik dillerde geniş çalışma alanları bulmuştur. Modal mantığın bir matematik disiplini olarak kabul edilmesi C.I.Lewis'in 1918 tarihinde yaptığı "Survey of Symbolic Logic" adlı çalışmasıyla gerçekleşmiştir. Lewis önermeler mantığına "olanaksızdır" anlamındaki birli I operatörünü ve "kesin gerektirir" anlamını ifade eden ikili operatör $\prec$ operatörünü ekleyerek yeni bir aksiyom sistemi geliştirmiştir[1]. 1932 yılında Lewis'in düşüncelerinden hareketle Lewis ve C.H.Langford modal mantığın modern anlamdaki ilk aksiyomatik sistemlerini tanımlamışlardır[9]. Bu aksiyomatik sistemler 1959 yılından başlayarak verilen semantik karekterizasyonla daha anlamlı hale gelmişlerdir. Bu anlamdaki semantik karekterizasyon ilk olarak Saul Kripke tarafından verilmiştir. Modal mantık 1918 den günümüze bir matematik disiplini olmasının yanında gerek bilgisayar bilimcilerin gerekse dil bilimcilerin üzerinde çalıştığı önemli bir bilim dalı olmuştur[1].

Tanım 2.4. *Temel modal dil*, elemanları $p, q, r, \ldots$ olan önerme değişkenlerinin bir kümesi Φ, Boole bağlaçları $\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow, \neg, \top, \perp$ ve birli bir modal operatör olan $\Box$ (box) kullanılarak elde edilir.

Temel modal dilin iyi oluşturulmuş formülleri aşağıdaki kural ile verilir,

$$\varphi ::= p \mid \perp \mid \neg\varphi \mid \varphi \vee \varphi \mid \Box\varphi.$$

Burada p, Φ'nin bir elemanıdır.

$\Box$ operatörünün dual operatörü $\Diamond$ (diamond)'dır ve aşağıdaki gibi tanımlanır

$$\Diamond\varphi := \neg\Box\neg\varphi$$

Burada önerme değişkenleri kümesi Φ sayılabilir sonsuz bir kümedir.

2.3 K Modal Mantığı

Bu kesimde Kripke semantiğine veya bağıntısal semantiğe göre sağlam ve tam bir modal mantık olan minimal **K** mantığının sintaksı ve semantiği tanıtılacaktır.

Tanım 2.3.1. Kripke mantığı **K** aşağıdaki formülleri içeren ve Modus Ponens(MP) ile Gereklilik Kuralı(NR) altında kapalı olan en küçük formül kümesidir:

- Modal dildeki tüm önermesel totolojiler,
- $\Box(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\Box\varphi \rightarrow \Box\psi)$(Normallik aksiyomu).
- Türetim kuralları:

  Modus Ponens: $\frac{\varphi, \varphi\rightarrow\psi}{\psi}$,

  Gereklilik Kuralı: $\frac{\varphi}{\Box\varphi}$.

K'ya normal modal mantık da denir.

Tanım 2.3.2. $\vdash_{\mathbf{K}} \varphi$ olabilmesi için gyk φ'nin son terimi olduğu formüllerin bir dizisinin olmasıdır öyle ki dizideki her bir formül ya **K**'nın bir aksiyomudur ya da dizideki önceki formüllerden türetim kurallarından birinin kullanılmasıyla türetilmiştir.

Örnek 2.2. $(\Box\varphi\wedge\Box\psi) \to \Box(\varphi\wedge\psi)$ formülü Kripke mantığı **K** da türetilebilirdir.
İspat.

1. $\vdash \varphi \to (\psi \to (\varphi \wedge \psi))$	Totoloji
2. $\vdash \Box(\varphi \to (\psi \to (\varphi \wedge \psi)))$	1 Gereklilik Kuralı
3. $\vdash \Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$	**K**'nın aksiyomu
4. $\vdash \Box(\varphi \to (\psi \to (\varphi \wedge \psi))) \to (\Box\varphi \to \Box(\psi \to (\varphi \wedge \psi)))$	3 YY
5. $\vdash \Box\varphi \to \Box(\psi \to (\varphi \wedge \psi))$	2,4 Modus Ponens
6. $\vdash \Box(\varphi \to (\varphi \wedge \psi)) \to (\Box\varphi \to \Box(\varphi \wedge \psi))$	3 YY
7. $\vdash \Box\varphi \to (\Box\psi \to \Box(\varphi\wedge\psi))$	5,6 Önermesel Mantık
8. $\vdash (\Box\varphi \wedge \Box\psi) \to \Box(\varphi \wedge \psi)$	7 Önermesel Mantık

$\therefore \quad \vdash_{\mathbf{K}} (\Box\varphi \wedge \Box\psi) \to \Box(\varphi \wedge \psi)$'dir. ⊠

Tanım 2.3.3. L, **K** normal modal mantığını genişleten bir aksiyom taslağı kümesi olsun. S ve U iki formül kümesi ve φ herhangi bir formül olsun. Son adımı φ olan bir formül dizisi varsa φ'ye S ile U'dan türetilebilirdir, denir ve bu durum $S \vdash_{\mathbf{L}} U \to \varphi$ ile gösterilir. Burada S'ye global öncüller kümesi ve U'ya da lokal öncüller kümesi denir. φ'nin türetimini veren dizideki global kısımdaki formül ya L'nin bir elemanının bir örneğidir veya S'nin bir elemanıdır ya da önceki formüllerden MP veya NR türetim kuralları ile elde edilir. Lokal kısımdaki her bir formül ya L'nin bir elemanın bir örneğidir veya U'nun bir elemanıdır ya da MP ile önceki formüllerden elde edilir.

Teorem 2.3.1. [K için Türetim Teoremi] $\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \psi$ ve χ **K** dilindeki formüller olsun. Bu durumda $\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \psi \vdash_{\mathbf{K}} \chi$ ise, $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash_{\mathbf{K}} \psi \to \chi$'dir.

İspat. $\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \psi \vdash_{\mathbf{K}} \chi$ olsun. $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash_{\mathbf{K}} \psi \to \chi$ olduğunu göstermeliyiz. Bu durumda χ; $\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \psi$ ile **K**'nın teoremleri olan $\theta_1, \ldots, \theta_m$' ler sadece MP kullanılarak türetilebilirdir. Bu durumda $\theta_1, \ldots, \theta_m, \varphi_1, \ldots, \varphi_n, \psi \vdash \chi$ türetimi önermeler mantığında bir türetimdir ve önermeler mantığı türetim teoremi ile aşağıdakini yazabiliriz.

$$\vdash \theta_1 \to (\theta_2 \to (\ldots(\theta_m \to (\varphi_1 \to (\varphi_2 \to (\ldots(\varphi_n \to (\psi \to \chi))))))\ldots)),$$

O halde önermeler mantığı için sağlamlık teoreminden yukarıdaki formül bir totolojidir ve bu nedenle **K**'nın bir aksiyomudur. Çünkü, $\vdash_{\mathbf{K}} \theta_1, \ldots, \vdash_{\mathbf{K}} \theta_m$'dir ve MP'nin m-kez uygulanmasından

$$\vdash_{\mathbf{K}} \varphi_1 \to (\ldots(\varphi_n \to (\psi \to \chi))\ldots)$$

elde edilir. Tekrar n-kez MP uygulanırsa $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash_{\mathbf{K}} \psi \to \chi$ elde edilir. ⊠

2.4 Modal Çatı ve Modeller

Bu kesimde temel modal dil için çatı ve modeller tanıtılarak bir formülün bir modelde gerçeklenmesi kavramı verilecektir.

Tanım 2.5. Temel modal dil için bir *Kripke çatısı* $\mathcal{F} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{R} \rangle$ ikilisidir öyle ki

(i) Boştan farklı $\mathcal{W}$ kümesi çatının evrenidir ve elemanları noktalar veya dünyalar olarak adlandırılır.

(ii) $\mathcal{R}$, $\mathcal{W}$ üzerinde bir ikili bağıntıdır.

Çatılar bağıntısal yapılardır.

Tanım 2.6. Temel modal dil için bir *model* $\mathcal{M} = \langle \mathcal{F}, \mathcal{V} \rangle$ ikilisidir. Burada $\mathcal{F}$ temel modal dil için bir çatı ve $\mathcal{V}$ bir fonksiyondur. Φ'deki her bir önerme değişkeni p için $\mathcal{V}(p)$, $\mathcal{W}$'nun bir alt kümesidir. Bir başka deyişle $\mathcal{V} : \Phi \to \mathcal{P}(\mathcal{W})$, p'yi $\mathcal{V}(p)$'ye götüren bir dönüşümdür. Burada $\mathcal{P}(\mathcal{W})$, $\mathcal{W}$'nun kuvvet kümesi ve $\mathcal{V}(p)$ modelde p önerme değişkeninin doğru olduğu noktaların kümesini gösterir ve $\mathcal{P}(\mathcal{W})$'nin bir alt kümesidir. $\mathcal{V}$ fonksiyonu bir *doğruluk değer ataması* olarak adlandırılır. $\mathcal{M}$ modeline $\mathcal{F}$ çatısından elde edilen model denir.

Tanım 2.7. w, $\mathcal{M} = \langle W, \mathcal{R}, V \rangle$ modelinde bir nokta olsun. $\mathcal{M}$ modelinde w noktasında bir φ formülünün *gerçeklenmesi* (*veya doğru olması*) indaktif olarak aşağıdaki gibi tanımlanır:

$\mathcal{M}, w \models p$ gyk $w \in V(p)$, burada $p \in \Phi$,

$\mathcal{M}, w \models \bot$ gyk $\bot$ hiçbir zaman sağlanmaz,

$\mathcal{M}, w \models \neg\varphi$ gyk $\mathcal{M}, w \models \varphi$ gerçeklenmez,

$\mathcal{M}, w \models \varphi \vee \psi$ gyk $\mathcal{M}, w \models \varphi$ veya $\mathcal{M}, w \models \psi$,

$\mathcal{M}, w \models \Box\varphi$ gyk $w\mathcal{R}v$ olacak şekilde her $v \in W$ için $\mathcal{M}, v \models \varphi$.

Bu tanıma ek olarak, $\Diamond$ operatörü içeren bir formül için bir modelde gerçeklenme aşağıdaki gibi verilir. $\mathcal{M}, w \models \Diamond\varphi$ gyk $w\mathcal{R}v$ olmak üzere bir $v \in W$ için $\mathcal{M}, v \models \varphi$.

Bir $\mathcal{M}$ modelindeki w dünyasında φ gerçeklenmez ise, φ formülü w'da yanlıştır denir ve $\mathcal{M}, w \not\models \varphi$ şeklinde yazılır.

$\mathcal{V}$ doğruluk değer ataması önerme değişkenlerinden keyfi formüllere genişletilebilir. φ formülünün doğru olduğu dünyaların kümesi olarak $V(\varphi)$ aşağıdaki gibi tanımlanır;

$$V(\varphi) := \{w \mid \mathcal{M}, w \models \varphi\}.$$

Tanım 2.8. (i) φ formülü $\mathcal{F}$ çatısından elde edilen bir $\langle \mathcal{F}, \mathcal{V} \rangle$ modelinde ve bir w dünyasında doğru ise φ'ye, $\mathcal{F}$ çatısında w dünyasında geçerlidir, denir ve $\mathcal{F}, w \models \varphi$ ile gösterilir.

(ii) $\mathcal{F}$ çatısının her bir dünyasında φ formülü geçerli ise, $\mathcal{F}$ çatısında φ formülü geçerlidir, denir ve $\mathcal{F} \models \varphi$ ile gösterilir.

Tanım 2.9. (i) $\mathcal{M} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{R}, \models \rangle$ modeli φ'yi gerçekler, $\mathcal{M} \models \varphi$ şeklinde yazılır ve aşağıdaki gibi tanımlanır: $\mathcal{M} \models \varphi \Leftrightarrow$ her $w \in \mathcal{W}$ için $w \models \varphi$'dir.

(ii) $\mathcal{F}$ çatısında φ formülü geçerlidir, $\mathcal{F} \models \varphi$ şeklinde yazılır ve aşağıdaki gibi tanımlanır: $\mathcal{F} \models \varphi \Leftrightarrow \mathcal{F}$ çatısından elde edilen her $\mathcal{M}$ modeli için $\mathcal{M} \models \varphi$'dir.

(iii) $\mathcal{C}$ bir çatılar sınıfı olsun. $\mathcal{C}$ çatılar sınıfında φ formülü geçerlidir, $\models_C \varphi$ şeklinde yazılır ve aşağıdaki gibi tanımlanır: $\models_C \varphi \Leftrightarrow$ her $\mathcal{F} \in \mathcal{C}$ çatısı için $\mathcal{F} \models \varphi$'dir.

(iv) Bir φ formülü geçerlidir, $\models \varphi$ şeklinde yazılır ve aşağıdaki gibi tanımlanır: $\models \varphi \Leftrightarrow$ her $\mathcal{F}$ çatısı için $\mathcal{F} \models \varphi$'dir.

(v) Bir φ formülü Γ öncüller kümesinden semantik olarak elde edilir, $\Gamma \models \varphi$ şeklinde yazılır ve aşağıdaki gibi tanımlanır:

$\Gamma \models \varphi \Leftrightarrow$ her $\mathcal{M}$ modeli ve $w \in \mathcal{W}$ olmak üzere her $\psi \in \Gamma$ için $w \models \psi$ ise $w \models \varphi$'dir.

Örnek 2.3. Aşağıdaki gibi tanımlı $\mathcal{M} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{R}, \mathcal{V} \rangle$ modelinde (i) $\Diamond\Box p$ formülünün w_1 dünyasında doğru, (ii) $\Diamond\Box p \to p$ formülünün bu modelde gerçeklenemez, (iii) $\Diamond(p \wedge \neg r)$ formülünün w_2 dünyasında doğru ve (iv) $\Box q$ formülünün bu modelde gerçeklenebilir olduğunu gösterelim. $\mathcal{F} = \langle \{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5\}, \mathcal{R} \rangle$ çatısını göz önünde bulunduralım, burada $w_i \mathcal{R} w_j$ gyk $j = i + 1$ şeklinde tanımlansın:

$$\underset{w_1}{\bullet} \longrightarrow \underset{w_2}{\bullet} \longrightarrow \underset{w_3}{\bullet} \longrightarrow \underset{w_4}{\bullet} \longrightarrow \underset{w_5}{\bullet}$$

$\mathcal{F}$ çatısında doğruluk değer ataması $\mathcal{V}$, $\mathcal{V}(p) = \{w_2, w_3\}$, $\mathcal{V}(q) = \{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5\}$ ve $\mathcal{V}(r) = \emptyset$ olarak tanımlansın. Bu durumda $\mathcal{M} = \langle \mathcal{F}, \mathcal{V} \rangle$ modelinde aşağıdakiler vardır;

$\mathcal{M}, w_1 \models \Diamond\Box p$ çünkü $w_1 \mathcal{R} w_2$ ve $\mathcal{M}, w_2 \models \Box p$'dir. Öte yandan $w_2 \mathcal{R} w_3$ ve $\mathcal{M}, w_3 \models p$'dir.

$\mathcal{M}, w_1 \not\models \Diamond\Box p \to p$ çünkü $\mathcal{M}, w_1 \models \Diamond\Box p$ iken $\mathcal{M}, w_1 \not\models p$'dir.

$\mathcal{M}, w_2 \models \Diamond(p \wedge \neg r)$ çünkü $w_2 \mathcal{R} w_3$ ve $\mathcal{M}, w_3 \models p$ ve $\mathcal{M}, w_3 \not\models r$'dir.

$\mathcal{M}, w_i \models q$, $\forall i = 1, 2, 3, 4, 5$ olduğundan $\mathcal{M} \models \Box q$'dur. Çünkü w_1, w_2, w_3 ve w_4'de $\Box q$ doğrudur ve w_5 bir ölü noktadır(dead end). Böyle bir noktada $\Box q$ aşikar olarak doğrudur(herhangi bir $\Box$' lı formül herhangi bir modelin herhangi bir ölü noktasında doğrudur).

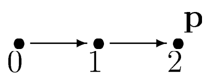
Örnek 2.4. $\Diamond(p \vee q) \to (\Diamond p \vee \Diamond q)$ formülü tüm çatılarda doğrudur.

İspat. $\mathcal{F}$ herhangi bir çatı, w bu çatıda bir nokta ve $\mathcal{V}$ bu çatı üzerinde bir doğruluk değer ataması ve $\mathcal{F}, w \models \Diamond(p \vee q)$ olsun. Bu durumda $\mathcal{F}, w \models \Diamond p \vee \Diamond q$ olduğunu göstermemiz gerekir. $\Diamond(p \vee q)$'nun w' daki doğruluk tanımından bir v noktası vardır öyle ki $w \mathcal{R} v$ ve $\mathcal{F}, v \models p \vee q$'dur. Ancak $v \models p \vee q$ ise ya $v \models p$ ya da $v \models q$'dur. Bundan dolayı $\Diamond$'ın doğruluk tanımından ya $w \models \Diamond p$ ya da $w \models \Diamond q$'dur. Bu nedenle, $w \models \Diamond p \vee \Diamond q$'dur. $\boxtimes$

Örnek 2.5. $\Diamond\Diamond p \to \Diamond p$ formülü tüm çatılarda geçerli değildir.

İspat. Bunu göstermek için bu formülü yanlışlayan bir $\mathcal{F}$ çatısı ve bir $\mathcal{V}$ doğruluk değer ataması bulmalıyız.

$\mathcal{F} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{R} \rangle$, $\mathcal{W} = \{0, 1, 2\}$ ve $\mathcal{R} = \{(0, 1), (1, 2)\}$ şeklinde tanımlı bir çatı olsun ve $\mathcal{V}$, $\mathcal{F}$ üzerinde $\mathcal{V}(p) = \{2\}$ ile tanımlı bir doğruluk değer ataması olsun.



Bu durumda $\mathcal{F}, 0 \models \Diamond\Diamond p$ gyk $\mathcal{F}, 1 \models \Diamond p$'dir(0, 1'e bağlantılı olduğundan). gyk $\mathcal{F}, 2 \models p$'dir(1, 2'ye bağlantılı olduğundan). Ancak $\mathcal{F}, 0 \not\models \Diamond p$ çünkü 0, 2 ile bağlantılı değildir.

$\therefore$ $\Diamond\Diamond p \to \Diamond p$ formülü tüm çatılarda geçerli değildir. $\boxtimes$

Örnek 2.4.1. $(\Box p \wedge \Box q) \to \Box(p \wedge q)$ formülü herhangi bir Kripke çatıda doğrudur.

İspat. Bunun için herhangi bir $\mathcal{F}$ çatısında bir w noktasında bu formülün doğru olduğunu göstermemiz gerekir. $\mathcal{F}, w \models \Box p \wedge \Box q$ olsun. $\mathcal{F} \models \Box(p \wedge q)$ olduğunu göstermeliyiz. $\mathcal{F}, w \models \Box p \wedge \Box q$ olduğundan $\mathcal{F}, w \models \Box p$ ve $\mathcal{F}, w \models \Box q$ ve $\Box$'ın doğruluk tanımından her v noktası için öyle ki $w\mathcal{R}v$, $\mathcal{F}, v \models p$ ve $\mathcal{F}, v \models q$'dur. Bundan dolayı her v noktası için $\mathcal{F}, v \models p \wedge q$'dur. O halde $\mathcal{F}, w \models \Box(p \wedge q)$'dur. Bundan dolayı, $\models (\Box p \wedge \Box q) \to \Box(p \wedge q)$'dur. $\boxtimes$

2.5 K4 Modal Mantığı

Bu kesimde sağlam ve tam bir mantık olan **K4** modal mantığının sintaks ve semantiği tanıtılacaktır.

Tanım 2.5.1. **K4** modal mantığı **K**'ya 4 aksiyomunu ekleyerek elde edilir:

- 4: $\Box\varphi \to \Box\Box\varphi$.

