

T.C.
İSTANBUL KÜLTÜR ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

DİNAMİK EULER-BERNOULLİ KİRİŞ DENKLEMİNİN
ÇÖZÜLEBİLİRLİK İNCELEMESİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Servet İNAN
1900001086

Anabilim Dalı: Matematik ve Bilgisayar Bilimleri

Program: Matematik ve Bilgisayar Bilimleri

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Onur BAYSAL

OCAK 2022

T.C.
İSTANBUL KÜLTÜR ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

DİNAMİK EULER-BERNOULLİ KİRİŞ DENKLEMİNİN
ÇÖZÜLEBİLİRLİK İNCELEMESİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Servet İNAN
1900001086

Anabilim Dalı: Matematik ve Bilgisayar Bilimleri

Program: Matematik ve Bilgisayar Bilimleri

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Onur BAYSAL

Jüri Üyeleri: Prof. Dr. Burhan PEKTAŞ (Üsküdar Üniversitesi)

Dr. Öğr. Üyesi Uğur GÖNÜLLÜ

OCAK 2022

ÖNSÖZ

Tez konusunu seçmemde yardımcı olan ve düzenli bir şekilde beni çalışmaya teşvik eden, tez çalışmasının her bir adımında çok emeği geçen, matematikle hayata bakmanın güzelliğini fark ettiren ve her konuda destek olup yol gösteren çok değerli tez danışmanı hocam Doç. Dr. Onur Baysal'a, değerli bölüm başkanımız Prof. Dr. Mert Çağlar'a, yardımımı hiçbir zaman esirgemeyen Dr. Öğr. Üyesi Uğur Gönüllü hocama, yüksek lisans eğitimim süresince katkısı olan tüm bölüm hocalarıma, desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen dostlarıma ve aileme, tez döneminin yoğun bir zamanında hep yanımda olan değerli eşime sonsuz teşekkürler.

Ocak 2022

Servet İNAN

İÇİNDEKİLER

SEMBOL LİSTESİ	iv
ÖZET	v
ABSTRACT	vi
1 GİRİŞ	1
2 SONLU BOYUTLU ALTUZAYDA GALERKİN YÖNTEMİ VE DÜZGÜN SINIRLAMA	5
3 ÇÖZÜMÜN VARLIK VE TEKLİK ÖZELLİKLERİ	10
3.1 Varlık Teoremi	10
3.2 Teklik Teoremi	13
4 SAYISAL ÖRNEKLER	15
5 SONUÇ VE TARTIŞMA	19

SEMBOL LİSTESİ

- $C^k(\Omega)$: Ω bölgesinde, k . mertebeye kadar türevleri sürekli fonksiyonlar uzayı.
- $C^\infty(\Omega)$: Ω bölgesinde, her mertebeden türevleri sürekli fonksiyonlar uzayı.
- $C_0^\infty(\Omega)$: Ω bölgesinde, test fonksiyon uzayı.
- $L^p(\Omega)$: Ω bölgesinde, p . kuvveti integrallenebilir fonksiyonlar uzayı.
- $L^\infty(\Omega)$: Ω bölgesinde, h.h. sınırlı fonksiyonlar uzayı.
- $H^k(\Omega)$: Ω bölgesinde, k . mertebeden Hilbert-Sobolev uzayı.
- $H_0^k(\Omega)$: Ω bölgesinde, $C_0^\infty(\Omega)$ uzayının H^k normundaki kapanışı.
- $H^{-k}(\Omega)$: Ω bölgesinde, $L^k(\Omega)$ uzayının $\|\cdot\|_{-k}$ normundaki kapanışı.
- $\mathcal{L}u$: $(r(x)u_{xx})_{xx} - (J(x)u_x)$ ifadesine eşit differansiyel operatör.
- $L^p(0, T; X)$: $(0, T)$ üzerinde p . mertebeden integrallenebilir X değerli fonksiyonlar uzayı.
- \rightarrow : Güçlü(normda) yakınsama.
- \rightharpoonup : Zayıf yakınsama.
- \rightharpoonup^* : Zayıf* topolojide yakınsama.