Tanım 2.5.2. **K4** için bir Kripke çatısı $\mathcal{R}$ bağıntısının geçişli olduğu bir $\langle \mathcal{W}, \mathcal{R} \rangle$ ikilisidir. Sembollerle her $x, y, z \in \mathcal{W}$ için $x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z \to x\mathcal{R}z$'dir.

Teorem 2.5.1. $\langle \mathcal{W}, \mathcal{R} \rangle$ çatısında $\Box p \to \Box\Box p$'nin geçerli olması için gyk $\mathcal{R}$ bağıntısının geçişli olmasıdır.

İspat.

($\Rightarrow$): $\langle \mathcal{W}, \mathcal{R} \rangle$ bir Kripke çatı olsun. $\Box p \to \Box\Box p$ formülünün $\langle \mathcal{W}, \mathcal{R} \rangle$ de geçerli olduğunu varsayalım. $w\mathcal{R}x$ ve $x\mathcal{R}y$ olsun. $w\mathcal{R}y$ olduğunu göstermeliyiz. Doğruluk değer ataması $\mathcal{W}$ üzerinde her $z \in \mathcal{W}$ için $\mathcal{V}(p) = \{z \mid w\mathcal{R}z\}$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda $w \models \Box p$'dir. $w\mathcal{R}y$ olmadığını varsayalım. Bu durumda $y \notin \mathcal{V}(p)$'dir. $x\mathcal{R}y$ olduğundan dolayı $x \not\models \Box p$'dir. $w\mathcal{R}x$ olduğundan dolayı $w \not\models \Box\Box p$'dir. Bu nedenle, $w \not\models \Box p \to \Box\Box p$'dir. Bu $\langle \mathcal{W}, \mathcal{R} \rangle$ çatısında $\Box p \to \Box\Box p$'nin geçerliliği ile bir çelişkidir. Bu durumda $w\mathcal{R}y$ ve $\mathcal{R}$ bağıntısı geçişlidir.

($\Leftarrow$): $\mathcal{R}$ bağıntısı geçişli olsun. $\mathcal{V}$ keyfi bir doğruluk değer ataması, $w \models \Box p$ ve $w\mathcal{R}x$ olsun. Eğer $x\mathcal{R}y$ ise geçişlilikten $w\mathcal{R}y$ ve $y \models p$'dir. Bu sonuçla $x \models \Box p$'dir. Bu yüzden $w \models \Box\Box p$ ve bu durumda $w \models \Box p \to \Box\Box p$'dir. $\langle \mathcal{W}, \mathcal{R} \rangle$ çatısında $\Box p \to \Box\Box p$ geçerlidir. $\boxtimes$

Örnek 2.6. $\Diamond\Diamond p \to \Diamond p$ formülü geçişli çatılar sınıfında doğrudur.

İspat. $\mathcal{F}$ geçişli bir çatı, w bu çatıda bir nokta ve $\mathcal{V}$ doğruluk değer ataması olsun. $\mathcal{F}, w \models \Diamond\Diamond p$ olduğunu varsayalım. $\mathcal{F}, w \models \Diamond p$ olduğunu göstermeliyiz. Bu durumda, varsayımdan öyle u ve v noktaları vardır ki $w\mathcal{R}u$, $u\mathcal{R}v$ ve $\mathcal{F}, v \models p$'dir. $\mathcal{R}$'nin geçişliliğinden $w\mathcal{R}v$'dir. Bundan dolayı $\mathcal{F}, w \models \Diamond p$'dir.

$\therefore$ $\Diamond\Diamond p \to \Diamond p$ formülü geçişli çatılar sınıfında doğrudur. $\boxtimes$

Tanım 2.10. $\mathcal{M} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{R}, \mathcal{V} \rangle$ ve $\mathcal{M}' = \langle \mathcal{W}', \mathcal{R}', \mathcal{V}' \rangle$ iki model olsun. $\mathcal{M}$'den $\mathcal{M}'$'ye bir $f\colon \mathcal{M} \to \mathcal{M}'$ fonksiyonu aşağıdakileri sağlarsa bir homomorfizmadır, denir:

(i) Her bir önerme değişkeni p ve $w \in \mathcal{M}$ noktası için $w \in \mathcal{V}(p)$ ise $f(w) \in \mathcal{V}'(p)$'dir.

(ii) Her $w, v \in \mathcal{M}$ için $w\mathcal{R}v$ ise $f(w)\mathcal{R}'f(v)$'dir.

Örnek 2.7. $\mathcal{M} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{R}, \mathcal{V} \rangle$ ve $\mathcal{M}' = \langle \mathcal{W}', \mathcal{R}', \mathcal{V}' \rangle$ modelleri aşağıdaki gibi tanımlı iki model olsun.

- $\mathcal{W} = \{x_1, x_2, x_3\}$, $\mathcal{R} = \{(x_1, x_3), (x_2, x_3)\}$, $V(p) = \{x_1, x_2\}$ ve $V(q) = \{x_3\}$.

- $\mathcal{W}' = \{y_1, y_2\}$, $\mathcal{R}' = \{(y_1, y_2)\}$, $V'(p) = \{y_1\}$ ve $V'(q) = \{y_2\}$.

$f : \mathcal{W} \to \mathcal{W}'$'ye $f(x_1) = f(x_2) = y_1$ ve $f(x_3) = y_2$ ile tanımlı f fonksiyonu bir homomorfizmadır.

İspat. f'nin bir homomorfizma olduğunu göstermek için Tanım 2.7. (i) ve (ii) koşullarını sağladığını göstermemiz gerekir.

(i) $x_1 \in V(p)$ olsun. $f(x_1) \in V'(p)$ olduğunu göstermeliyiz. f fonksiyonu ve $V'(p)$'nin tanımından $f(x_1) = y_1 \in V'(p)$'dir.

$x_2 \in V(p)$ olsun. $f(x_2) \in V'(p)$ olduğunu göstermeliyiz. f fonksiyonu ve $V'(p)$'nin tanımından $f(x_2) = y_1 \in V'(p)$'dir.

$x_3 \in V(q)$ olsun. $f(x_3) \in V'(q)$ olduğunu göstermeliyiz. f fonksiyonu ve $V'(q)$'nun tanımından $f(x_3) = y_2 \in V'(q)$'dur.

(ii) $x_1 \mathcal{R} x_3$ olsun. $f(x_1)\mathcal{R}' f(x_3)$ olduğunu göstermeliyiz. f fonksiyonunun tanımından $f(x_1) = y_1$ ve $f(x_3) = y_2$'dir. $\mathcal{R}'$'nün tanımından $y_1 \mathcal{R}' y_2$'dır. Bu nedenle $f(x_1)\mathcal{R}' f(x_3)$'dir.

$x_2 \mathcal{R} x_3$ olsun. $f(x_2)\mathcal{R}' f(x_3)$ olduğunu göstermeliyiz. f fonksiyonunun tanımından $f(x_2) = y_1$ ve $f(x_3) = y_2$'dir. $\mathcal{R}'$'nün tanımından $y_1 \mathcal{R}' y_2$'dir. Bu nedenle $f(x_2)\mathcal{R}' f(x_3)$'dir.

$\therefore$ f fonksiyonu bir homomorfizmadır. $\boxtimes$

Tanım 2.11. $f : \mathcal{M} \to \mathcal{M}'$ homomorfizmasına aşağıdakileri sağlarsa kuvvetli homomorfizma denir.

(i) Her bir önerme değişkeni p ve $w \in \mathcal{M}$ olmak üzere $w \in \mathcal{V}(p)$ olması için gyk $f(w) \in \mathcal{V}'(p)$ olmasıdır.

(ii) Her $w, v \in \mathcal{M}$ olmak üzere $w\mathcal{R}v$ gyk $f(w)\mathcal{R}' f(v)$ olmasıdır.

Bijektif kuvvetli homomorfizmaya bir izomorfizma denir. Bir $\mathcal{M}$ modelinden $\mathcal{M}'$ modeline izomorfizma varsa bu iki model izomorfturlar denir ve $\mathcal{M} \cong \mathcal{M}'$ ile gösterilir.

Örnek 2.8. $\mathcal{M}_1 = \langle \mathcal{W}_1, \mathcal{R}_1, \mathcal{V}_1 \rangle$ ve $\mathcal{M}_2 = \langle \mathcal{W}_2, \mathcal{R}_2, \mathcal{V}_2 \rangle$ modelleri aşağıdaki gibi tanımlı iki model olsun.

- $\mathcal{W}_1 = \{x_1, x_2, x_3\}$ $(x_1 \neq x_2 \neq x_3 \neq x_1)$, $\mathcal{R}_1 = \{(x_1, x_3), (x_2, x_3)\}$, doğruluk değer ataması $V_1(p) = \{x_1, x_2\}$ ve $V_1(q) = \{x_3\}$ olsun.

- $\mathcal{W}_2 = \{y_1, y_2, y_3\}$ $(y_1 \neq y_2 \neq y_3 \neq y_1)$, $\mathcal{R}_2 = \{(y_1, y_3), (y_2, y_3)\}$, doğruluk değer ataması $V_2(p) = \{y_1, y_2\}$ ve $V_2(q) = \{y_3\}$ olsun.

$g : \mathcal{W}_1 \to \mathcal{W}_2$'ye $g(x_i) = y_i$, $(i = 1, 2, 3)$ ile tanımlı g fonksiyonu bir izomorfizmadır.

İspat. g'nin bir izomorfizma olduğunu göstermek için Tanım 2.8. (i) ve (ii) koşullarını sağladığını yani kuvvetli bir homomorfizma olduğunu ve ayrıca bijektif olduğunu göstermemiz gerekir.

(i) $(\Rightarrow)$: $x_1 \in V_1(p)$ olsun. $g(x_1) \in V_2(p)$ olduğunu göstermeliyiz. g fonksiyonu ve $V_2(p)$'nin tanımından $g(x_1) = y_1 \in V_2(p)$'dir.

$x_2 \in V_1(p)$ olsun. $g(x_2) \in V_2(p)$ olduğunu göstermeliyiz. g fonksiyonunun ve $V_2(p)$'nin tanımından $g(x_2) = y_2 \in V_2(p)$'dir.

$x_3 \in V_1(q)$ olsun. $g(x_3) \in V_2(q)$ olduğunu göstermeliyiz. g fonksiyonu ve $V_2(q)$'nin tanımından $g(x_3) = y_3 \in V_2(q)$'dir.

$(\Leftarrow)$: $g(x_1) = y_1 \in V_2(p)$ olsun. $x_1 \in V_1(p)$ olduğunu göstermeliyiz. Bu durumda $V_1(p)$'nin tanımından $x_1 \in V_1(p)$'dir.

$g(x_2) = y_2 \in V_2(p)$ olsun. $x_2 \in V_1(p)$ olduğunu göstermeliyiz. Bu durumda $V_1(p)$'nin tanımından $x_2 \in V_1(p)$'dir.

$g(x_3) = y_3 \in V_2(q)$ olsun. $x_3 \in V_1(q)$ olduğunu göstermeliyiz. Bu durumda $V_1(q)$'nun tanımından $x_3 \in V_1(q)$'dur.

(ii) $(\Rightarrow)$: $x_1\mathcal{R}_1x_3$ olsun. $g(x_1)\mathcal{R}_2g(x_3)$ olduğunu göstermeliyiz. g fonksiyonunun tanımından $g(x_1) = y_1$ ve $g(x_3) = y_3$'dır. $\mathcal{R}_2$'nin tanımından $y_1\mathcal{R}_2y_3$'dir. Bu nedenle $g(x_1)\mathcal{R}_2g(x_3)$'dir.

$x_2\mathcal{R}_1x_3$ olsun. $g(x_2)\mathcal{R}_2g(x_3)$ olduğunu göstermeliyiz. g fonksiyonunun tanımından $g(x_2) = y_2$ ve $g(x_3) = y_3$'dir. $\mathcal{R}_2$'nin tanımından $y_2\mathcal{R}_2y_3$'dir. Bu nedenle $g(x_2)\mathcal{R}_2g(x_3)$'dir.

$(\Leftarrow)$: $g(x_1)\mathcal{R}_2g(x_3)$ olsun. $x_1\mathcal{R}_1x_3$ olduğunu göstermeliyiz. Bu durumda $\mathcal{R}_1$'in tanımından $x_1\mathcal{R}_1x_3$'dir.

$g(x_2)\mathcal{R}_2g(x_3)$ olsun. $x_2\mathcal{R}_1x_3$ olduğunu göstermeliyiz. Bu durumda $\mathcal{R}_1$'in tanımından $x_2\mathcal{R}_1x_3$'dir.

O halde g fonksiyonu kuvvetli bir homomorfizmadır.

Şimdi g fonksiyonunun bijektif olduğunu gösterelim.

g fonksiyonu 1-1 dir: $x_1, x_2 \in \mathcal{W}_1$ ve $x_1 \neq x_2$ olsun. $g(x_1) \neq g(x_2)$'dir. $y_1 \neq y_2$ olduğunu göstermeliyiz. $\mathcal{W}_2$'nin tanımından $y_1 \neq y_2$'dir.

$x_2, x_3 \in \mathcal{W}_1$ ve $x_2 \neq x_3$ olsun. $g(x_2) \neq g(x_3)$ olduğunu göstermeliyiz. $\mathcal{W}_2$'nin tanımından $y_2 \neq y_3$'dir.

$x_3, x_1 \in \mathcal{W}_1$ ve $x_3 \neq x_1$ olsun. $g(x_3) \neq g(x_1)$ olduğunu göstermeliyiz. $\mathcal{W}_2$'nin tanımından $y_3 \neq y_1$'dir.

g fonksiyonu örtendir: $y_1 \in \mathcal{W}_2$ olsun. $\exists x_i \in \mathcal{W}_1$ öyle ki $g(x_i) = y_1$, $(i = 1, 2, 3)$. Eğer $x_i = x_1$ seçilirse g fonksiyonunun tanımından $g(x_1) = y_1$'dir.

$y_2 \in \mathcal{W}_2$ olsun. $\exists x_i \in \mathcal{W}_1$ öyle ki $g(x_i) = y_2$, $(i = 1, 2, 3)$. Eğer $x_i = x_2$ seçilirse g fonksiyonunun tanımından $g(x_2) = y_2$'dir.

$y_3 \in \mathcal{W}_2$ olsun. $\exists x_i \in \mathcal{W}_1$ öyle ki $g(x_i) = y_3$, $(i = 1, 2, 3)$. Eğer $x_i = x_3$ seçilirse g fonksiyonunun tanımından $g(x_3) = y_3$'dir.

$\therefore$ g fonksiyonu bir izomorfizmadır ve dolayısı ile $\mathcal{M}_1$ modeli $\mathcal{M}_2$ modeline izomorftur. $\boxtimes$

Bölüm 3

K ve K4 Modal Mantıkları için Sağlamlık Teoremleri

Herhangi bir modal mantığın sintaksı ve semantiği arasındaki ilişkiler sağlamlık ve tamlık teoremleri ile verilir. Herhangi bir modal mantığın sağlamlık teoremi o mantıkta türetilebilir olan bir formülün geçerli olduğunu söyler. Bu bölümde **K** ve **K4** modal mantıklarının sağlam olduğu kanıtlanacaktır. Bu bölümdeki tüm bilgiler [1], [4], [5] ve [8] de bulunabilir.

Tanım 3.1. $\mathcal{C}$ çatıların (ya da modellerin) bir sınıfı olsun. Bir normal modal mantık **S**, $\mathcal{C}$'*ye göre sağlamdır* denir, $\mathbf{S} \subseteq \mathbf{S}_{\mathcal{C}}$ (denk olarak; her φ formülü ve her $\mathcal{F} \in \mathcal{C}$ (ya da $\mathcal{M} \in \mathcal{C}$) için $\vdash_{\mathbf{S}} \varphi$ ise, $\mathcal{F} \models \varphi$'dir (ya da $\mathcal{M} \models \varphi$)) ise. **S** modal mantığı, $\mathcal{C}$'ye göre sağlam ise $\mathcal{C}$'ye **S** için bir çatılar sınıfıdır denir.

Teorem 3.1. [**K için zayıf sağlamlık teoremi**] $\vdash_{\mathbf{K}} \varphi$ ise, $\models \varphi$'dir.

İspat. İspat φ'nin türetiminin uzunluğu üzerinde tümevarımla yapılır.

Temel adım: φ'nin türetiminin uzunluğunun 1 ve $\vdash_{\mathbf{K}} \varphi$ olduğunu varsayalım. Bu durumda, φ ya bir aksiyom ya da bir totolojidir.

φ bir totoloji ise, $\models \varphi$ olduğu aşikardır. Çünkü tüm totolojiler her modelde geçerlidir.

φ, $\Box(\alpha \to \beta) \to (\Box\alpha \to \Box\beta)$ şeklinde bir formül olsun. $\mathcal{M}$ modelindeki herhangi bir w dünyası için, $\mathcal{M}, w \models \Box(\alpha \to \beta) \to (\Box\alpha \to \Box\beta)$ olduğunu göstermeliyiz.

$\mathcal{M}, w \models \Box(\alpha \to \beta)$ ve $\mathcal{M}, w \models \Box\alpha$ olduğunu varsayalım. $\mathcal{M}, w \models \Box\beta$ olduğunu göstermeliyiz. Bu durumda, $\mathcal{M}$ modelindeki herhangi bir w' dünyası için, $w\mathcal{R}w'$ ve $\mathcal{M}, w' \models (\alpha \to \beta)$ ve $\mathcal{M}, w' \models \alpha$, yazılabilir ki her w' için MP ile $\mathcal{M}, w' \models \beta$'dır. Çünkü $w\mathcal{R}w'$, $\mathcal{M}, w \models \Box\beta$'dır. Bundan dolayı $\models \varphi$'dir.

Tümevarım hipotezi: φ'nin türetiminin uzunluğu n+1 olsun ve teorem n uzunluktaki türetimler için sağlansın. Teoremin MP ve NR için sağlandığını göstermeliyiz.

Teoremin $\psi \to \varphi$ ve ψ için doğru olduğunu varsayalım. $\psi \to \varphi$ ve ψ olduğundan MP ile φ elde edilir. $\models \psi \to \varphi$ ve $\models \psi$'yi tümevarım hipotezinden biliyoruz. Her $\mathcal{M}, w$ için, $\mathcal{M}, w \models \psi \to \varphi$ ve $\mathcal{M}, w \models \psi$'dir. Bundan dolayı her $\mathcal{M}, w$ için MP ile $\mathcal{M}, w \models \varphi$'dir.

Teoremin φ için doğru olduğunu varsayalım. Bu durumda $\vdash \varphi$ olduğundan NR ile $\vdash \Box\varphi$'dir. $\models \Box\varphi$ olduğunu göstermeliyiz. Bu amaçla herhangi bir $\mathcal{M}, w$ için $\mathcal{M}, w \not\models \Box\varphi$ alalım. Bu durumda, bazı $w' \in W$ için, $w\mathcal{R}w'$ ve $w' \not\models \varphi$'dir. Bundan dolayı $\mathcal{M}, w' \not\models \varphi$ ve sonra $\not\models \varphi$'dir. Bu bir çelişkidir. O halde $\models \Box\varphi$'dir. $\boxtimes$

Teorem 3.2. [**K için sağlamlık teoremi**] $\varphi_1, ..., \varphi_n \vdash_{\mathbf{K}} \psi$ ise, $\varphi_1, ..., \varphi_n \models \psi$ dir.

İspat. $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash \psi$ olduğunu varsayalım. Bu durumda **K**'daki türetim teoreminden:

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \vdash \psi$$
$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1} \vdash (\varphi_n \to \psi)$$
$$.$$
$$.$$
$$.$$
$$\varphi_1 \vdash \varphi_2 \to (\ldots(\varphi_{n-1} \to (\varphi_n \to \psi)))\ldots)$$
$$\vdash \varphi_1 \to (\varphi_2 \to (\ldots(\varphi_{n-1} \to (\varphi_n \to \psi)))\ldots)\text{'dir.}$$

K için zayıf sağlamlık teoremi kullanılarak $\models \varphi_1 \to (\varphi_2 \to (\ldots(\varphi_{n-1} \to (\varphi_n \to \psi)))\ldots)$ elde edilir. Bunun anlamı her $\mathcal{M}$ ve $w \in \mathcal{W}$ için,

$$\mathcal{M}, w \models \varphi_1 \to (\varphi_2 \to (\ldots(\varphi_{n-1} \to (\varphi_n \to \psi)))\ldots)$$
$$\mathcal{M}, w \models \varphi_1 \Rightarrow \mathcal{M}, w \models \varphi_2 \to (\ldots(\varphi_{n-1} \to (\varphi_n \to \psi)))\ldots)$$
$$\mathcal{M}, w \models \varphi_1 \text{ ve } \mathcal{M}, w \models \varphi_2 \Rightarrow \mathcal{M}, w \models \varphi_3 \to (\ldots(\varphi_{n-1} \to (\varphi_n \to \psi)))\ldots)\text{'dir.}$$

Bundan dolayı, her $w \in \mathcal{M}$ için eğer $\mathcal{M}, w \models \varphi_1, \mathcal{M}, w \models \varphi_2, \ldots, \mathcal{M}, w \models \varphi_n$ ise $\mathcal{M}, w \models \psi$'dir. Bunun anlamı da $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \models \psi$'dir. ⊠

Teorem 3.3. [**K için kuvvetli sağlamlık teoremi**] $\Delta \vdash_{\mathbf{K}} \varphi$ ise, $\Delta \models \varphi$'dir.

İspat. $\Delta \vdash_{\mathbf{K}} \varphi$ olduğunu varsayalım. Her türetim sonlu olduğundan φ'nin türetimi Δ'dan sadece sonlu sayıda öncül içerebilir. Bu nedenle sonlu, en az bir $\Delta' \subseteq \Delta$ vardır öyle ki $\Delta' \vdash_{\mathbf{K}} \varphi$'dir. Δ''nün formülleri $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$ olsun. Bu durumda $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n \vdash_{\mathbf{K}} \varphi$'dir. O halde sağlamlık teoreminden (teorem 3.2.) $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n \models \varphi$'dir. Bundan dolayı $\Delta \models \varphi$'dir. ⊠

Teorem 3.4. [**K4 için zayıf sağlamlık teoremi**] $\vdash_{\mathbf{K4}} \varphi$ ise, φ tüm geçişli çatılarda geçerlidir.

İspat. $\vdash_{\mathbf{K4}} \varphi$ ve $\langle \mathcal{W}, \mathcal{R} \rangle$ çatısının geçişli olduğunu varsayalım. φ'nin $\langle \mathcal{W}, \mathcal{R} \rangle$ da geçerli olduğunu göstermeliyiz. İspat φ'nin türetiminin uzunluğu üzerinde tümevarımla yapılır.

Temel adım: φ'nin türetiminin uzunluğu 1 ve $\vdash_{\mathbf{K4}} \varphi$ olduğunu varsayalım. Bu durumda, φ ya bir aksiyomdur ya da bir totolojidir.

Eğer φ bir totoloji ise, φ'nin geçerli olduğu aşikardır çünkü tüm totolojiler tüm modellerde geçerlidir.

φ, $\Box(\alpha \to \beta) \to (\Box\alpha \to \Box\beta)$ şeklinde bir formül olsun. Her bir $\mathcal{M}, w$ için, $\mathcal{M}, w \models \Box(\alpha \to \beta) \to (\Box\alpha \to \Box\beta)$ olduğunu göstermeliyiz. $\mathcal{M}, w \models \Box(\alpha \to \beta)$ ve $\mathcal{M}, w \models \Box\alpha$ olduğunu varsayalım. $\mathcal{M}, w \models \Box\beta$ olduğunu göstermeliyiz. Bu durumda, $\mathcal{M}$ modelindeki her w' için, $w\mathcal{R}w'$ ve $\mathcal{M}, w' \models (\alpha \to \beta)$ ve $\mathcal{M}, w' \models \alpha$ dır. MP ile her w' için $\mathcal{M}, w' \models \beta$ yazabiliriz çünkü $w\mathcal{R}w'$, $\mathcal{M}, w \models \Box\beta$'dır. Bu nedenle $\models \varphi$'dir.

φ, $\Box p \to \Box\Box p$ biçiminde bir formül olsun. Her $\mathcal{M}$ modelindeki her w dünyası için, $\mathcal{M}, w \models \Box p \to \Box\Box p$ olduğunu göstermeliyiz. Bu teorem 2.5.1 den aşikardır.

Tümevarım hipotezi: φ'nin türetiminin uzunluğu n+1 olsun ve teorem n uzunlukta türetimler için sağlansın. Teoremin MP ve NR için sağlandığını göstermeliyiz.

Teoremin $\psi \to \varphi$ ve ψ için doğru olduğunu varsayalım. Tümevarım hipotezinden biliyoruz ki $\models \psi \to \varphi$ ve $\models \psi$'dir. Her $\mathcal{M}, w$ için $\mathcal{M}, w \models \psi \to \varphi$ ve $\mathcal{M}, w \models \psi$'dir. Bu nedenle her $\mathcal{M}, w$ için, MP ile $\mathcal{M}, w \models \varphi$'dir.

Teoremin φ için doğru olduğunu varsayalım. Bu durumda NR ile $\vdash \Box\varphi$ sağlanır. $\models \Box\varphi$ olduğunu gösterelim: Bir $\mathcal{M}, w$ için, $\mathcal{M}, w \not\models \Box\varphi$ olsun. Bu durumda, bir $w' \in W$ için $w\mathcal{R}w'$ ve $w' \not\models \varphi$'dir. Bu nedenle $\mathcal{M}, w' \not\models \varphi$ ve $\not\models \varphi$'dir. Bu bir çelişkidir. Bundan dolayı $\models \Box\varphi$'dir. $\boxtimes$

Bölüm 4

K ve K4 Modal Mantıkları için Tamlık Teoremleri

Tamlık teoremleri verilen mantıktaki formülleri gerçekleyen modellerin var olduğunu gösteren teoremlerdir ve bu nedenle model oluşturmaya dayalıdır. Bu modelleri oluşturmanın farklı yöntemleri vardır. Bu bölümde bu modelleri elde etmenin iki yöntemi verilecektir: Sonlu Henkin yöntemi ve filtreleme yöntemi. Bu bölümdeki tüm bilgiler [1], [2], [5] ve [8] de bulunabilir.

Bu bölümde $\mathbf{S}$ bir modal mantığı ve Γ, $\mathbf{S}$ dilinde yazılmış formüllerin kümesini gösterecektir.

Tanım 4.1. $\mathbf{S}$ bir modal mantık olsun.

(a) $\mathbf{S}$'nin bir $\mathcal{C}$ çatılar sınıfına göre kuvvetli tam olması için gyk

$\Phi \models_{\mathcal{C}} \varphi$ ise, $\Phi \vdash_{\mathbf{S}} \varphi$ olmasıdır. Özel olarak $\mathcal{C} = \{\mathcal{F}\}$ ise $\mathbf{S}$'ye $\mathcal{F}$ çatısına göre kuvvetli tamdır denir.

(b) $\mathbf{S}$'nin $\mathcal{C}$ çatılar sınıfına göre tam olması için gyk her sonlu formül kümesi Φ için (a) koşulunun sağlanmasıdır.

(c) $\mathbf{S}$ modal mantığı ile karakterize edilen çatılar sınıfı Char($\mathbf{S}$)=$\{\mathcal{F} |$ her $\varphi \in \mathbf{S}$ için, $\mathcal{F} \models \varphi\}$ ile verilir ve Char($\mathbf{S}$) ile gösterilir.

(d) $\mathbf{S}$ modal mantığının tam(kuvvetli tam) olması için gyk $\mathcal{C}$ =Char($\mathbf{S}$) olmak üzere (b) ((a))'nın sağlanmasıdır.

4.1 Kanonik Model

Bu kesimde maksimal tutarlı formül kümelerinden model oluşturma yöntemi olan kanonik model yöntemi anlatılarak, kanonik model teoremi ispatlanacaktır.

Tanım 4.1.1. Bir Γ kümesi **S**-tutarlı olması için gyk $\Gamma \nvdash_{\mathbf{S}} \bot$ olmasıdır.

Tanım 4.1.2. Γ'nın maksimal **S**-tutarlı olması için gyk $\Gamma \subset \Gamma'$ olacak şekilde bir **S**-tutarlı Γ' kümesinin olmamasıdır.

Tanım 4.1.3. Kanonik model $\mathcal{M}_S$, $\langle\langle\mathcal{W}_S, \mathcal{R}_S\rangle, \mathcal{V}_S\rangle$ modelidir ve aşağıdaki gibi tanımlanır:

(i) $\mathcal{W}_S = \{\Gamma \mid \Gamma$ maksimal S-tutarlıdır$\}$,

(ii) $\mathcal{R}_S = \{\langle\Gamma, \Gamma'\rangle \mid \varphi \in \Gamma'$ her φ için öyle ki $\Box\varphi \in \Gamma\}$,

(iii) $\mathcal{V}_S(p) = \{\Gamma \in \mathcal{W}_S \mid p \in \Gamma\}$(veya denk olarak $\Gamma \models p$ gyk $p \in \Gamma$).

Tanım 4.1.4. Γ'nın bir *teori* olması için gyk $\Gamma \vdash \varphi$ ve $\varphi \in \Gamma$ denk olmasıdır.

Lemma 4.1.1. Γ'nın maksimal tutarlı olması için gyk Γ'nın tutarlı ve her φ için $\varphi \notin \Gamma$ ise, $\Gamma \cup \{\varphi\}$ tutarsız olmasıdır.

İspat.

($\Rightarrow$): Γ maksimal tutarlı, Γ tutarlı ve her φ için $\varphi \notin \Gamma$ olsun. Tanım 4.1.2. ile Γ tutarlı ve tutarlı bir Γ' kümesi yoktur öyle ki $\Gamma \subset \Gamma'$'dir. O halde Γ' kümesi tutarsızdır. Γ''nü $\Gamma \cup \{\varphi\}$ olarak seçebiliriz çünkü $\varphi \notin \Gamma$'dir. Bu nedenle $\Gamma \cup \{\varphi\}$ tutarsızdır.

($\Leftarrow$): Γ tutarlı ve her φ için $\varphi \notin \Gamma$ ise $\Gamma \cup \{\varphi\}$ tutarsız olsun. Γ'nın maksimal tutarlı olduğunu göstermeliyiz. Varsayımdan Γ tutarlı ancak Γ maksimal tutarlı olmasın. Bu durumda bir Γ' kümesi vardır öyle ki Γ' maksimal tutarlıdır. Her φ için $\varphi \notin \Gamma$'dir. O halde Γ''nü $\Gamma \cup \{\varphi\}$ olarak seçersek bir çelişki elde edilir. Bu nedenle Γ maksimal tutarlıdır. $\boxtimes$

Lemma 4.1.2. Γ maksimal tutarlı bir küme olsun. Aşağıdakiler vardır:

(i) $\varphi \in \Gamma$ gyk $\Gamma \vdash_S \varphi$

(ii) $\top \in \Gamma$

(iii) $\bot \notin \Gamma$

(iv) $\neg\varphi \in \Gamma$ gyk $\varphi \notin \Gamma$

(v) $\varphi \wedge \psi \in \Gamma$ gyk $\varphi \in \Gamma$ ve $\psi \in \Gamma$

(vi) $\varphi \vee \psi \in \Gamma$ gyk $\varphi \in \Gamma$ veya $\psi \in \Gamma$

(vii) $\varphi \to \psi \in \Gamma$ gyk $\varphi \notin \Gamma$ veya $\psi \in \Gamma$

$(viii)$ $\varphi \leftrightarrow \psi \in \Gamma$ gyk $\varphi \in \Gamma$ gerek ve yeter koşul $\psi \in \Gamma$.

İspat.

$(i)(\Rightarrow)$: $\Gamma \nvdash_S \varphi$ olduğunu varsayalım. $\varphi \notin \Gamma$ olduğunu göstermeliyiz. Eğer $\Gamma \nvdash_S \varphi$ ise $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \nvdash_S \varphi \wedge \neg\varphi$'dir, çünkü $\varphi \wedge \neg\varphi$ bir çelişkidir ve $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \nvdash \perp$ yazılabilir. O halde Tanım 4.1.1.'den $\Gamma\cup\{\neg\varphi\}$'nin tutarlı bir küme olduğu görülür. Ve sonra Lemma 4.1.1. ile de $\neg\varphi \in \Gamma$ ve Γ'nın maksimal tutarlılığından $\varphi \notin \Gamma$'dır.

$(\Leftarrow)$: $\Gamma \vdash_S \varphi$ olduğunu varsayalım. $\varphi \in \Gamma$ olduğunu göstermeliyiz. $\varphi \notin \Gamma$ olsun. Bu durumda, $\Gamma\cup\{\varphi\}$ tutarsızdır. Çünkü Γ maksimal tutarlıdır. Bu nedenle tanımdan $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash_S \perp$'dir. Türetim teoremi ve de $\Gamma \vdash_S \varphi \to \perp$ ve MP ile $\Gamma \vdash \perp$ elde edilir. O halde Γ, S-tutarsızdır. Bu bir çelişkidir. Bu nedenle $\varphi \in \Gamma$'dır.

$\therefore\ \varphi \in \Gamma$ gyk $\Gamma \vdash_S \varphi$'dir.

(ii) $\top \notin \Gamma$ olduğunu varsayalım. Γ maksimal tutarlı olduğundan $\Gamma \cup \{\top\}$ tutarsızdır. $\Gamma \cup \{\top\} \vdash_S \perp$'dir. Bu durumda, türetim teoremi ile $\Gamma \vdash_S \top \to \perp$'dir. Bu nedenle Tanım 4.1.1. ile $\Gamma \vdash_S \perp$ ve Γ'nın tutarsız bir küme olduğu elde edilir. Bu bir çelişkidir. Bu nedenle $\top \in \Gamma$'dır.

(iii) $\perp \in \Gamma$ olduğunu varsayalım. Lemma 4.1.2. (i)'den $\Gamma \vdash_S \perp$ yazabiliriz. Tanım 4.1.1. ile Γ, S-tutarlı ise, $\Gamma \nvdash_S \perp$ olduğunu biliyoruz. Bu bir çelişkidir. Bundan dolayı $\perp \notin \Gamma$'dır.

$(iv)(\Rightarrow)$: $\neg\varphi \in \Gamma$ ve $\varphi \in \Gamma$ olduğunu varsayalım. Lemma 4.1.2. (i)'den $\Gamma \vdash_S \neg\varphi$ ve $\Gamma \vdash_S \varphi$ olduğunu biliyoruz. Bu nedenle $\Gamma \vdash_S \neg\varphi \wedge \varphi$ ise, $\Gamma \vdash_S \perp$'dır. Lemma 4.1.2. (i)'den, $\perp \in \Gamma$'dir. Bu Lemma 4.1.2. (iii) ile bir çelişkidir. Bu nedenle $\varphi \notin \Gamma$'dir.

$(\Leftarrow)$: $\varphi \notin \Gamma$ olduğunu varsayalım. $\neg\varphi \in \Gamma$ olduğunu göstermeliyiz. Γ maksimal tutarlı olduğundan $\Gamma \cup \{\varphi\}$ Lemma 4.1.1. ile tutarsızdır. Bundan dolayı, $\Gamma\cup\{\varphi\} \vdash \perp$ ve türetim teoremi ile $\Gamma \vdash \varphi \to \perp$'dir. Bu nedenle, $\Gamma \vdash \neg\varphi$ ve Lemma 4.1.2. (i) ile $\neg\varphi \in \Gamma$'dır.

(v) $(\Rightarrow)$: $\varphi \wedge \psi \in \Gamma$ olduğunu varsayalım. Lemma 4.1.2. (i)'den $\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi$'dir. Aynı zamanda $\varphi \wedge \psi \vdash \varphi$ ve $\varphi \wedge \psi \vdash \psi$ olduğunu biliyoruz. Bu nedenle, $\Gamma \vdash \varphi$ ve

$\Gamma \vdash \psi$'dir. O halde Lemma 4.1.2. (i)'den $\varphi \in \Gamma$ ve $\psi \in \Gamma$'dır.

($\Leftarrow$): $\varphi \in \Gamma$ ve $\psi \in \Gamma$ olsun. Bu durumda Lemma 4.1.2. (ii)'den $\Gamma \vdash \varphi$ ve $\Gamma \vdash \psi$'dir. Bu nedenle, $\Gamma \vdash_S \varphi \wedge \psi$'dir. O halde Lemma 4.1.2. (i)'den $\varphi \wedge \psi \in \Gamma$'dir.

(vi) ($\Rightarrow$): $\varphi \vee \psi \in \Gamma$ olduğunu varsayalım. $\varphi \in \Gamma$ veya $\psi \in \Gamma$ olduğunu göstermeliyiz. $\varphi \notin \Gamma$ ve $\psi \notin \Gamma$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $\neg\varphi \in \Gamma$ ve $\neg\psi \in \Gamma$'dır. Lemma 4.1.2. (iv)'den $\Gamma \vdash_S \neg\varphi$ ve $\Gamma \vdash_S \neg\psi$ Lemma 4.1.2. (i)'den $\Gamma \vdash_S \neg\varphi \wedge \neg\psi$ ise, $\Gamma \vdash_S \neg(\varphi \vee \psi)$ elde edilir. $\Gamma \vdash_S \varphi \vee \psi$ olduğundan Γ'nın tutarsız olduğu çelişkisi elde edilir. O halde $\varphi \in \Gamma$ veya $\psi \in \Gamma$'dır.

($\Leftarrow$): $\varphi \in \Gamma$ veya $\psi \in \Gamma$ olduğunu varsayalım. $\varphi \vee \psi \in \Gamma$ olduğunu göstermeliyiz. $\Gamma \vdash_S \varphi$ ve $\Gamma \vdash_S \psi$ olduğundan $\Gamma \vdash_S \varphi \vee \psi$'dir ve Lemma 4.1.2. (i) ile $\varphi \vee \psi \in \Gamma$'dır.

(vii) ($\Rightarrow$): $\varphi \to \psi \in \Gamma$ olduğunu varsayalım. $\Gamma \vdash_S \neg\varphi$ veya $\Gamma \vdash_S \psi$ olduğunu göstermeliyiz. Bunun için ki $\varphi \in \Gamma$ ve $\psi \notin \Gamma$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $\varphi \in \Gamma$ ve $\neg\psi \in \Gamma$ Lemma 4.1.2. (iv)'den $\Gamma \vdash_S \varphi$ ve $\Gamma \vdash_S \neg\psi$ Lemma 4.1.2. (i)'den $\Gamma \vdash_S \varphi \wedge \neg\psi$ ise, $\Gamma \vdash_S \neg(\neg\varphi \vee \psi)$ elde edilir. $\Gamma \vdash_S \varphi \to \psi$ ile Γ'nın tutarsız olduğu çelişkisi vardır. O halde $\varphi \notin \Gamma$ veya $\psi \in \Gamma$'dır.

($\Leftarrow$): $\varphi \notin \Gamma$ veya $\psi \in \Gamma$ olduğunu varsayalım. $\varphi \to \psi \in \Gamma$ olduğunu göstermeliyiz. $\Gamma \vdash_S \neg\varphi$ veya $\Gamma \vdash_S \psi$ olduğundan $\Gamma \vdash_S \varphi \vee \neg\psi$'dir. Bu nedenle Lemma 4.1.2. (i) ile $\varphi \to \psi \in \Gamma$'dır.

$(viii)$ $\varphi \leftrightarrow \psi \equiv (\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$ olduğundan Lemma 4.1.2. (v) ve Lemma 4.1.2. (vii) ile bu aşikardır. $\boxtimes$

Lemma 4.1.3. Γ maksimal tutarlı bir küme ise, Γ bir teoridir.

İspat. Γ maksimal tutarlı bir küme olsun. Γ'nın bir teori olduğunu göstermeliyiz.