Üniversitesi : İstanbul Kültür Üniversitesi
Enstitüsü : Lisansüstü Eğitim Enstitüsü
Anabilim Dalı : Matematik-Bilgisayar
Programı : Matematik-Bilgisayar
Tez Danışmanı : Doç.Dr. Onur BAYSAL
Tez Türü ve Tarihi : Yüksek Lisans - OCAK 2022

ÖZET

DİNAMİK EULER-BERNOULLİ KİRİS DENKLEMİNİN ÇÖZÜLEBİLİRLİK İNCELEMESİ

Servet İNAN

Bu yüksek lisans tezinde, ilk olarak L. Euler ve D. Bernoulli tarafından modellenen bir boyutlu doğrusal sıkı kenetli giriş denkleminin çözülebilirlik özelliği incelenmiştir. Detaylı olarak, burada ele alınan başlangıç ve sınır değer problemi gerçek mühendislik uygulamalarında ihtiyaç duyulan, negatif Sobolev uzaylarından seçilen hareketli nokta yükleri ve uygun genel uzaylardan seçilen katsayıları içerir. Homojen Dirichlet sınır koşulları ile genelleştirilmiş çözüm teorisi kullanılarak incelenen problemin varlık ve teklik özelliklerini veren [1]'deki tüm ispat adımları burada detaylandırılmıştır. Bu tezde kullanılan metod Galerkin yaklaşımına dayanmaktadır. Bu yaklaşım temel olarak verilen doğrusal diferansiyel denklemi, çözümünü sonlu boyutlu uzaylarda arayan bir ayrık probleme dönüştürür. [1] çalışmasında sunulan sonuçların üzerine önemli yenilikler kattığımızı iddia etmiyoruz, ancak burada ilgilenen araştırmacılar için daha ayrıntılı hesaplamalar, açıklamalar ve sayısal doğrulamalar sunulmaktadır.

Anahtar Kelimeler : Euler-Bernoulli Çubuk Denklemi,
Zayıf Çözüm Yaklaşımı,
Galerkin Yöntemi,
Sobolev Uzayları,

University : İstanbul Kültür University
Institute : Institute of Graduate Studies
Science Programme : Mathematics and Computer
Programme : Mathematics and Computer
Supervisor : Assoc. Prof. Dr. Onur BAYSAL
Degree Awarded and Date : M.S. - JANUARY 2022

ABSTRACT

A RESEARCH ON SOLVABILITY OF THE DYNAMICAL EULER-BERNOULLI BEAM EQUATION

Servet INAN

In this master thesis, we investigate solvability property of the one dimensional rigid clamped linear form of the beam equation posed by L. Euler and D. Bernoulli. In detail, considered dynamical initial and boundary value problem here includes coefficients in general suitable spaces and moving-point loads in negative order Sobolev spaces which required in realistic engineering applications. By using the generalized solution theory combined with homogeneous-Dirichlet boundary conditions, we represent each proof steps with all details for the existence and uniqueness properties of the solution of the problem which firstly obtained in the study [1]. The technique we used in this thesis is based on Galerkin approach which transforms a linear differential equation to discrete problem defined on finite sets of basis functions. We do not claim any significant improvements over the work in [1], however, further detail calculations, explanations and numerical verifications are provided here for interested researchers.