(i) $\Gamma \vdash \varphi$ olsun. Ve $\varphi \notin \Gamma$ olduğunu varsayalım. Γ maksimal tutarlı olduğundan $\Gamma \cup \{\varphi\}$ Lemma 4.1.1. ile tutarsızdır. Bu nedenle $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \bot$ ve sonra türetim teoreminden $\Gamma \vdash \varphi \to \bot$, $\Gamma \vdash \neg\varphi$ elde edilir. Varsayımımızdan $\Gamma \vdash \varphi$ olduğunu biliyoruz, bu Γ'nın bir tutarlı küme olmasıyla çelişir. Bu nedenle $\varphi \in \Gamma$'dır.

(ii) $\varphi \in \Gamma$ olsun. Ve $\Gamma \nvdash \varphi$ olduğunu varsayalım. Γ'nın maksimal tutarlılığından, $\Gamma \vdash \neg\varphi$'dir. Bu durumda Lemma 4.1.2. (i) ile $\neg\varphi \in \Gamma$ ve bu Γ'nın tutarlılığı ile çelişir. Bu nedenle $\Gamma \vdash \varphi$'dir.

$\therefore$ Γ bir teoridir. $\boxtimes$

Lemma 4.1.4. [**Lindenbaum Lemması**] Γ, **S**-tutarlı bir küme olsun. Bu durumda bir maksimal **S**-tutarlı Γ' kümesi vardır öyle ki $\Gamma' \supseteq \Gamma$'dır.

İspat. Γ, **S**-tutarlı küme olsun. $\Gamma' \supseteq \Gamma$ olacak şekilde bir maksimal **S**-tutarlı Γ' kümesinin var olduğunu göstermeliyiz. Dilimizdeki tüm formülleri $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n, \ldots$ şeklinde numaralayalım. n üzerinde tümevarımla $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n, \ldots$ formül kümelerinin monoton dizisini aşağıdaki şekilde tanımlayalım:

$$\Gamma_0 = \Gamma$$

$$\text{Her } n \geq 1 \text{ için } \Gamma_n = \begin{cases} \Gamma_{n-1} \cup \{\psi_n\} & \text{bu küme } \mathbf{S}\text{-tutarlı ise} \\ \Gamma_{n-1} \cup \{\neg\psi_n\} & \text{aksi halde} \end{cases}$$

$$\Gamma' = \bigcup_{n \geq 0} \Gamma_n.$$

İspat üç adımdan oluşacaktır.

İlk olarak n üzerinde tümevarımla her n için Γ_n'nin **S**-tutarlı olduğunu kanıtlayacağız.

$n = 0$ için $\Gamma_0 = \Gamma$'dır ve **S**-tutarlıdır.

Biz n için Γ_n'nin **S**-tutarlı olduğunu varsayalım. Γ_{n+1}'i göz önünde bulunduralım. Eğer $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{\psi_{n+1}\}$ ise, Γ_{n+1} tanım gereği **S**-tutarlıdır. Eğer $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{\neg\psi_{n+1}\}$ ise yine tanım gereği $\Gamma_n \cup \{\psi_{n+1}\}$ **S**-tutarsızdır. O halde $\Gamma_n \cup \{\psi_{n+1}\} \vdash \perp$ ve Türetim teoreminden $\Gamma_n \vdash \psi_{n+1} \rightarrow \perp$'dir. Bu nedenle $\Gamma_n \vdash \neg\psi_{n+1}$...(i)

Γ_{n+1}'in **S**-tutarsız olduğunu varsayalım. O halde $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{\neg\psi_{n+1}\} \vdash \perp$'dir. Türetim teoreminden $\Gamma_n \vdash \neg\psi_{n+1} \rightarrow \perp$ ve $\Gamma_n \vdash \neg\neg\psi_{n+1}$ dolayısıyla $\Gamma_n \vdash \psi_{n+1}$ dir. ...(ii)

(i) ve (ii) ile Γ_n'nin **S**-tutarsız olduğu görülür bu bir çelişkidir. Bu nedenle Γ_{n+1}, **S**-tutarlı ve her n için Γ_n, **S**-tutarlıdır.

İkinci olarak Γ''nün **S**-tutarlı olduğunu ispatlıyoruz. Γ''nün **S**-tutarsız olduğunu varsayalım. Bu durumda $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k \in \Gamma'$ vardır öyle ki $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k \vdash \perp$'dır. Burada $\varphi_1 \in \Gamma_{n_1}$, $\varphi_2 \in \Gamma_{n_2}$, ..., $\varphi_k \in \Gamma_{n_k}$ olacak şekilde $n_1, n_2, \ldots, n_k$'lar vardır çünkü $\Gamma' = \bigcup_{n \geq 0} \Gamma_n$'dir. $m = max\{n_1, n_2, \ldots, n_k\}$ olsun. Bu durumda $\Gamma_{n_1} \subseteq \Gamma_m$, $\Gamma_{n_2} \subseteq \Gamma_m$, ..., $\Gamma_{n_k} \subseteq \Gamma_m$ ve bu nedenle $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k \in \Gamma_m$'dir. Böylece $\Gamma_m \vdash \perp$ ve bu da Γ_m'nin **S**-tutarsız olduğunu söylemeye denktir. Bu bir çelişkidir.

$\therefore$ Γ', **S**-tutarlıdır.

Üçüncü olarak Γ''nün maksimal **S**-tutarlı olduğunu kanıtlıyoruz. φ keyfi bir formül ve $\varphi \notin \Gamma'$ olsun. n, $\varphi = \psi_n$ olacak şekilde bir doğal sayı olsun. $\psi_n \notin \Gamma'$ ve bu nedenle $\psi_n \notin \Gamma_n$'dır. Bundan dolayı $\Gamma_{n-1} \cup \{\psi_n\}$ **S**-tutarsız ve dolayısı ile $\Gamma' \cup \{\psi_n\}$'de **S**-tutarsızdır. O halde Lemma 4.1.1. ile Γ' maksimal **S**-tutarlıdır. ⊠

Lemma 4.1.5. [Doğruluk değer ataması Lemması] Her maksimal **S**-tutarlı Γ kümesi için aşağıdakiler vardır.

(i) $\Gamma \vdash_S \varphi$ gyk $\varphi \in \Gamma$

(ii) $\varphi \in \Gamma$ gyk $\neg\varphi \notin \Gamma$

(iii) $\varphi \wedge \psi \in \Gamma$ gyk $\varphi \in \Gamma$ ve $\psi \in \Gamma$

(iv) $\Box\varphi \in \Gamma$ gyk $\forall\Gamma'(\Gamma\mathcal{R}_S\Gamma' \Rightarrow \varphi \in \Gamma')$.

İspat. Lemma 4.1.2.'de (i),(ii) ve (iii) koşullarını ispatladık.

(iv) $(\Rightarrow)$: $\Box\varphi \in \Gamma$ olduğunu varsayalım. Her Γ' için $\Gamma\mathcal{R}_S\Gamma'$ olsun. Kanonik model üzerinde $\mathcal{R}_S$'in tanımından $\varphi \in \Gamma'$'dir.

$(\Leftarrow)$: $\forall\Gamma'(\Gamma\mathcal{R}_S\Gamma' \Rightarrow \varphi \in \Gamma')$ olduğunu varsayalım. $\Box\varphi \in \Gamma$ olduğunu göstermeliyiz.

$\Box\varphi \notin \Gamma$ olduğunu varsayalım. $\Gamma_1 = \{\psi \mid \Box\psi \in \Gamma\} \cup \{\neg\varphi\}$ olsun. Γ_1'in **S**-tutarlı olduğunu göstermeliyiz. Γ_1, **S**-tutarsız ise $\{\psi \mid \Box\psi \in \Gamma\} \vdash \varphi$'dir. Türetimlerin sonluluğundan $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$'ler vardır öyle ki $\Box\psi_1, \Box\psi_2, \ldots, \Box\psi_n \in \Gamma$ ve $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n \vdash \varphi$'dir. Türetim teoremi ile $\vdash \psi_1 \to (\psi_2 \to (\ldots(\psi_n \to \varphi))\ldots)$'dir ve NR ile $\Box(\psi_1 \to (\psi_2 \to (\ldots(\psi_n \to \varphi))\ldots)) \in \Gamma$'dir. Normallik aksiyomu ve MP ile $\Box(\psi_2 \to (\psi_3 \to (\ldots(\psi_n \to \varphi))\ldots)) \in \Gamma \ldots \Box\varphi \in \Gamma$ elde edilir ki bu bir çelişkidir. Bu nedenle Γ_1, **S**-tutarlıdır. Γ_1' e Lindenbaum lemması uygulayarak $\Gamma' \supseteq \Gamma_1$ olacak şekilde bir Γ' maksimal **S**-tutarlı kümesinin var olduğunu biliyoruz. Bu nedenle $\neg\varphi \in \Gamma'$'dır. Diğer yandan her ψ için $\Box\psi \in \Gamma$ ise $\psi \in \Gamma'$'dır. Bu nedenle $\Gamma\mathcal{R}_S\Gamma'$'dır. Bu şekilde maksimal tutarlı bir Γ' kümesi buluruz öyle ki $\Gamma\mathcal{R}_S\Gamma'$ ve $\neg\varphi \in \Gamma'$'dır. Ancak $\forall\Gamma'(\Gamma\mathcal{R}_S\Gamma' \Rightarrow \varphi \in \Gamma')$ ve bu bir çelişkidir. Bu nedenle $\Box\varphi \in \Gamma$'dır. ⊠

Lemma 4.1.6. [Truth Lemması] $\Gamma \models \varphi$ olması için gerek ve yeter koşul $\varphi \in \Gamma$ olmasıdır.

İspat. İspat φ'nin karmaşıklığı üzerinde tümevarımla yapılır.

$\varphi : p$ biçiminde olsun. Bu durumda Tanım 4.1.3. (iii)'den $\Gamma \models p$ gyk $p \in \Gamma$ dır.

$\varphi : \neg\psi$ biçiminde olsun. Teorem ψ için doğru olsun. Bu durumda $\neg\psi \in \Gamma$ gyk $\psi \notin \Gamma$'dir. Truth lemma ile $\psi \notin \Gamma$ gyk $\Gamma \not\models \psi$'dir. Tümevarım hipotezi ile de $\Gamma \not\models \psi$ gyk $\Gamma \models \neg\psi$'dir.

$\varphi : \psi \wedge \chi$ biçiminde olsun ve teorem ψ ve χ için doğru olsun. $\psi \wedge \chi \in \Gamma$ gyk $\psi \in \Gamma$ ve $\chi \in \Gamma$, Lemma 4.1.5. (iii)'den gyk $\Gamma \models \psi$ ve $\Gamma \models \chi$, tümevarım hipotezinden gyk $\Gamma \models \psi \wedge \chi$'dir.

$\varphi : \Box\psi$ biçiminde olsun ve teorem ψ için doğru olsun.

($\Rightarrow$): $\Gamma \models \Box\psi$ olsun. $\Box\psi \in \Gamma$ olduğunu göstermeliyiz. Γ', $\Gamma\mathcal{R}_S\Gamma'$ olacak şekilde maksimal tutarlı bir küme. Bu nedenle $\Gamma' \models \psi$'dir. Tümevarım hipotezi ile $\psi \in \Gamma'$ gyk $\Gamma' \models \psi$ ve böylece $\psi \in \Gamma'$'dir. O halde $\forall\Gamma'(\Gamma\mathcal{R}_S\Gamma' \Rightarrow \psi \in \Gamma')$ ve Lemma 4.1.5. (iv)'den $\Box\psi \in \Gamma$'dir.

($\Leftarrow$): $\Box\psi \in \Gamma$ olsun. $\Gamma \models \Box\psi$ olduğunu göstermeliyiz. Γ', $\Gamma\mathcal{R}_S\Gamma'$ olacak şekilde bir maksimal tutarlı küme olsun. Lemma 4.1.5. (iv)'den $\psi \in \Gamma'$ ve tümevarım hipotezi ile $\Gamma' \models \psi$ elde edilir. O halde $\forall\Gamma'(\Gamma\mathcal{R}_S\Gamma' \Rightarrow \Gamma' \models \psi)$ ve $\Gamma \models \Box\psi$'dir. ⊠

Teorem 4.1.1. [Kanonik Model Teoremi] Herhangi bir normal modal mantık **S** kanonik modeli $\mathcal{M}_S$' ye göre kuvvetli tamdır.

İspat. Γ'nın **S** modal mantığında tutarlı bir küme olduğunu varsayalım. Lindenbaum lemması ile Γ'yı genişleten bir maksimal tutarlı küme Γ^* vardır. Her $\varphi \in \Gamma^*$ için Truth lemmadan $\mathcal{M}_S, \Gamma^* \models \varphi$'dir. Özel olarak her $\varphi \in \Gamma$ için $\mathcal{M}_S, \Gamma^* \models \varphi$'dir. O halde $\mathcal{M}_S, \Gamma^* \models \Gamma$'dır. ⊠

Teorem 4.1.1.'in ispatı aşağıdaki teoremin var olduğunu gösterir.

Teorem 4.1.2. [S-Tutarlılık Teoremi] Φ, **S**-tutarlı bir formül kümesi ise, bir $\mathcal{F}$ çatısı ve $\mathcal{F}$ çatısında bir doğruluk değer ataması vardır öyle ki her $\varphi \in \Phi$ için $\mathcal{F}$, $w \models \varphi$'dir.

İspat. Φ'nin **S**-tutarlı olduğunu varsayalım. Lindenbaum lemması ile $\Phi \subseteq \Gamma$ olacak şekilde orada bir maksimal **S**-tutarlı Γ kümesi vardır. Her $\varphi \in \Phi$ için $w \models \varphi$ olduğunu göstermeliyiz.

Tanım 2.7. (v)'den $\Phi \models \varphi$ gyk her $\mathcal{M}$ ve $w \in \mathcal{M}$ için her $\psi \in \Phi$ olmak üzere $w \models \psi$ ise $w \models \varphi$'dir. Truth lemması ile her $\varphi \in \Phi$, $\Phi \subseteq \Gamma$ gyk $\Gamma \models \varphi$'dir. Bu durumda, $\exists \mathcal{F}$ öyle ki $\exists w \in W$ ve $\forall \varphi \in \Phi$ için $w \models \varphi$'dir. $\boxtimes$

Tanım 4.1.5. Bir **S** mantığına **S**'nin tüm teoremleri, kanonik çatısında geçerli ise kanoniktir denir.

Teorem 4.1.3. **K** tüm çatılar sınıfına göre kuvvetli tamdır.

İspat. **K**'nın tüm çatılar sınıfına göre kuvvetli tam olduğunu göstermek için $\Phi \models_{Char(\mathbf{K})} \psi$ ise, her $\psi \in \Phi$ için $\Phi \vdash_{\mathbf{K}} \psi$ olduğunu göstermeliyiz.

$\Phi \nvdash_{\mathbf{K}} \psi$ ise, $\Phi \cup \{\neg\psi\}$ **K**-tutarlıdır. $\Phi \cup \{\neg\psi\}$'ye **S**-tutarlılık teoremini uygulayalım. Bu durumda $\exists \mathcal{F}$, $\exists \mathcal{V}$ ve $\exists w \in W$ öyle ki $\forall \varphi \in \Phi \cup \{\neg\psi\}$, $w \models \varphi$'dir. $\neg\psi \in \Phi \cup \{\neg\psi\}$ olduğundan $w \models \neg\psi$'dir. Bu nedenle $w \not\models \psi$ ise, $\Phi \not\models_{Char(\mathbf{K})} \psi$'dir. $\boxtimes$

Teorem 4.1.4. Bir **S** modal mantığının kanonik modeli $\mathcal{M}_S$ olmak üzere

(i) $\mathcal{M}_S \models \mathbf{S}$,

(ii) $\Phi \nvdash_S \psi$ ise, bir $w \in \mathcal{M}_S$ için $w \models \Phi$ ve $w \not\models \psi$'dir.

İspat.

(i) $\Gamma \models^* \varphi$ gyk her $\mathcal{M}$ için $\forall \psi \in \Gamma$ olmak üzere $\mathcal{M} \models \psi$ ise, Tanım 2.7. (v)'den $\mathcal{M} \models \varphi$'dir. Bundan dolayı $\mathbf{S} \models^* \varphi$ gyk her $\models_S$ için $\forall \psi \in \mathbf{S}$ olmak üzere $\mathcal{M}_S \models \psi$ ise, $\mathcal{M}_S \models \varphi$'dir. Bu nedenle $\mathcal{M}_S \models \mathbf{S}$'dir.

(ii) $\Phi \nvdash_S \psi$ ve $w \models \Phi$ olsun. $w \not\models \psi$ olduğunu göstermeliyiz. $\Phi \nvdash \psi$ ise $\Phi \cup \mathbf{S} \nvdash_{\mathbf{K}} \psi$ olduğunu biliyoruz. Şimdi **K** için kuvvetli tamlık teoremini uygularsak; istenen $\mathcal{M}$ modeli olarak $\mathcal{M}_K$'yı alabiliriz. Bu nedenle $\Phi \cup \mathbf{S} \not\models_{\mathbf{Char(K)}} \psi$ olduğunu göstermeliyiz. Bunu göstermek için $\Phi \cup \mathbf{S} \cup \{\neg\psi\}$'nin tutarlı olduğunu göstermek durumundayız. Bu durumda, bir $\mathcal{F}$ ve $w \in \mathcal{W}$ vardır öyle ki her $\varphi \in \Phi \cup \mathbf{S} \cup \{\neg\psi\}$ için $w \models \varphi$'dir. Aynı zamanda $\neg\psi \in \Phi \cup \mathbf{S} \cup \{\neg\psi\}$ gyk $w \models \neg\psi$ gyk $w \not\models \psi$'dir. $\boxtimes$

Teorem 4.1.5. **K4** tüm geçişli çatılar sınıfına göre kuvvetli tamdır.

İspat. **K4**'ün tüm geçişli çatılar sınıfına göre kuvvetli tam olduğunu göstermek için Teorem 2.5.1.'e göre $\langle \mathcal{W}^{\mathbf{K4}}, \mathcal{R}_{\mathbf{K4}} \rangle$'nin geçişli olduğunu göstermek yeterlidir. Bu nedenle $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3 \in \mathcal{W}^{\mathbf{K4}}$ için $\Gamma_1 \mathcal{R}_{\mathbf{K4}} \Gamma_2$ ve $\Gamma_2 \mathcal{R}_{\mathbf{K4}} \Gamma_3$ olduğunu varsayalım. $\Gamma_1 \mathcal{R}_{\mathbf{K4}} \Gamma_3$ olduğunu göstermeliyiz. $\Box\varphi \in \Gamma_1$ olsun. Γ_1 maksimal tutarlı bir küme olduğundan $\Box\varphi \to \Box\Box\varphi$'yi içerir ve Teorem 2.5.1. ve MP ile $\Box\Box\varphi$'yi de içerir. $\Gamma_1 \mathcal{R}_{\mathbf{K4}} \Gamma_2$ olduğundan, $\Box\varphi \in \Gamma_2$'dir. $\mathcal{R}_{\mathbf{K4}}$'ün tanımını uygulayarak $\varphi \in \Gamma_3$ elde edilir. Bu nedenle $\Gamma_1 \mathcal{R}_{\mathbf{K4}} \Gamma_3$'dir. $\boxtimes$

4.2 Sonlu Model Özelliği

Bir modal mantığın tam olup olmadığını araştırma yollarından biri de mantığın sonlu model özelliğine sahip olup olmadığını belirlemektir. Sonlu model özelliğini sağlayan her modal mantık tamdır. Sonlu model özelliği, herhangi bir modelde gerçeklenebilir olan bir modal formülün sonlu bir modelde gerçeklenebilir olduğunu ifade eder[6], [9].

Tanım 4.2.1. Bir modal mantık **S**'nin sonlu model özelliğine sahip olması için gerek ve yeter koşul $\nvdash_{\mathbf{S}} \varphi$ şeklindeki her φ formülü için bir $\mathcal{M} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{R}, \models \rangle$ modelinin var olmasıdır öyle ki

(i) $\mathcal{W}$ sonlu bir kümedir,

(ii) $\mathcal{M} \models \mathbf{S}$'dir ve

(iii) $\mathcal{M} \not\models \varphi$'dir.

Tanım 4.2.2. Bir formüller kümesi Σ'ya her ϕ, ϕ' formülleri için aşağıdakiler sağlanırsa alt formüller altında kapalıdır denir:

$\phi \vee \phi' \in \Sigma$ ise $\phi \in \Sigma$ ve $\phi' \in \Sigma$;

$\neg\phi \in \Sigma$ ise $\phi \in \Sigma$;

$\Diamond\phi \in \Sigma$ ise $\phi \in \Sigma$;

$\Box\phi \in \Sigma$ ise $\phi \in \Sigma$'dır.

Örnek 4.2.1. $\Sigma = \{\varphi, \psi, \neg\varphi, \neg\psi, \varphi \vee \psi, \Box\varphi, \Diamond\psi\}$ formüller kümesi alt formüllerine kapalı bir kümedir.

Tanım 4.2.3. Bir formül kümesi Φ aşağıdaki iki koşulu sağlarsa yeterli olarak adlandırılır:
(i) $\varphi \in \Phi$ ve ψ formülü φ formülünün bir alt formülü ise, $\psi \in \Phi$,
(ii) $\varphi \in \Phi$ ve φ değillenmiş bir formül değilse $\neg\varphi \in \Phi$'dir.

Örnek 4.2.2. $\Phi = \{p, \neg p\}$ formüller kümesi yeterli bir kümedir.

4.3 Sonlu Henkin Yöntemi

Kesim 4.3 ve 4.4'de modal formüllerin gerçeklenebilirliği için sonlu model oluşturmanın iki yöntemi anlatılacaktır. Bunlardan birincisi ilgili mantığı sağlayan sonlu bir modelin seçimine dayanan Henkin yöntemi iken ikincisi filtreleme yöntemidir.

S bir modal mantık ve Φ Tanım 4.2.3.'deki gibi tanımlı bir formül kümesi olsun.

Tanım 4.3.1. Φ sonlu ve yeterli bir küme olmak üzere $\mathcal{M}_S^\Phi$ modeli $\langle\langle \mathcal{W}_S^\Phi, \mathcal{R}_S^\Phi\rangle, \mathcal{V}_S^\Phi\rangle$ modelidir ve aşağıdaki gibi tanımlanır:
(i) $\mathcal{W}_S^\Phi = \{\Gamma \mid \Gamma$, Φ'de maksimal **S**-tutarlıdır$\}$,
(ii) $\mathcal{R}_S^\Phi = \{\langle\Gamma, \Gamma'\rangle \mid \varphi \in \Gamma'$ her φ için öyle ki $\Box\varphi \in \Gamma\}$,
(iii) $\Gamma \models p$ gyk $p \in \Gamma$'dır.

Tanım 4.3.2. Φ ve Γ, $\Gamma \subseteq \Phi$ olacak şekilde iki formül kümesi olsun. Γ, Φ'de maksimal **S**-tutarlıdır gyk Γ, **S**-tutarlıdır ve $\Gamma \subset \Gamma'$ olacak şekilde **S**-tutarlı $\Gamma' \subseteq \Phi$ yoktur.

Lemma 4.3.1. [**S için Lindenbaum lemması**] Φ yeterli bir küme ve $\Gamma \subseteq \Phi$, **S**-tutarlı ise Γ'nın Φ'de **S**-tutarlı maksimal genişlemesi Γ' vardır.

İspat. Φ'nin formüllerinin bir numaralanışı(sonlu da olabilen): $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n, \ldots$ (1). n üzerinde tümevarımla monoton dizi $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n, \ldots$ (2)'yi aşağıdaki gibi tanımlayalım. $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n, \ldots,$ dizisi Φ'de **S**-tutarlıdır.

$\Gamma_0 = \Gamma$

$$\text{Her } n \geq 0 \text{ için }, \Gamma_{n+1} = \begin{cases} \Gamma_n \cup \{\psi_{n+1}\}, & \mathbf{S}\text{-tutarlı ise} \\ \Gamma_n \cup \{\neg\psi_{n+1}\}, & \Gamma_n \cup \{\psi_{n+1}\}\ \mathbf{S}\text{-tutarsız ve} \\ & \psi_{n+1}\text{'nin ilk sembolü } \neg \text{ bağlacını} \\ & \text{içermiyorsa} \\ \Gamma_n \cup \{\psi'_{n+1}\}, & \Gamma_n \cup \{\psi_{n+1}\}\ \mathbf{S}\text{-tutarsız ve} \\ & \psi_{n+1} = \neg\psi'_{n+1} \text{ ise} \end{cases}$$

Eğer (1)'in uzunluğu k ise (2)'nin uzunluğu k+1'dir.

S-tutarlı kümelerin bu dizisi Φ'nin alt kümelerinin bir monoton dizisidir.

Γ', (2)'deki tüm terimlerin birleşimi olarak tanımlayalım. Açık olarak $\Gamma' \subseteq \Phi$ ve $\Gamma \subseteq \Gamma'$'dır. Eğer (2) sonlu ise $\Gamma_0 \subseteq \Gamma_1 \subseteq \cdots \subseteq \Gamma_k$ ise $\Gamma' = \Gamma_k$'dır. Γ', Γ'nın aranan genişlemesidir. ⊠

Lemma 4.3.2. [**S için sonlu doğruluk değer ataması lemması**] Φ sonlu ve yeterli bir formül kümesi ve Γ kümesi Φ'de maksimal **S**-tutarlı ise, her $\varphi \in \Phi$ için aşağıdakiler sağlanır:

(i) $\neg\varphi \in \Phi$ ise, $\neg\varphi \in \Gamma$ gyk $\varphi \notin \Gamma$,

(ii) $\varphi \vee \psi \in \Phi$ ise, $\varphi \vee \psi \in \Gamma$ gyk $\varphi \in \Gamma$ veya $\psi \in \Gamma$,

(iii) $\Box\varphi \in \Phi$ ise, $\Box\varphi \in \Gamma$ gyk $\forall\Gamma'(\Gamma\mathcal{R}_S\Gamma' \Rightarrow \varphi \in \Gamma')$.

İspat. Φ yeterli bir formül kümesi ve Γ, Φ'de maksimal **S**-tutarlı olsun.

(i) $\neg\varphi \in \Phi$ olsun.

($\Rightarrow$): $\neg\varphi \in \Gamma$ olduğunu varsayalım. $\varphi \notin \Gamma$ olduğunu göstermeliyiz. $\varphi \in \Gamma$ olsun. Bu durumda, Lemma 4.1.5. ile $\varphi \wedge \neg\varphi \in \Gamma$'dır. Bu nedenle, $\Gamma \vdash \bot$ ve bu Γ'nın tutarlılığına bir çelişkidir. O halde $\varphi \notin \Gamma$'dır.

($\Leftarrow$): $\varphi \notin \Gamma$ olduğunu varsayalım. $\neg\varphi \in \Gamma$ olduğunu göstermeliyiz. Γ maksimal tutarlı ve $\varphi \notin \Gamma$ olduğundan $\Gamma \cup \{\varphi\}$ tutarsızdır. Bu durumda, $\Gamma, \varphi \vdash \bot$'dır. Türetim teoremi ile $\Gamma \vdash \varphi \to \bot$ ve $\Gamma \vdash (\neg\varphi \vee \bot)$'dır. Böylece $\Gamma \vdash \neg\varphi$ ve Γ bir teori olduğundan $\neg\varphi \in \Gamma$'dır.

(ii) $\varphi \vee \psi \in \Phi$ olsun.

($\Rightarrow$): $\varphi \vee \psi \in \Gamma$ olduğunu varsayalım. $\varphi \in \Gamma$ veya $\psi \in \Gamma$ olduğunu göstermeliyiz. $\varphi \vee \psi \vdash \varphi$ veya $\varphi \vee \psi \vdash \psi$ olduğunu biliyoruz. $\varphi \vee \psi \in \Gamma$ olduğundan $\Gamma \vdash \varphi$ veya $\Gamma \vdash \psi$'dir. Bu nedenle, $\varphi \in \Gamma$ veya $\psi \in \Gamma$'dır, çünkü Γ bir teoridir.

($\Leftarrow$): $\varphi \in \Gamma$ veya $\psi \in \Gamma$ olduğunu varsayalım. $\varphi \vee \psi \in \Gamma$ olduğunu göstermeliyiz. Γ bir teori olduğundan $\Gamma \vdash \varphi$ veya $\Gamma \vdash \psi$ ve bu nedenle $\Gamma \vdash \varphi \vee \psi$'dir. O halde $\varphi \vee \psi \in \Gamma$'dır.

(iii) $\Box\varphi \in \Phi$ olsun.

($\Rightarrow$): $\Box\varphi \in \Gamma$ olduğunu varsayalım. Her Γ' için $\Gamma\mathcal{R}_S\Gamma'$ olsun. Kanonik model üzerinde $\mathcal{R}_S$'in tanımından $\varphi \in \Gamma'$'dir.

($\Leftarrow$): $\forall\Gamma'(\Gamma\mathcal{R}_S\Gamma' \Rightarrow \varphi \in \Gamma')$ olduğunu varsayalım. $\Box\varphi \in \Gamma$ olduğunu göstermeliyiz.

$\Box\varphi \notin \Gamma$ olduğunu varsayalım. $\Gamma_1 = \{\psi \mid \Box\psi \in \Gamma\} \cup \{\neg\varphi\}$ olsun. Γ_1'in **S**-tutarlı olduğunu göstermeliyiz. Γ_1, **S**-tutarsız ise $\{\psi \mid \Box\psi \in \Gamma\} \vdash \varphi$'dir. Türetimlerin sonluluğundan $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$'ler vardır öyle ki $\Box\psi_1, \Box\psi_2, \ldots, \Box\psi_n \in \Gamma$ ve $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n \vdash \varphi$'dir. Türetim teoremi ile $\vdash \psi_1 \to (\psi_2 \to (\ldots(\psi_n \to \varphi))\ldots)$ dir ve NR ile $\Box(\psi_1 \to (\psi_2 \to (\ldots(\psi_n \to \varphi))\ldots)) \in \Gamma$'dir. Normallik aksiyomu ve MP ile $\Box(\psi_2 \to (\psi_3 \to (\ldots(\psi_n \to \varphi))\ldots)) \in \Gamma \ldots \Box\varphi \in \Gamma$ elde edilir ki bu bir çelişkidir. Bu nedenle Γ_1, **S**-tutarlıdır. Γ_1'e Lindenbaum lemması uygulayarak $\Gamma' \supseteq \Gamma_1$ olacak şekilde bir Γ' maksimal **S**-tutarlı kümesinin var olduğunu biliyoruz. Bu nedenle $\neg\varphi \in \Gamma'$'dır. Diğer yandan her ψ için $\Box\psi \in \Gamma$ ise $\psi \in \Gamma'$'dır. Bu nedenle $\Gamma\mathcal{R}_S\Gamma'$'dır. Bu şekilde maksimal tutarlı bir Γ' kümesi buluruz öyle ki $\Gamma\mathcal{R}_S\Gamma'$ ve $\neg\varphi \in \Gamma'$'dır. Ancak $\forall\Gamma'(\Gamma\mathcal{R}_S\Gamma' \Rightarrow \varphi \in \Gamma')$ ve bu bir çelişkidir. Bu nedenle $\Box\varphi \in \Gamma$'dır. $\boxtimes$

Önerme 4.3.1. [**S için sonlu tutarlılık teoremi**] Φ sonlu yeterli bir küme ve Γ, Φ'de **S**-tutarlı ise, bu durumda bir doğruluk değer ataması vardır öyle ki bir sonlu $\mathcal{F}$ ve $w \in \mathcal{W}$ ve her $\varphi \in \Gamma$ için $w \models \varphi$'dir.

İspat. Φ sonlu yeterli bir küme ve Γ, Φ'de **S**-tutarlı olsun. **S** için Lindenbaum lemmasından bir maksimal **S**-tutarlı $\Gamma' \in \Phi$ vardır ve Γ'nın bir genişlemesidir. Lemma 4.1.6. ile $\Gamma' \models \varphi$ gyk $\varphi \in \Gamma'$'dır. Aynı zamanda $\Gamma' \models \varphi$ gyk her $w \in \mathcal{W}$ için $w \models \varphi$'dir. Bu ispatı tamamlar çünkü $\Gamma \subseteq \Gamma'$'dır. $\boxtimes$

Teorem 4.3.1. **K** sonlu model özelliğine sahiptir.

İspat. $\nvdash_K \varphi$ olsun. Bu durumda $\{\neg\varphi\}$ kümesi **K**-tutarlıdır. Φ kümesi $\{\neg\varphi\}$'nin genişlemesi olan en küçük yeterli küme ve $\Gamma = \{\neg\varphi\}$ olsun. Önceki önerme ile istenen sonuç elde edilir çünkü $w \models \neg\varphi$'dir. Bundan dolayı $w \not\models \varphi$'dir. $\boxtimes$

4.4 Filtreleme Yöntemi

Bu kesimde bir modelin evrenini sonlu sayıdaki denklik sınıflarına indirgeme yöntemi olan filtreleme yöntemi anlatılacaktır.

Tanım 4.4.1. $\mathcal{M} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{R}, \mathcal{V} \rangle$ bir model ve Σ bir alt formüle kapalı formüllerin kümesi olsun. $\sim_\Sigma$, $\mathcal{M}$'nin dünyaları üzerinde bir bağıntı olsun ve şu şekilde tanımlansın: $w \sim_\Sigma v$ gyk Σ'daki her ϕ için: $(\mathcal{M}, w \models \phi$ gyk $\mathcal{M}, v \models \phi)$.

$\sim_\Sigma$ bir denklik bağıntısıdır. $|w|_\Sigma$ vasıtasıyla $\sim_\Sigma$'ya göre $\mathcal{M}$'nin bir w dünyasının denklik sınıfını belirleriz , bunu $|w|$ şeklinde gösteririz.

$\mathcal{W}_\Sigma = \{|w|_\Sigma : w \in \mathcal{W}\}$ olsun. $\mathcal{M}^f_\Sigma$, $\langle \mathcal{W}^f, \mathcal{R}^f, \mathcal{V}^f \rangle$ biçiminde bir modeldir öyle ki aşağıdakiler sağlanır:

(i) $\mathcal{W}^f = \mathcal{W}_\Sigma$'dir,

(ii) $w\mathcal{R}v$ ise $|w|\mathcal{R}^f|v|$'dir,

(iii) $|w|\mathcal{R}^f|v|$ ise, her $\Diamond\phi \in \Sigma$ olmak üzere $\mathcal{M}$, $v \models \phi$ ise $\mathcal{M}$, $w \models \Diamond\phi$'dir.

(iv) $\mathcal{V}^f$ aşağıdaki gibi tanımlanır; Σ'daki her önerme değişkeni p için $w \models p$ gyk $|w| \in V^f(p)$'dir.

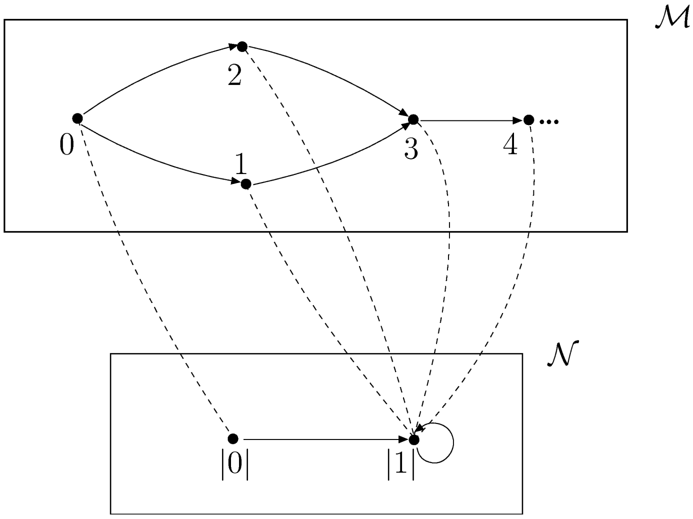
Burada (**iii**) koşulu denk olan (**iii′**) tarafından değiştirilebilirdir.

(**iii′**) $|w|\mathcal{R}^f|v|$ ise, her $\Box\phi \in \Sigma$ olmak üzere $\mathcal{M}$, $w \models \Box\phi$ ise $\mathcal{M}$, $v \models \phi$'dir.

Yukarıdaki gibi tanımlanan $\mathcal{M}^f_\Sigma$, Σ aracılığıyla $\mathcal{M}$'nin bir filtrelemesi olarak adlandırılır ve $\mathcal{M}^f$ ile gösterilir.

Örnek 4.4.1. $\mathcal{M} = \langle \mathbb{N}, R, \mathcal{V} \rangle$ modeli olsun. Burada $\mathcal{R} = \{(0,1),(0,2),(1,3)\} \cup \{(n, n+1) \mid n \geqslant 2\}$, ve $\mathcal{V}(p) = \{\mathbb{N} \setminus \{0\}\}$ ve $\mathcal{V}(q) = \{2\}$'dir. $\Sigma = \{\Diamond p, p\}$ olsun.

Σ alt formüle kapalı bir kümedir. $\mathcal{N}$ modeli $\mathcal{N} = \langle \{\mid 0 \mid, \mid 1 \mid\}, \{(\mid 0 \mid, \mid 1 \mid), (\mid 1 \mid, \mid 1 \mid)\}, \mathcal{V}' \rangle$ ve $\mathcal{V}'(p) = \{\mid 1 \mid\}$ olarak tanımlansın. $\mathcal{N}$ modeli $\mathcal{M}$ modelinin Σ aracılığıyla bir filtrelemesidir.



Şekil 4.1: $\mathcal{N}$ modeli, $\mathcal{M}$ modelinin bir filtrelemesidir.

Teorem 4.4.1. [**Filtreleme Teoremi**] $\mathcal{M}^f(=\langle \mathcal{W}_\Sigma, \mathcal{R}^f, \mathcal{V}^f\rangle)$ modeli bir alt formüle kapalı Σ kümesi aracılığı ile $\mathcal{M}$ modelinin bir filtrelemesi olsun. Bu durumda $\phi \in \Sigma$ herhangi bir formül ve $w \in \mathcal{M}$ herhangi bir dünya olmak üzere $\mathcal{M}$, $w \models \phi$ olması için gyk $\mathcal{M}^f, |w| \models \phi$ olmasıdır.

İspat. İspat ϕ'nin karmaşıklığı üzerinde tümevarımla yapılır.

$\phi : p$ biçiminde olsun. Bu durumda Tanım 4.4.1. **(iv)**'den $w \models p$ gyk $|w| \in V^f(p)$.

$\phi : \neg\varphi$ biçiminde ve teorem φ için doğru olsun. Bu durumda $\mathcal{M}, w \models \neg\varphi$ gyk $\mathcal{M}, w \not\models \varphi$ gyk $\mathcal{M}^f, |w| \not\models \varphi$, tümevarım hipotezinden gyk $\mathcal{M}^f, |w| \models \neg\varphi$'dir.

$\phi : \varphi \vee \psi$ biçiminde ve teorem φ ve ψ için doğru olsun. $\mathcal{M}, w \models \varphi \vee \psi$ gyk $\mathcal{M}, w \models \varphi$ veya $\mathcal{M}, w \models \psi$ gyk $\mathcal{M}^f, |w| \models \varphi$ veya $\mathcal{M}^f, |w| \models \psi$, tümevarım hipotezinden gyk $\mathcal{M}^f, |w| \models \varphi \vee \psi$'dir.

$\phi : \Box\varphi$ biçiminde ve teorem φ için doğru olsun.

($\Rightarrow$): $\mathcal{M}, w \models \Box\varphi$ olsun. $\mathcal{M}^f, |w| \models \Box\varphi$ olduğunu göstermek istiyoruz.