Keywords : Euler-Bernoulli Beam Equation,
Weak Solution Approach,
Galerkin Method,
Sobolev Spaces,

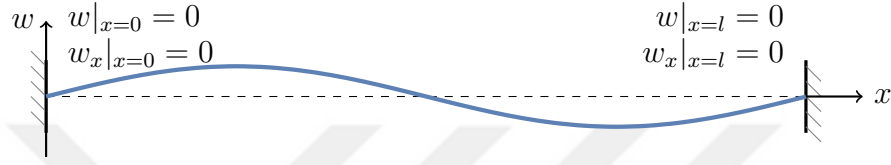
BÖLÜM 1

GİRİŞ

Euler-Bernoulli kiriş teorisinin ilk geçerli modellemesi Daniel Bernoulli ve Leonhard Euler tarafından 1750 yılında geliştirildi. Daha önce Leonardo da Vinci, Galileo Galilei ve Jacob Bernoulli bu teori üzerinde çalıştılar, ancak girişimleri bazı açılardan yetersiz veya eksikti. Bu teorisinin önemi ilk olarak 19. yüzyılın sonlarında Eyfel Kulesi'ni tasarlamak için kullanıldığında ortaya çıktı. Daha sonra elastik titreşim ve burkulma problemleri ile ilgili birçok mühendislik yapısının modellenmesi ile ön plana çıkmış ve ilgili alanlarda büyük pratik öneme sahip olmuştur. Bu alanlara örnek olarak makine, bina ve uçak mühendisliği ile yer bilimleri ve petrol endüstrisi verilebilir. Vibrasyon problemleri [2]'nin çalışmasından başlayarak son iki yüzyıldır aktif bir araştırma alanı olmuştur. Konu ile alakalı [4], [5] ve [6] çalışmalar ön plana çıkmaktadır. Bu alandaki en yaygın modeller, yukarıda belirtilen tüm bilimsel alanlarda temel model olarak kabul edilen klasik Euler-Bernoulli kiriş teorisine dayanmaktadır.

Düz probleme ek olarak, son zamanlarda kiriş denklemi ile ilgili ters problemler teorisi farklı tipte sınır ve ek koşullar (ölçümler) ile önem kazanmıştır [7], [8], [9], [10] ve [11]. Bu problemler sadece matematikçiler için değil, aynı zamanda mühendisler ve diğer bilim dallarında çalışan araştırmacılar için de güncel ve ilgi çekicidir. Aslında, ters problemler üzerinde çalışan araştırmacılar, düz problemin genelleştirilmiş (zayıf) çözümünün tekliğini, varlığını ve bazı süreklilik özelliklerini bilmeleri gerekir. Bir dizi çalışma ikinci mertebeden lineer kısmi türevli denklemler (KTD)'ler için bu özellikleri ele almasına karşın ([3], [13]), literatür araştırmamızda dördüncü mertebeden KTD'ler üzerine kapsamlı çalışma

karşımıza çıkmamaktadır. Ayrıca, elimizdeki bilgilere göre parametreleri denklemin fiziğine uygun uzaylarda olan Euler-Bernoulli kiriş denkleminin genel formu için de bu yönde kapsamlı bir çalışma bulunmamaktadır. Bu amaçla, istenen sonuçları kanıtlamak için dinamik problemlerde varlık ve teklik ispatlarında bir standart olan Galerkin tekniğine başvurulmuştur. Kısaca bu yöntem, çözümü sonlu boyutlu fonksiyon uzaylarında arama ve sonra limitlere geçme fikrine dayanmaktadır. İlgilenen araştırmacılar, parabolik ve hiperbolik KTD türleri için bu yöntemin tüm ayrıntılarını [3]'te bulabilirler. Değişken katsayılı homojen olmayan sıkı



Şekil 1.1: Problemin geometrisi: sıkı kenetli kiriş modeli.

kenetli Euler-Bernoulli kirişi için aşağıdaki problemi inceliyoruz (modelin geometrisi şekil 1.1'de gösterilmiştir):

$$\begin{cases} \rho(x)w_{tt} + \eta(x)w_t + (r(x)w_{xx})_{xx} - (J(x)w_x)_x = \xi(x, t), & (x, t) \in \Omega_T, \\ w(0, t) = w_x(0, t) = 0, \quad w(l, t) = w_x(l, t) = 0, & t \in (0, T), \\ w(x, 0) = p(x), \quad w_t(x, 0) = q(x), & x \in \Omega. \end{cases} \quad (1.1)$$