$\mathcal{M}, w \models \Box\varphi$ gyk $\forall v \in W$, $w\mathcal{R}v$ öyle ki tümevarım hipotezi ile $\mathcal{M}, v \models \varphi$ gyk $\mathcal{M}^f, |v| \models \varphi$. Tanım 4.4.1. **(ii)**'den $\forall v \in W$ ve $|v| \in W^f$ olmak üzere $w\mathcal{R}v$ ise $|w|\mathcal{R}^f|v|$ olduğunu biliyoruz. Bundan dolayı, $\mathcal{M}^f, |w| \models \Box\varphi$'dir.

($\Leftarrow$): $\mathcal{M}^f, |w| \models \Box\varphi$ olsun. $\mathcal{M}, w \models \Box\varphi$ olduğunu göstermek istiyoruz. Karşıt ters ile ispatlıyacağız. O halde $\mathcal{M}, w \not\models \Box\varphi$ olsun. $\mathcal{M}^f, |w| \not\models \Box\varphi$ olduğunu göstereceğiz.

$\mathcal{M}, w \not\models \Box\varphi$ gyk $\exists v \in W$, $w\mathcal{R}v$ öyle ki tümevarım hipotezi ile $\mathcal{M}, v \not\models \varphi$ gyk $\mathcal{M}^f, |v| \not\models \varphi$'dir. $\exists v \in W$ ve $|v| \in W^f$ olmak üzere Tanım 4.4.1. **(ii)** ile $w\mathcal{R}v$ ise $|w|\mathcal{R}^f|v|$'dir. Bundan dolayı, $\mathcal{M}^f, |w| \not\models \Box\varphi$'dir.

$\phi : \Diamond\varphi$ biçiminde olsun teorem φ için doğru olsun.

($\Rightarrow$): $\mathcal{M}, w \models \Diamond\varphi$ olsun. $\mathcal{M}^f, |w| \models \Diamond\varphi$ olduğunu göstermek istiyoruz. Bu durumda, $\exists v \in \mathcal{M}$: $w\mathcal{R}v$, $\mathcal{M}, v \models \varphi$'dir. Tümevarım hipotezi ile $\mathcal{M}^f, |v| \models \varphi$ dir. Tanım 4.4.1. **(ii)** ile $w\mathcal{R}v$ ise $|w|\mathcal{R}^f|v|$ olduğunu biliyoruz. Bundan dolayı, $\mathcal{M}^f, |w| \models \Diamond\varphi$'dir.

($\Leftarrow$): $\mathcal{M}^f, |w| \models \Diamond\varphi$ olsun. $\mathcal{M}, w \models \Diamond\varphi$ olduğunu göstermek istiyoruz. Bu durumda, $\exists |v| \in \mathcal{M}^f$ için $|w|\mathcal{R}^f|v|$ ve $\mathcal{M}^f, |v| \models \varphi$'dir. Çünkü $\varphi \in \Sigma$, tümevarım hipotezinden $\mathcal{M}, v \models \varphi$'dir. O halde tanım 4.4.1. **(iii)**'den, $\mathcal{M}, w \models \Diamond\varphi$'dir. ☒

Lemma 4.4.1. $f(x)\mathcal{R}^s f(y) \Leftrightarrow \exists x'\exists y'(f(x) = f(x'), f(y) = f(y'), x'\mathcal{R}y')$ olsun. Bu durumda $\mathcal{M}^s$, $\mathcal{M}$'in Σ vasıtasıyla bir filtrelemesidir. $\mathcal{M}^s$, en küçük filtreleme olarak adlandırılır.

İspat. $\mathcal{R}^s$ bağıntısının filtreleme tanımının **(ii)** ve **(iii)** koşullarını sağladığını göstermeliyiz.

(ii) filtrelemenin tanımından aşikardır.

(iii) $f(x)\mathcal{R}^s f(y)$ olsun. $\mathcal{R}^s$'in tanımından x' ve y' alırız öyle ki $f(x) = f(x')$, $f(y) = f(y')$, $x'\mathcal{R}y'$'dir. $\Box\varphi \in \Sigma$ olsun. $\mathcal{M}, x \models \Box\varphi$ olsun. Ancak $f(x) = f(x')$ bu durumda $\mathcal{M}, x \models \Box\varphi \Leftrightarrow \mathcal{M}, x' \models \Box\varphi$. Bu nedenle $\mathcal{M}, x' \models \Box\varphi$. Ancak $x'\mathcal{R}y'$ bu durumda $\mathcal{M}, y' \models \varphi$. Ancak $f(y) = f(y')$ bu durumda $\mathcal{M}, y' \models \varphi \Leftrightarrow \mathcal{M}, y \models \varphi$'dir. ☒

Lemma 4.4.2. $|x|\mathcal{R}^g|y| \Leftrightarrow (\forall\Box\varphi \in \Sigma)(\mathcal{M}, x \models \Box\varphi \Rightarrow \mathcal{M}, y \models \varphi)$ olsun. Bu durumda $\mathcal{M}^g$, $\mathcal{M}$'in Σ vasıtasıyla bir filtrelemesidir. $\mathcal{M}^g$, en büyük filtreleme olarak adlandırılır.

İspat. $\mathcal{R}^g$ bağıntısının tanımı filtrelemenin tanımından koşul **(ii)** ve **(iii)**'yi sağladığını göstermeliyiz.

(ii) $x\mathcal{R}y$ olsun. $\Box\varphi \in \Sigma$ ve $\mathcal{M}, x \models \Box\varphi$ olsun. Bundan dolayı $\mathcal{M}, y \models \varphi$'dir. Bu nedenle $(\forall\Box\varphi \in \Sigma)(\mathcal{M}, x \models \Box\varphi \Rightarrow \mathcal{M}, y \models \varphi)$'dir. $\mathcal{R}^g$'nin tanımından $|x|\mathcal{R}^g|y|$ olur.

(iii) filtrelemenin tanımından aşikardır. $\boxtimes$

Önerme 4.4.1.

1.$\mathcal{R}^s \subseteq \mathcal{R}^g$'dir.

2.Herhangi bir $\mathcal{R}^f$ öyle ki $\mathcal{R}^s \subseteq \mathcal{R}^f \subseteq \mathcal{R}^g$ aynı zamanda Σ vasıtasıyla $\mathcal{M}$'in bir filtrelemesidir.

3.$\mathcal{R}^f$ bir filtreleme ise $\mathcal{R}^s \subseteq \mathcal{R}^f \subseteq \mathcal{R}^g$'dir.

İspat. 1. $f(x)\mathcal{R}^s f(y)$ olsun. O halde lemma 4.4.1.'den $(\forall\Diamond\varphi \in \Sigma)(\mathcal{M}, y \models \varphi \Rightarrow \mathcal{M}, x \models \Diamond\varphi)$'dir. Ancak $(\forall\Diamond\varphi \in \Sigma)(\mathcal{M}, y \models \varphi \Rightarrow \mathcal{M}, x \models \Diamond\varphi)$ doğrudur ise $f(x)\mathcal{R}^g f(y)$, çünkü $f(x)\mathcal{R}^g f(y)$ gyk $\mathcal{R}^g$'nin tanımından $(\forall\Diamond\varphi \in \Sigma)(\mathcal{M}, y \models \varphi \Rightarrow \mathcal{M}, x \models \Diamond\varphi)$'dir. Bu nedenle $\mathcal{R}^s \subseteq \mathcal{R}^g$'dir.

2. $\mathcal{R}^s \subseteq \mathcal{R}^f \subseteq \mathcal{R}^g$ olsun. $\mathcal{R}^f$'in bir filtreleme olduğunu göstermeliyiz.

(ii)'nin doğrulaması: $x\mathcal{R}y$ ve $f(x)\mathcal{R}^s f(y)$ olsun. $f(x)\mathcal{R}^f f(y)$ olduğunu göstermeliyiz. $f(x) = f(x)$, $f(y) = f(y)$, $x\mathcal{R}y$, bu durumda $f(x)\mathcal{R}^f f(y)$'dir.

(iii)'nin doğrulaması: $f(x)\mathcal{R}^f f(y)$ olsun. Bu durumda $f(x)\mathcal{R}^g f(y)$'dir. $\mathcal{R}^g$'nin tanımından ; $(\forall\Diamond\varphi \in \Sigma)(\mathcal{M}, y \models \varphi \Rightarrow \mathcal{M}, x \models \Diamond\varphi)$'dir. Bu nedenle $\mathcal{R}^f$ bir filtrelemedir.

3. $\mathcal{R}^f$ bir filtreleme olsun. $f(x)\mathcal{R}^f f(y)$ olsun. Bu durumda $\mathcal{R}^s$'in tanımından, $f(x') = f(x)$, $f(y') = f(y)$, $x'\mathcal{R}y'$'dir. $\mathcal{R}^f$ bir filtrelemedir, bu durumda filtreleme tanımı **(ii)**'den $f(x')\mathcal{R}^f f(y')$'dir. Bu nedenle $f(x)\mathcal{R}^f f(y)$'dir. O halde $\mathcal{R}^s \subseteq \mathcal{R}^f$ dir.

$f(x)\mathcal{R}^f f(y)$ olsun. $\mathcal{R}^f$ bir filtreleme olduğundan, filtreleme tanımı **(iii)**'den, $(\forall\Diamond\varphi \in \Sigma)(\mathcal{M}, y \models \varphi \Rightarrow \mathcal{M}, x \models \Diamond\varphi) \cdots (*)$ yazabiliriz. $(*)$'dan ve $\mathcal{R}^g$'nin tanımından, $f(x)\mathcal{R}^g f(y)$'dir. Bu nedenle $\mathcal{R}^f \subseteq \mathcal{R}^g$'dir. $\boxtimes$

Teorem 4.4.2. $\mathcal{M}$ bir model, Σ alt formüllere kapalı formüller kümesi ve W_Σ, $\mathcal{M}$'de $\sim_\Sigma$ vasıtasıyla oluşturulan denklik sınıflarının bir kümesi olsun. $\mathcal{R}^t$, W_Σ'da ikili bir bağıntı olsun ve şu şekilde tanımlansın:

$|w|\mathcal{R}^t|v|$ gyk her ϕ için $\Diamond\phi \in \Sigma$ ve $\mathcal{M}, v \models \phi \vee \Diamond\phi$ ise $\mathcal{M}, w \models \Diamond\phi$'dir.

$\mathcal{R}$ bağıntısı geçişli ise $\langle W_\Sigma, \mathcal{R}^t, V^f\rangle$ bir filtrelemedir ve $\mathcal{R}^t$ bağıntısı geçişlidir.

İspat. $\mathcal{R}$ geçişli olsun. $\langle W_\Sigma, \mathcal{R}^t, V^f\rangle$ bir filtreleme ve $\mathcal{R}^t$ bağıntısının geçişli olduğunu göstermeliyiz.

$|w|\mathcal{R}^t|v| \Leftrightarrow (\forall \Diamond\phi \in \Sigma)(\mathcal{M}, v \models \phi \vee \Diamond\phi \Rightarrow \mathcal{M}, w \models \Diamond\phi)$'dir.

(ii) $w\mathcal{R}v$ ise $|w|\mathcal{R}^t|v|$'dir. $w\mathcal{R}v$ olsun. $\Diamond\phi \in \Sigma$ ve $\mathcal{M}, v \models \phi \vee \Diamond\phi$ olsun. $\mathcal{M}, w \not\models \Diamond\phi$ olsun. Bundan dolayı $\mathcal{M}, w \models \Box\neg\phi$'dir. Bu nedenle $\mathcal{M}, v \models \neg\phi \Rightarrow \mathcal{M}, v \models \Diamond\phi$'dir. u bir dünya olsun öyle ki $v\mathcal{R}u$, $\mathcal{M}, u \models \phi$. Biz biliyoruz ki $\mathcal{R}$ geçişlidir. Bu nedenle $w\mathcal{R}u$, $\mathcal{M}, w \models \Diamond\phi$'dir ve bu bir çelişkidir.

(iii) $|w|\mathcal{R}^t|v| \Rightarrow (\forall \Diamond\phi \in \Sigma)(\mathcal{M}, v \models \phi \Rightarrow \mathcal{M}, w \models \Diamond\phi)$ olduğunu göstermeliyiz. $|w|\mathcal{R}^t|v|$ olsun. $\Diamond\phi \in \Sigma$ ve $\mathcal{M}, v \models \phi$ olsun. $\mathcal{M}, v \models \phi \vee \Diamond\phi$'dir. Bu durumda $\mathcal{R}^t$'nin tanımından $\mathcal{M}, w \models \Diamond\phi$'dir. Bu nedenle $\langle W_\Sigma, \mathcal{R}^t, V^f \rangle$ bir filtrelemedir.

(*) $\mathcal{R}^t$ bağıntısının geçişli olduğunu gösterelim: $|w|\mathcal{R}^t|v|$ ve $|v|\mathcal{R}^t|u|$ ise $|w|\mathcal{R}^t|u|$ dır. $|w|\mathcal{R}^t|v|$ ve $|v|\mathcal{R}^t|u|$ olsun. $|w|\mathcal{R}^t|u|$ olduğunu göstermeliyiz. Her $\Diamond\phi \in \Sigma$ için, $\mathcal{M}, u \models \phi \vee \Diamond\phi$ olsun. $\mathcal{M}, w \models \Diamond\phi$ olduğunu göstermeliyiz. $|v|\mathcal{R}^t|u|$ ve $\mathcal{M}, u \models \phi \vee \Diamond\phi$ ise $\mathcal{M}, v \models \Diamond\phi$'dir. Bundan dolayı $\mathcal{M}, v \models \phi \vee \Diamond\phi$'dir. $|w|\mathcal{R}^t|v|$ ve $\mathcal{M}, v \models \phi \vee \Diamond\phi$ ise $\mathcal{M}, w \models \Diamond\phi$'dir. Bu nedenle $\mathcal{R}^t$ bağıntısı geçişlidir. $\boxtimes$

Teorem 4.4.3. **K4** sonlu model özelliğine sahiptir.

İspat. $\nvdash_{K4} \varphi$ olsun. O halde $\{\neg\varphi\}$ kümesi **K4**-tutarlıdır. Φ kümesi en küçük yeterli küme olsun öyle ki $\{\neg\varphi\} \in \Phi$'dir. Lindenbaum lemması ile bir $\Gamma \supseteq \{\neg\varphi\}$ vardır ve Γ maksimal **K4**-tutarlıdır. O halde Φ vasıtasıyla kanonik modelin filtrelemesi $\mathcal{R}^t$'yi alalım. Bu durumda, Teorem 4.4.1. ile $\neg\varphi \in \Phi$ için, $\mathcal{M}_{K4}, \Gamma \models \neg\varphi$ gyk $\mathcal{M}^t_{K4}, |\Gamma| \models \neg\varphi$'dir. O halde $\mathcal{M}^t_{K4}, |\Gamma| \not\models \varphi$'dir. $\boxtimes$

Bölüm 5

Yeni Sonuçlar

Bu bölümde **K** ve **K4** modal mantıklarının iki farklı yöntemle elde edilen modellerinin izomorf olduğu kanıtlanmaktadır.

5.1 K Modal Mantığı için Sonuçlar

Tanım 5.1. Kanonik model $\mathcal{M}_K$, $\langle\langle\mathcal{W}_K, \mathcal{R}_K\rangle, \models\rangle$ modelidir ve aşağıdaki gibi tanımlanır:
(i) $\mathcal{W}_K = \{\Gamma' \mid \Gamma'$ maksimal **K**-tutarlıdır$\}$,
(ii) $\mathcal{R}_K = \{\langle\Gamma'_1, \Gamma'_2\rangle \mid \varphi \in \Gamma'_2$ her φ için öyle ki $\Box\varphi \in \Gamma'_1$'dır$\}$,
(iii) $\Gamma' \models p$ gyk $p \in \Gamma'$'dır.

Tanım 5.2. $\mathcal{M}^K_{H_{fin}}$ modeli $\langle\langle\mathcal{W}^\Phi_K, \mathcal{R}^\Phi_K\rangle, \models\rangle$ modelidir ve aşağıdaki gibi tanımlanır:
(i) $\mathcal{W}^\Phi_K = \{\Gamma \mid \Gamma$, Φ'de maksimal **K**-tutarlıdır$\}$,
(ii) $\mathcal{R}^\Phi_K = \{\langle\Gamma_1, \Gamma_2\rangle \mid (\forall\Box\varphi \in \Phi)(\Box\varphi \in \Gamma_1 \Rightarrow \varphi \in \Gamma_2)\}$,
(iii) $\Gamma \models p$ gyk $p \in \Gamma$'dır.

Tanım 5.3. $\mathcal{M}^g_K = \langle\mathcal{W}^g_K, \mathcal{R}^g_K, \models\rangle$ modeli Φ'ye göre kanonik model $\mathcal{M}_K$'nın en büyük filtrelemesidir ve aşağıdaki gibi tanımlanır: $\mathcal{W}_\Phi = \{|\Gamma'|_\Phi : \Gamma' \in \mathcal{W}_K\}$'dir.

(i) $\mathcal{W}^g_K = \mathcal{W}_\Phi$'dir.

(ii) $\Gamma'_1\mathcal{R}_K\Gamma'_2$ ise $|\Gamma'_1|\mathcal{R}^g_K|\Gamma'_2|$'dir.

(iii) $|\Gamma'_1|\mathcal{R}^g_K|\Gamma'_2| \Leftrightarrow (\forall\Box\varphi \in \Phi)(\mathcal{M}_K, \Gamma'_1 \models \Box\varphi \Rightarrow \mathcal{M}_K, \Gamma'_2 \models \varphi)$.

(iv) Φ'deki her önerme değişkeni p için $\Gamma' \models p$ gyk $|\Gamma'| \in V^g(p)$'dir.

Teorem 5.1. Φ, sonlu ve yeterli bir küme olsun. $\mathcal{M}_K$, **K** Modal Mantığının kanonik modeli, $\mathcal{M}^K_{H_{fin}}$ ve $\mathcal{M}^g_K$ modelleri $\mathcal{M}_K$'nın Φ kümesine göre sırasıyla sonlu Henkin yöntemiyle ve en büyük filtrelemesi ile elde edilen modelleri olsun. Bu durumda $\mathcal{M}^K_{H_{fin}} \cong \mathcal{M}^g_K$'dir.

İspat. $\mathcal{M}^K_{H_{fin}}$ ile $\mathcal{M}^g_K$ modelinin izomorf olduklarını yani $\mathcal{M}^K_{H_{fin}}$ ile $\mathcal{M}^g_K$ arasında bijektif kuvvetli bir homomorfizmanın olduğunu göstermemiz gerekir.

$g : \mathcal{M}^K_{H_{fin}} \to \mathcal{M}^g_K$ fonksiyonu $g : \Gamma \mapsto |\Gamma'|_\Phi$ biçiminde tanımlansın. Bu şekilde tanımlı g'nin bir fonksiyon olduğunu göstermeliyiz. Bunun için aşağıdaki lemmalara ihtiyaç vardır. Burada Γ', $\mathcal{W}_K$'nın elemanıdır öyle ki $\Gamma \subseteq \Gamma'$'dir.

Lemma 5.1.1. Γ, Φ'de maksimal **K**-tutarlı küme olsun. Bu durumda bir Δ kümesi vardır öyle ki $\Gamma \subseteq \Delta$ ve Δ maksimal **K**-tutarlı kümedir.

İspat. Γ, Φ'de maksimal **K**-tutarlı küme olsun. Bu nedenle açıktır ki Γ, **K**-tutarlı kümedir. Lindenbaum lemmasından bir Δ kümesi vardır öyle ki $\Gamma \subseteq \Delta$ ve Δ maksimal **K**-tutarlı kümedir. $\boxtimes$

Lemma 5.1.2. Γ, Φ'de maksimal **K**-tutarlı küme olsun. Δ_1 ve Δ_2 kümeleri öyle ki $\Gamma \subseteq \Delta_1$, $\Gamma \subseteq \Delta_2$, Δ_1 ve Δ_2 maksimal **K**-tutarlı kümeler olsun. Bu durumda $\Delta_1 \sim_\Phi \Delta_2$'dir.

İspat. Γ, Φ'de maksimal **K**-tutarlı küme olsun. $\Gamma \subseteq \Delta_1$, $\Gamma \subseteq \Delta_2$, Δ_1 ve Δ_2 maksimal **K**-tutarlı kümeler olsunlar. $\Delta_1 \sim_\Phi \Delta_2$ olduğunu ispatlamalıyız. Yani $(\forall\varphi \in \Phi)(\mathcal{W}_K, \Delta_1 \models \varphi$ gyk $\mathcal{W}_K, \Delta_2 \models \varphi)$ olmalıdır. $\mathcal{W}_K, \Delta_1 \models \varphi$ gyk $\varphi \in \Delta_1$ olsun. Varsayalım ki $\mathcal{W}_K, \Delta_2 \not\models \varphi$ gyk $\varphi \notin \Delta_2$ gyk $\neg\varphi \in \Delta_2$ olsun.

1. $\neg\varphi \in \Phi \Rightarrow \varphi \in \Delta_1$ gyk $\neg\varphi \notin \Delta_1 \Rightarrow \neg\varphi \notin \Gamma \Rightarrow \varphi \in \Gamma$'dır($\Gamma$, Φ'de maksimal **K**-tutarlı küme ve $\varphi, \neg\varphi \in \Phi$ olsun. Bu durumda $\varphi \in \Gamma \Leftrightarrow \neg\varphi \notin \Gamma$'dır).

2. $\neg\varphi \notin \Phi$, $\varphi \in \Phi$, Φ yeterli bir kümedir. Bu durumda $\varphi = \neg\varphi_1$'dir. $\neg\varphi_1 \in \Delta_1$ gyk $\varphi_1 \notin \Delta_1$ gyk $\varphi_1 \notin \Gamma$ gyk $\varphi = \neg\varphi_1 \in \Gamma$'dır($\varphi_1 \in \Phi$, $\neg\varphi_1 \in \Phi$). $\varphi \in \Delta_2$ ve $\neg\varphi \in \Delta_2$'dir. Bu bir çelişkidir. Bu nedenle $\varphi \in \Delta_2$ gyk $\mathcal{M}_K, \Delta_2 \models \varphi$'dir.

Bu nedenle $\Delta_1 \sim_\Phi \Delta_2$'dir. $\boxtimes$

O halde lemma 5.1.1. ve lemma 5.1.2.'den $\Gamma \rightsquigarrow \Delta \rightsquigarrow |\Delta|_\Phi$ yazılabilir ve $\Gamma \mapsto |\Delta|_\Phi$'dir. Bu nedenle g, $\mathcal{M}^K_{H_{fin}}$'den $\mathcal{M}^g_K$'ye bir fonksiyondur.

Şimdi $g : \mathcal{M}^{K}_{H_{fin}} \to \mathcal{M}^{g}_{K}$ fonksiyonunun bir kuvvetli homomorfizma olduğunu gösterelim. Bunun için kuvvetli homomorfizma tanımının (i) ve (ii) şıklarını gerçekleyelim.

(i) Her bir önerme değişkeni p ve $\Gamma \in \mathcal{M}^{K}_{H_{fin}}$ kümesi için, $\Gamma \in \mathcal{V}^{\Phi}_{K}(p)$ gyk $g(\Gamma) \in V^{g}(p)$ olduğunu göstermeliyiz. Burada iki durum söz konusudur:

- Durum 1: $p \in \Phi$.
- Durum 2: $p \notin \Phi$.

Durum 1: $p \in \Phi$.

($\Rightarrow$): p bir önerme değişkeni ve Γ, $\mathcal{M}^{K}_{H_{fin}}$'den bir eleman olsun. $\Gamma \in \mathcal{V}^{\Phi}_{K}(p)$ olsun. $g(\Gamma) \in V^{g}(p)$ olduğunu göstermeliyiz. $\Gamma \in \mathcal{V}^{\Phi}_{K}(p)$ gyk $\mathcal{V}^{\Phi}_{K}(p)$'nin tanımından $\Gamma \models p$ yazabiliriz gyk $p \in \Gamma'$ $(\Gamma \subseteq \Gamma')$ gyk kanonik model tanımı (iii)'den $\Gamma' \models p$ gyk filtreleme tanımı **(iv)**'den $g(\Gamma) = |\Gamma'| \in V^{g}(p)$'dir.

($\Leftarrow$): p bir önerme değişkeni ve Γ, $\mathcal{M}^{K}_{H_{fin}}$'den bir eleman olsun. $|\Gamma'| \in V^{g}(p)$ olsun. $\Gamma \in \mathcal{V}^{\Phi}_{K}(p)$ olduğunu göstermeliyiz. $|\Gamma'| \in V^{g}(p)$ gyk filtreleme tanımı **(iv)**'den Φ'deki her önerme değişkeni p için $\Gamma' \models p$ gyk $p \in \Gamma'$ gyk $p \in \Gamma$ (Γ, Φ'de maximal **K**-tutarlıdır) gyk sonlu Henkin yöntemi tanımı (iii)'den $\Gamma \models p$ gyk $\mathcal{V}^{\Phi}_{K}(p)$'nın tanımından $\Gamma \in \mathcal{V}^{\Phi}_{K}(p)$'dir.

Durum 2: $p \notin \Phi$.

Γ, Φ'de maksimal **K**-tutarlı küme, $\Gamma \subseteq \Phi$ ve $p \notin \Phi$ ise $p \notin \Gamma$ olsun. Bu durumda $\Gamma \notin \mathcal{V}^{\Phi}_{K}(p)$'dir. $p \notin \Phi$ ise $V^{g}(p) = \emptyset$'dir. Filtreleme tanımı **(iv)** ile $g(\Gamma) \notin V^{g}(p)$'dir. O halde $\Gamma \in \mathcal{V}^{\Phi}_{K}(p)$ gyk $g(\Gamma) \in V^{g}(p)$'dir.

(ii) $\mathcal{M}^{K}_{H_{fin}}$ modelinden alınan her Γ_1 ve Γ_2 elemanı için $\Gamma_1 \mathcal{R}^{\Phi}_{K} \Gamma_2$ gyk $g(\Gamma_1)\mathcal{R}^{g}_{K} g(\Gamma_2)$ olduğunu göstermeliyiz.

($\Rightarrow$): $\Gamma_1, \Gamma_2 \in \mathcal{M}^{K}_{H_{fin}}$ ve $\Gamma_1 \mathcal{R}^{\Phi}_{K} \Gamma_2$ olsun. Burada Γ_1 ve Γ_2, Φ'de maksimal **K**-tutarlı kümelerdir. $g(\Gamma_1)\mathcal{R}^{g}_{K} g(\Gamma_2)$ olduğunu göstermeliyiz. Aşağıdaki iki denklikten ötürü $\mathcal{M}_K, \Gamma'_1 \models \Box\varphi$ ise $\mathcal{M}_K, \Gamma'_2 \models \varphi$ olduğunu göstermeliyiz.

$|\Gamma'_1| \mathcal{R}^{g}_{K} |\Gamma'_2| \Leftrightarrow (\forall \Box\varphi \in \Phi)(\mathcal{M}_K, \Gamma'_1 \models \Box\varphi \Rightarrow \mathcal{M}_K, \Gamma'_2 \models \varphi)$. $\Gamma_1 \mathcal{R}^{\Phi}_{K} \Gamma_2$ gyk $(\forall \Box\varphi \in \Phi)(\Box\varphi \in \Gamma_1 \Rightarrow \varphi \in \Gamma_2)$.

$\Gamma_1 \subseteq \Gamma'_1$ olduğundan $\Gamma_1 = \Gamma'_1 \cap \Phi$ ve $\Gamma_2 \subseteq \Gamma'_2$ olduğundan $\Gamma_2 = \Gamma'_2 \cap \Phi$'dir. Γ'_1 ve Γ'_2 maksimal **K**-tutarlı kümeler olduğundan sırasıyla $(\forall \psi \in \Phi)(\psi \in \Gamma_1 \Leftrightarrow \psi \in \Gamma'_1)$

ve $(\forall\psi \in \Phi)(\psi \in \Gamma_2 \Leftrightarrow \psi \in \Gamma'_2)$ yazılabilir. Bu durumda aşağıdaki vardır. $(\forall\Box\psi \in \Phi)(\Box\psi \in \Gamma_i \Leftrightarrow \Box\psi \in \Gamma'_i)(i \in \mathbb{N})$.

$\Box\varphi \in \Phi$ ve $\mathcal{M}_K, \Gamma'_1 \models \Box\varphi$ olsun. Bu durumda $\Box\varphi \in \Gamma'_1$'dir. Bu nedenle $\Box\varphi \in \Gamma_1$'dir. $\mathcal{R}^{\Phi}_K$'nin tanımından, $\varphi \in \Gamma_2$'dir. Ancak $\varphi \in \Phi$, bu nedenle $\varphi \in \Gamma'_2 \Rightarrow \mathcal{M}_K, \Gamma'_2 \models \varphi$'dir.

($\Leftarrow$): $\Box\varphi \in \Phi$ ve $\Box\varphi \in \Gamma_1$ olduğunu varsayalım. Varsayımdan $\Box\varphi \in \Gamma'_1$'dir. $\mathcal{M}_K, \Gamma'_1 \models \Box\varphi$ ise, $\mathcal{R}^{g}_K$'nın tanımından $\mathcal{M}_K, \Gamma'_2 \models \varphi \Rightarrow \varphi \in \Gamma'_2$'dir. Bu durumda $\varphi \in \Phi$ ise $\varphi \in \Gamma_2$'dir. O halde g fonksiyonu kuvvetli bir homomorfizmadır.

Şimdi g'nin bijektif olduğunu göstermeliyiz.

g fonksiyonu 1-1'dir: Γ_1 ve Γ_2, Φ'de maksimal **K**-tutarlı kümeler ve $\Gamma_1 \neq \Gamma_2$ olsun. $g(\Gamma_1) \neq g(\Gamma_2)$ olduğunu göstermeliyiz. $\Gamma_1 \neq \Gamma_2 \Rightarrow \psi$ formülü alırız öyle ki $(\psi \in \Gamma_1$ ve $\psi \notin \Gamma_2)$ veya $(\psi \in \Gamma_2$ ve $\psi \notin \Gamma_1)$'dir.

Durum 1: $\psi \in \Gamma_1 \subseteq \Phi$ ve $\psi \notin \Gamma_2 \subseteq \Phi$ olsun. Γ'_1 ve Γ'_2 kümeleri $\Gamma_i \subseteq \Gamma'_i$-maksimal **K**-tutarlı ve $\Gamma_i = \Gamma'_i \cap \Phi$ olacak şekilde iki küme olsun. Bu durumda $\Gamma_1 \subseteq \Gamma'_1$ olduğundan $\psi \in \Gamma'_1$, $\psi \in \Phi$ ve $\psi \notin \Gamma_2$ ise $\psi \notin \Gamma'_2$'dir. Dolayısıyla $\mathcal{M}_K, \Gamma'_1 \models \psi$, $\mathcal{M}_K, \Gamma'_2 \not\models \psi$, $\psi \in \Phi$ ve $(\Gamma'_1 \not\sim_{\Phi} \Gamma'_2)$'dir. Bu nedenle $|\Gamma'_1| \neq |\Gamma'_2|$'dir.

Durum 2: $\psi \in \Gamma_2 \subseteq \Phi$ ve $\psi \notin \Gamma_1 \subseteq \Phi$ olsun. Γ'_1 ve Γ'_2 kümeleri $\Gamma_i \subseteq \Gamma'_i$-maksimal **K**-tutarlı ve $\Gamma_i = \Gamma'_i \cap \Phi$ olacak şekilde iki küme olsun. Bu durumda $\psi \in \Gamma'_2$'dır. $\psi \in \Phi$ ve $\psi \notin \Gamma_1$ ise $\psi \notin \Gamma'_1$'dir. O halde $\mathcal{M}_K, \Gamma'_2 \models \psi$, $\mathcal{M}_K, \Gamma'_1 \not\models \psi$, $\psi \in \Phi$ ve $(\Gamma'_1 \not\sim_{\Phi} \Gamma'_2)$'dir. Bu nedenle $|\Gamma'_1| \neq |\Gamma'_2|$'dir ve dolayısıyla g, 1-1 bir fonksiyondur.

g fonksiyonu örtendir: Bunun için her $|\Gamma'| \in \mathcal{W}^{g}_K$ olmak üzere $g(\Gamma) = |\Gamma'|$ olacak şekilde en az bir $\Gamma \in \mathcal{W}^{\Phi}_K$ olduğunu göstermeliyiz. $\Gamma = \Gamma' \cap \Phi$ olarak tanımlansın. Bu durumda

(*) $\Gamma \subseteq \Phi$'dir.

(**) Γ', **K**-tutarlıdır ve $\Gamma \subseteq \Gamma'$'dir (Γ'da aynı zamanda **K**-tutarlıdır).

(***) $\Gamma_1 \subseteq \Phi, \Gamma \subseteq \Gamma_1$ (Γ_1, **K**-tutarlıdır) olsun. $\Gamma = \Gamma_1$ olduğunu göstermeliyiz. $\Gamma \neq \Gamma_1$ olduğunu varsayalım. $\psi \in \Phi$, $\psi \in \Gamma_1$, $\Gamma \subseteq \Gamma_1$ ise $\psi \notin \Gamma$'dir. Bu durumda $\neg\psi \in \Gamma$ ise $\neg\psi \in \Gamma'$ ve $\neg\psi \in \Gamma_1$ elde edilir. Bu bir çelişkidir. Ve dolayısı ile g örten bir fonksiyondur. O halde g fonksiyonu bir izomorfizmadır ve

$$\mathcal{M}^{K}_{H_{fin}} \cong \mathcal{M}^{g}_K\text{'dir.}$$

$\boxtimes$

5.2 K4 Modal Mantığı için Sonuçlar

Tanım 5.4. Kanonik model $\mathcal{M}_{K4}$, $\langle\langle\mathcal{W}_{K4}, \mathcal{R}_{K4}\rangle, \models\rangle$ modelidir ve aşağıdaki gibi tanımlanır:
(i) $\mathcal{W}_{K4} = \{\Gamma' \mid \Gamma'$ maksimal **K4**-tutarlıdır$\}$,
(ii) $\mathcal{R}_{K4} = \{\langle\Gamma'_1, \Gamma'_2\rangle \mid \varphi \in \Gamma'_2$ her φ için öyle ki $\Box\varphi \in \Gamma'_1$'dır$\}$,
(iii) $\Gamma' \models p$ gyk $p \in \Gamma'$'dır.

Tanım 5.5. $\mathcal{M}^{K4}_{H_{fin}}$ modeli $\langle\langle\mathcal{W}^{\Phi}_{K4}, \mathcal{R}^{\Phi}_{K4}\rangle, \mathcal{V}^{\Phi}_{K4}\rangle$ modelidir ve aşağıdaki gibi tanımlanır:
(i) $\mathcal{W}^{\Phi}_{K4} = \{\Gamma \mid \Gamma$, Φ'de maksimal **K4**-tutarlıdır$\}$,
(ii) $\mathcal{R}^{\Phi}_{K4} = \{\langle\Gamma_1, \Gamma_2\rangle \mid (\forall\Diamond\varphi \in \Phi)(\varphi \in \Gamma_2$ veya $\Diamond\varphi \in \Gamma_2 \Rightarrow \Diamond\varphi \in \Gamma_1)\}$,
(iii) $\Gamma \models p$ gyk $p \in \Gamma$'dır.

Lemma 5.2.1. $\Gamma_1\mathcal{R}^{\Phi}_{K4}\Gamma_2$ ve $\Gamma_2\mathcal{R}^{\Phi}_{K4}\Gamma_3$ ise $\Gamma_1\mathcal{R}^{\Phi}_{K4}\Gamma_3$'dir.
İspat. $\Gamma_1\mathcal{R}^{\Phi}_{K4}\Gamma_2$ ve $\Gamma_2\mathcal{R}^{\Phi}_{K4}\Gamma_3$ olsun. Bu durumda $\Gamma_1\mathcal{R}^{\Phi}_{K4}\Gamma_3 \Leftrightarrow (\forall\Diamond\varphi \in \Phi)(\varphi \in \Gamma_3$ veya $\Diamond\varphi \in \Gamma_3 \Rightarrow \Diamond\varphi \in \Gamma_1)$ olduğunu göstermeliyiz. $\Diamond\varphi \in \Phi$ olsun. $\varphi \in \Gamma_3$ veya $\Diamond\varphi \in \Gamma_3$ olsun. Bu durumda $\Gamma_2\mathcal{R}^{\Phi}_{K4}\Gamma_3$'ün tanımından $\Diamond\varphi \in \Gamma_2$'dir. Bu nedenle $\varphi \in \Gamma_2$ veya $\Diamond\varphi \in \Gamma_2$'dir. Bu durumda $\Diamond\varphi \in \Gamma_1$'dir. Bu nedenle $\mathcal{R}^{\Phi}_{K4}$ geçişlidir. $\boxtimes$

Tanım 5.6. $\mathcal{M}^{t}_{K4} = \langle\mathcal{W}^{t}_{K4}, \mathcal{R}^{t}_{K4}, \models\rangle$ modeli Φ'ye göre kanonik model $\mathcal{M}_{K4}$'ün bir filtrelemesidir ve aşağıdaki gibi tanımlanır: $\mathcal{W}_{\Phi} = \{|\Gamma'|_{\Phi} : \Gamma' \in \mathcal{W}_{K4}\}$'dir.

(i) $\mathcal{W}^{t}_{K4} = \mathcal{W}_{\Phi}$'dir.

(ii) $\Gamma'_1\mathcal{R}_{K4}\Gamma'_2$ ise $|\Gamma'_1|\mathcal{R}^{t}_{K4}|\Gamma'_2|$'dir.

(iii) $|\Gamma'_1|\mathcal{R}^{t}_{K4}|\Gamma'_2| \Leftrightarrow (\forall\Diamond\varphi \in \Phi)(\mathcal{M}_{K4}, \Gamma'_2 \models \varphi \vee \Diamond\varphi \Rightarrow \mathcal{M}_{K4}, \Gamma'_1 \models \Diamond\varphi)$.

(iv) Φ'deki her önerme değişkeni p için $\Gamma' \models p$ gyk $|\Gamma'| \in V^{f}(p)$'dir.

Teorem 5.2. Φ, sonlu ve yeterli bir küme olsun. $\mathcal{M}_{K4}$, **K4** Modal Mantığının kanonik modeli, $\mathcal{M}^{K4}_{H_{fin}}$ ve $\mathcal{M}^{t}_{K4}$ modelleri $\mathcal{M}_{K4}$'nın Φ kümesine göre sırasıyla sonlu Henkin yöntemiyle ve filtreleme yöntemiyle elde edilen modelleri olsun. Bu durumda $\mathcal{M}^{K4}_{H_{fin}} \cong \mathcal{M}^{t}_{K4}$'dir.

İspat. $\mathcal{M}^{K4}_{H_{fin}}$ ile $\mathcal{M}^t_{K4}$ modelinin izomorf olduklarını yani $\mathcal{M}^{K4}_{H_{fin}}$ ile $\mathcal{M}^t_{K4}$ arasında bijektif kuvvetli bir homomorfizmanın olduğunu göstermemiz gerekir.

$f : \mathcal{M}^{K4}_{H_{fin}} \to \mathcal{M}^t_{K4}$ fonksiyonu $f : \Gamma \mapsto |\Gamma'|_\Phi$ biçiminde tanımlansın. Bu şekilde tanımlı f'nin bir fonksiyon olduğunu göstermeliyiz. Bunun için aşağıdaki lemmalara ihtiyaç vardır. Burada Γ', $\mathcal{W}_{K4}$'ün elemanıdır öyle ki $\Gamma \subseteq \Gamma'$'dir.

Lemma 5.2.2. Γ, Φ'de maksimal **K4**-tutarlı küme olsun. Bu durumda bir Δ kümesi vardır öyle ki $\Gamma \subseteq \Delta$ ve Δ maksimal **K4**-tutarlı kümedir.

İspat. Γ, Φ'de maksimal **K4**-tutarlı küme olsun. Bu nedenle açıktır ki Γ, **K4**-tutarlı kümedir. Lindenbaum lemmasından bir Δ kümesi vardır öyle ki $\Gamma \subseteq \Delta$ ve Δ maksimal **K4**-tutarlı kümedir. ⊠

Lemma 5.2.3. Γ, Φ'de maksimal **K4**-tutarlı küme olsun. Δ_1 ve Δ_2 kümeleri öyle ki $\Gamma \subseteq \Delta_1$, $\Gamma \subseteq \Delta_2$, Δ_1 ve Δ_2 maksimal **K4**-tutarlı kümeler olsun. Bu durumda $\Delta_1 \sim_\Phi \Delta_2$'dir.

İspat. Γ, Φ'de maksimal **K4**-tutarlı küme olsun. $\Gamma \subseteq \Delta_1$, $\Gamma \subseteq \Delta_2$, Δ_1 ve Δ_2 maksimal K4-tutarlı kümeler olsunlar. $\Delta_1 \sim_\Phi \Delta_2$ olduğunu ispatlamalıyız. Yani $(\forall\varphi \in \Phi)(\mathcal{W}_K, \Delta_1 \models \varphi$ gyk $\mathcal{W}_K, \Delta_2 \models \varphi)$ olmalıdır. $\mathcal{W}_{K4}, \Delta_1 \models \varphi$ gyk $\varphi \in \Delta_1$ olsun. Varsayalım ki $\mathcal{W}_{K4}, \Delta_2 \not\models \varphi$ gyk $\varphi \notin \Delta_2$ gyk $\neg\varphi \in \Delta_2$ olsun.

1. $\neg\varphi \in \Phi \Rightarrow \varphi \in \Delta_1$ gyk $\neg\varphi \notin \Delta_1 \Rightarrow \neg\varphi \notin \Gamma \Rightarrow$ O halde $\varphi \in \Gamma$'dır(Γ, Φ'de maksimal **K4**-tutarlı küme ve $\varphi, \neg\varphi \in \Phi$ olsun. Bu durumda $\varphi \in \Gamma \Leftrightarrow \neg\varphi \notin \Gamma$'dır).

2. $\neg\varphi \notin \Phi$, $\varphi \in \Phi$, Φ yeterli bir kümedir. Bu durumda $\varphi = \neg\varphi_1$'dir. $\neg\varphi_1 \in \Delta_1$ gyk $\varphi_1 \notin \Delta_1$ gyk $\varphi_1 \notin \Gamma$ gyk $\varphi = \neg\varphi_1 \in \Gamma$'dır($\varphi_1 \in \Phi$, $\neg\varphi_1 \in \Phi$). $\varphi \in \Delta_2$ ve $\neg\varphi \in \Delta_2$'dir. Bu bir çelişkidir. Bu nedenle $\varphi \in \Delta_2$ gyk $\mathcal{M}_K, \Delta_2 \models \varphi$'dir.

Bu nedenle $\Delta_1 \sim_\Phi \Delta_2$'dir. ⊠

O halde lemma 5.2.2. ve lemma 5.2.3.'den $\Gamma \rightsquigarrow \Delta \rightsquigarrow |\Delta|_\Phi$ yazılabilir ve $\Gamma \mapsto |\Delta|_\Phi$'dir. Bu nedenle f, $\mathcal{M}^K_{H_{fin}}$'den $\mathcal{M}^g_K$'ye bir fonksiyondur.

Şimdi $f : \mathcal{M}^{K4}_{H_{fin}} \to \mathcal{M}^{t}_{K4}$ fonksiyonunun bir kuvvetli homomorfizma olduğunu gösterelim. Bunun için kuvvetli homomorfizma tanımının (i) ve (ii) şıklarını gerçekleyelim.

(i) Her bir önerme değişkeni p ve $\Gamma \in \mathcal{M}^{K4}_{H_{fin}}$ kümesi için, $\Gamma \in \mathcal{V}^{\Phi}_{K4}(p)$ gyk $f(\Gamma) \in V^{f}(p)$ olduğunu göstermeliyiz. Burada iki durum söz konusudur:

- Durum 1: $p \in \Phi$.
- Durum 2: $p \notin \Phi$.

Durum 1: $p \in \Phi$.

($\Rightarrow$): p bir önerme değişkeni ve Γ, $\mathcal{M}^{K4}_{H_{fin}}$'den bir eleman olsun. $\Gamma \in \mathcal{V}^{\Phi}_{K4}(p)$ olsun. $f(\Gamma) \in V^{f}(p)$ olduğunu göstermeliyiz. $\Gamma \in \mathcal{V}^{\Phi}_{K4}(p)$ gyk $\mathcal{V}^{\Phi}_{K4}(p)$'nin tanımından $\Gamma \models p$ yazabiliriz gyk $p \in \Gamma'$ ($\Gamma \subseteq \Gamma'$) gyk kanonik model tanımı (iii)'den $\Gamma' \models p$ gyk filtreleme tanımı **(iv)**'den $f(\Gamma) = |\Gamma'| \in V^{f}(p)$'dir.

($\Leftarrow$): p bir önerme değişkeni ve Γ, $\mathcal{M}^{K4}_{H_{fin}}$'den bir eleman olsun. $|\Gamma'| \in V^{f}(p)$ olsun. $\Gamma \in \mathcal{V}^{\Phi}_{K4}(p)$ olduğunu göstermeliyiz. $|\Gamma'| \in V^{f}(p)$ gyk filtreleme tanımı **(iv)**'den Φ'deki her önerme değişkeni p için $\Gamma' \models p$ gyk $p \in \Gamma'$ gyk $p \in \Gamma$ (Γ, Φ'de maksimal K4-tutarlıdır) gyk sonlu Henkin yöntemi tanımı (iii)'den $\Gamma \models p$ gyk $\mathcal{V}^{\Phi}_{K4}(p)$'ün tanımından $\Gamma \in \mathcal{V}^{\Phi}_{K4}(p)$'dir.

Durum 2: $p \notin \Phi$.

Γ, Φ'de maksimal **K4**-tutarlı küme, $\Gamma \subseteq \Phi$ ve $p \notin \Phi$ ise $p \notin \Gamma$ olsun. Bu durumda $\Gamma \notin \mathcal{V}^{\Phi}_{K4}(p)$'dir. $p \notin \Phi$ ise $V^{f}(p) = \emptyset$'dir. Filtreleme tanımı **(iv)** ile $f(\Gamma) \notin V^{f}(p)$'dir. O halde $\Gamma \in \mathcal{V}^{\Phi}_{K4}(p)$ gyk $f(\Gamma) \in V^{f}(p)$'dir.

(ii) $\mathcal{M}^{K4}_{H_{fin}}$ modelinden alınan her Γ_1 ve Γ_2 elemanları için, $\Gamma_1 \mathcal{R}^{\Phi}_{K4} \Gamma_2$ gyk $f(\Gamma_1)\mathcal{R}^{t}_{K4} f(\Gamma_2)$ olduğunu göstermeliyiz.

($\Rightarrow$): $\Gamma_1 \mathcal{R}^{\Phi}_{K4} \Gamma_2$ olsun. Burada Γ_1 ve Γ_2, Φ'de maksimal K4-tutarlı kümedir. $|\Gamma'_1|\mathcal{R}^{t}_{K4}|\Gamma'_2|$ olduğunu göstermeliyiz. Burada Γ'_1 ve Γ'_2 maksimal K4-tutarlı kümelerdir ve sırasıyla Γ_1 ve Γ_2'nin birer genişlemesidir. Aşağıdaki iki denklikten ötürü $\mathcal{M}_{K4}, \Gamma'_2 \models \varphi \vee \Diamond\varphi$ ise $\mathcal{M}_{K4}, \Gamma'_1 \models \Diamond\varphi$ olduğunu göstermeliyiz. $|\Gamma'_1|\mathcal{R}^{t}_{K4}|\Gamma'_2| \Leftrightarrow (\forall \Diamond\varphi \in \Phi)(\mathcal{M}_{K4}, \Gamma'_2 \models \varphi \vee \Diamond\varphi \Rightarrow \mathcal{M}_{K4}, \Gamma'_1 \models \Diamond\varphi)$. $\Gamma_1 \mathcal{R}^{\Phi}_{K4} \Gamma_2 \Leftrightarrow (\forall \Diamond\varphi \in \Phi)(\varphi \in \Gamma_2$ veya $\Diamond\varphi \in \Gamma_2 \Rightarrow \Diamond\varphi \in \Gamma_1)$.

$\Gamma_1 \subseteq \Gamma_1'$ olduğundan $\Gamma_1 = \Gamma_1' \cap \Phi$ ve $\Gamma_2 \subseteq \Gamma_2'$ olduğundan $\Gamma_2 = \Gamma_2' \cap \Phi$'dir. Γ_1' ve Γ_2' maksimal **K4**-tutarlı kümeler olduğundan sırasıyla $(\forall\psi \in \Phi)(\psi \in \Gamma_1 \Leftrightarrow \psi \in \Gamma_1')$ ve $(\forall\psi \in \Phi)(\psi \in \Gamma_2 \Leftrightarrow \psi \in \Gamma_2')$ yazılabilir. Bu durumda aşağıdaki vardır. $(\forall\Diamond\psi \in \Phi)(\Diamond\psi \in \Gamma_i \Leftrightarrow \Diamond\psi \in \Gamma_i')(i \in \mathbb{N})$.

$\Diamond\varphi \in \Phi$ ve $\mathcal{M}_{K4}, \Gamma_2' \models \varphi \vee \Diamond\varphi$ olsun. O halde Truth lemmasından $\varphi \vee \Diamond\varphi \in \Gamma_2'$ dir. O halde $\varphi \in \Gamma_2'$ veya $\Diamond\varphi \in \Gamma_2'$ (Γ_2''nin maksimalliğinden). $\Gamma_2 \subseteq \Gamma_2'$ ve $\varphi \in \Phi$ sahibiz yani $\varphi \in \Gamma_2$ veya $\Diamond\varphi \in \Gamma_2$'dir. $\mathcal{R}_{K4}^{\Phi}$'ün tanımından $\Diamond\varphi \in \Gamma_1$ elde ederiz. $\Gamma_1 \subseteq \Gamma_1'$ sahibiz. Bu nedenle $\Diamond\varphi \in \Gamma_1'$'dir. Bundan dolayı $\mathcal{M}_{K4}, \Gamma_1' \models \Diamond\varphi$'dir.

($\Leftarrow$): $(\forall\Diamond\varphi \in \Phi)(\mathcal{M}_{K4}, \Gamma_2' \models \varphi \vee \Diamond\varphi \Rightarrow \mathcal{M}_{K4}, \Gamma_1' \models \Diamond\varphi)$ doğru olsun. $\Gamma_1 \mathcal{R}_{K4}^{\Phi} \Gamma_2 \Leftrightarrow (\forall\Diamond\varphi \in \Phi)(\varphi \in \Gamma_2$ veya $\Diamond\varphi \in \Gamma_2 \Rightarrow \Diamond\varphi \in \Gamma_1)$ olduğunu göstermeliyiz. $\Diamond\varphi \in \Phi$ olsun. $\varphi \in \Gamma_2$ veya $\Diamond\varphi \in \Gamma_2$ olsun. Çünkü $\Gamma_2 \subseteq \Gamma_2'$'dir. $\varphi \in \Gamma_2'$ veya $\Diamond\varphi \in \Gamma_2'$ sahibiz. Bu nedenle $\varphi \vee \Diamond\varphi \in \Gamma_2'$'dır. Bu durumda $\mathcal{M}_{K4}, \Gamma_2' \models \varphi \vee \Diamond\varphi$'dur. Bundan dolayı $\mathcal{M}_{K4}, \Gamma_1' \models \Diamond\varphi$'dur. Bu nedenle $\Diamond\varphi \in \Gamma_1'$'dır. Ancak $\Diamond\varphi \in \Phi$'dır. $\Diamond\varphi \in \Gamma_1' \cap \Phi = \Gamma_1$'dir. Bundan dolayı $\Diamond\varphi \in \Gamma_1$'dir. O halde f fonksiyonu kuvvetli bir homomorfizmadır.

Şimdi f'nin bijektif olduğunu göstermeliyiz.

f, 1-1 fonksiyondur: Γ_1 ve Γ_2, Φ'de maksimal **K4**-tutarlı kümeler ve $\Gamma_1 \neq \Gamma_2$ olsun. $f(\Gamma_1) \neq f(\Gamma_2)$ olduğunu göstermeliyiz. $\Gamma_1 \neq \Gamma_2 \Rightarrow \psi$ formülü alırız öyle ki ($\psi \in \Gamma_1$ ve $\psi \notin \Gamma_2$) veya ($\psi \in \Gamma_2$ ve $\psi \notin \Gamma_1$)'dir.

Durum 1: $\psi \in \Gamma_1 \subseteq \Phi$ ve $\psi \notin \Gamma_2 \subseteq \Phi$ olsun. Γ_1' ve Γ_2' kümeleri $\Gamma_i \subseteq \Gamma_i'$-maksimal **K4**-tutarlı ve $\Gamma_i = \Gamma_i' \cap \Phi$ olacak şekilde iki küme olsun. Bu durumda $\psi \in \Gamma_1'$ olduğundan $\psi \in \Phi$ ve $\psi \notin \Gamma_2$ ise $\psi \notin \Gamma_2'$'dir. Dolayısıyla $\mathcal{M}_{K4}, \Gamma_1' \models \psi$, $\mathcal{M}_{K4}, \Gamma_2' \not\models \psi$, $\psi \in \Phi$ ve $(\Gamma_1' \not\sim_{\Phi} \Gamma_2')$'dir. Bu nedenle $|\Gamma_1'| \neq |\Gamma_2'|$'dir.

Durum 2: $\psi \in \Gamma_2 \subseteq \Phi$ ve $\psi \notin \Gamma_1 \subseteq \Phi$ olsun. Γ_1' ve Γ_2' kümeleri $\Gamma_i \subseteq \Gamma_i'$-maksimal **K4**-tutarlı ve $\Gamma_i = \Gamma_i' \cap \Phi$ olacak şekilde iki küme olsun. Bu durumda $\psi \in \Gamma_2'$'dır. $\psi \in \Phi$ ve $\psi \notin \Gamma_1$ ise $\psi \notin \Gamma_1'$'dir. O halde $\mathcal{M}_{K4}, \Gamma_2' \models \psi$, $\mathcal{M}_{K4}, \Gamma_1' \not\models \psi$, $\psi \in \Phi$ ve $(\Gamma_1' \not\sim_{\Phi} \Gamma_2')$'dir. Bu nedenle $|\Gamma_1'| \neq |\Gamma_2'|$'dir ve f, 1-1 fonksiyondur.

f fonksiyonu örtendir: Bunun için her $|\Gamma'| \in \mathcal{W}_{K4}^{t}$ olmak üzere $f(\Gamma) = |\Gamma'|$ olacak şekilde en az bir $\Gamma \in \mathcal{W}_{K4}^{\Phi}$ olduğunu göstermeliyiz. $\Gamma = \Gamma' \cap \Phi$ olarak tanımlansın. Bu durumda

(*) $\Gamma \subseteq \Phi$'dir.

(**) Γ', **K4**-tutarlıdır ve $\Gamma \subseteq \Gamma'$'dir(Γ'da aynı zamanda **K4**-tutarlıdır).

(***) $\Gamma_1 \subseteq \Phi$, $\Gamma \subseteq \Gamma_1$ (Γ_1, **K4**-tutarlıdır) olsun. $\Gamma = \Gamma_1$ olduğunu göstermeliyiz. $\Gamma \neq \Gamma_1$ olduğunu varsayalım. $\psi \in \Phi$, $\psi \in \Gamma_1$, $\Gamma \subseteq \Gamma_1$ ise $\psi \notin \Gamma$'dir. Bu durumda $\neg\psi \in \Gamma$ ise $\neg\psi \in \Gamma'$ ve $\neg\psi \in \Gamma_1$ elde edilir. Bu bir çelişkidir. Dolayısıyla f fonksiyonu örtendir. O halde f fonksiyonu bir izomorfizmadır ve

$$\mathcal{M}^{K4}_{H_{fin}} \cong \mathcal{M}^{t}_{K4}\text{'dir.}$$

$\boxtimes$

Bölüm 6

Sonuç

Normal modal mantıklar belli türetim kuralları altında kapalılık koşulunu sağlayan mantıklardır. Bu mantıklar sintaktik ya da semantik olarak özelleştirilebilirler. Sintaksı verilen bir mantıktan semantik karekterizasyonu veya tam tersini elde etmek mümkün müdür, sorusunun yanıtı evet'dir. Bu türden soruların yanıtları sağlamlık ve tamlık teoremlerinin hangi yöntemlerle kanıtlandıklarına dayanır. Kanonik model, Henkin ve filtreleme yöntemlerinin kullanıldığı bu tezde K ve K4 modal mantıklarının sağlamlık ve tamlık teoremleri ispatlanmıştır. Ayrıca bu mantıkların kanonik modelleri aracılığı ile belli bir çatılar sınıfına göre kuvvetli tam oldukları gösterilmiştir. Kuvvetli tam olan modal mantıklar tamdır ancak, tersi doğru değildir. Örneğin Gödel Löb(GL) modal mantığı tam olduğu halde kuvvetli tam değildir. Bu durumda, GL mantığının bu tezde verilen yöntemlerle elde edilen modelleri izomorf mudur? Peano Aritmetiğinin modal mantığı olarak bilinen GL ile temel modal mantıklardan biri olan S4'ün bu tezde verilen yöntemlerle elde edilen modellerinin izomorf olup olmadıkları ayrı bir araştırma konusudur.

Kaynakça

[1] Blackburn, Patrick, Maarten de Rijke, and Yde Venema, *Modal Logic*, Cambridge University Press, 2001.

[2] Boolos, George. *The Logic of Provabilitiy*, Cambridge University Press, 1996.

[3] Burris, Stanley N. *Logic for Mathematics and Computer Science*, Prentice Hall, 1998.

[4] Chellas, Brian F. *Modal logic an introduction*, Cambridge University Press, 1980.

[5] De Jongh, Dick, and Frank Veltman, *Intensional Logics*, preprint, 1999.

[6] De Jongh, Dick, and G. Japaridze, The Logic of Provabilitiy, *Handbook of Proof Theory*, 2-3, Elsevier, 1995.

[7] Fitting, Melvin. Modal Proof Theory, *Handbook of Modal Logic*, Elsevier, 2007.

[8] Rubin, Jean E. *Mathematical Logic: Applications and Theory*, Saunders College Publishing, 1990.

[9] Rybakov, Vladimir V. *Admissibility of Locical Inference Rules*, Elsevier Science B.V., 1997.

[10] Zakharyaschev, Michael, and Alexander Chagrov, *Modal Logic*, Oxford University Press, 2001.

ÖZGEÇMİŞ

16 Temmuz 1983 yılında İstanbul'da doğdu. Dr. Reşit Galip İlköğretim Okulu'ndan 1994 yılında, Reşat Tardu İlköğretim Okulu'nun Ortaokul bölümünden 1997 yılında, İsmail Rüştü Olcay Yabancı Dil Ağırlıklı Lisesi'nden 2001 yılında mezun oldu. 2001-2008 yılları arasında İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nde lisans eğitimini tamamladı. 2009 yılında İstanbul Kültür Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik-Bilgisayar Anabilim Dalı'nda yüksek lisans programına başladı. 2010 yılında Mensucat Santral Anadolu Lisesi'nde matematik öğretmeni olarak çalıştı. 2011 yılında Bulgaristan'da ERASMUS öğrencisi olarak bulundu. Halen İstanbul Kültür Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik-Bilgisayar Anabilim Dalı'nda yüksek lisans eğitimine devam etmektedir.