Burada $\Omega := (0, l)$, $\Omega_T := \Omega \times (0, T)$ ve $w(x, t)$ deformasyon fonksiyonu, $l, T \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere Ω_T bölgesinde tanımlıdır, $\xi(x, t)$ ise yük dağılımını modeller. Ayrıca, $E > 0$ olmak üzere $r(x) = E \times I(x)$, esneklik modülü, $I(x) > 0$ kesitin eylemsizlik momenti, $\rho(x)$ kirişin kütle yoğunluğu, $\eta(x) \geq 0$ ve $J(x) \geq 0$ sırasıyla sönümleme katsayısını ve çekiş kuvvetini gösterir.

Ek olarak aşağıdaki koşulları da varsayıyoruz:

$$\begin{cases} p \in H_0^2(0, l), \quad q \in L^2(0, l) \quad \text{ve} \quad J, \eta, r, \rho \in L^\infty(0, l) \\ 0 < r_0 \leq r(x) \leq r_1 \quad \text{ve} \quad 0 < \rho_0 \leq \rho(x) \leq \rho_1 \quad \text{for all } x \in \Omega. \end{cases} \quad (1.2)$$

Bu koşullara göre, $\rho \equiv 1$ varsaymak genelliği bozmayacaktır. Burada $H^k(\Omega)$, k . dereceden Hilbert-Sobolev uzayı ve $H_0^k(\Omega)$, C_0^∞ test fonksiyon uzayının $H^k(\Omega)$ Sobolev uzayında ki kapanışını temsil eder. Ayrıca simetrik bilinear fonksiyoneli $a : H^2(0, l) \times H^2(0, l) \rightarrow \mathbb{R}$ aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$a(w, v) := (rw_{xx}, v_{xx}) + (Jw_x, v_x), \quad (1.3)$$

Burada (\cdot, \cdot) parantez gösterimi $L^2(0, l)$ içindeki standart iç çarpımı için kullanılır. Daha sonra, problem (1.1) kısmi integrasyon yoluyla aşağıdaki varyasyonel forma dönüştürülebilir.: Her $t \in (0, T]$ ve $v \in H_0^2(0, l)$ için,

$$\begin{cases} (W''(t), v) + (\eta W'(t), v) + a(W(t), v) = (\Xi(t), v) \\ W(0) = p, \quad W'(0) = q, \end{cases} \quad (1.4)$$

Burada gösterilen $[W(t)](x) := w(x, t)$ ve $[\Xi(t)](x) := \xi(x, t)$ Banach değerli temel dönüşümler sırasıyla $W : [0, T] \rightarrow H_0^2(0, l)$ ve $\Xi : [0, T] \rightarrow L^2(0, l)$ eşlemeleriyle tanımlanırlar.

Klasik teoride, sağ taraftaki terim genellikle $\xi \in L^2(\Omega_T)$ (veya eşdeğer olarak $\Xi \in L^2(0, T; L^2(0, l))$) [3], [13] olduğu varsayılır, fakat bu varsayım gerçek mühendislik uygulamalarındaki gereksinimleri bazı özel durumlarda karşılayamaz. Burada incelenen genelleştirilmiş çözüm teorisi, ilgili bu terimi aşağıdaki negatif mertebe Sobolev uzayından seçmemize izin verir.

$$\Xi \in L^2(0, T; H^{-2}(0, l)) \quad (1.5)$$

Burada $H^{-2}(0, l)$ uzayı $H_0^2(0, l)$ uzayının dualidir ($H^{-2}(0, l) = H_0^2(0, l)^*$). Ayrıca $H^{-2}(0, l) \supset L^2(0, l) \supset H^2(0, l)$ olduğundan açıktır ki $L^2(0, T; H^{-2}(0, l)) \supset L^2(0, T; L^2(0, l))$.

$\Xi \in L^2(0, T; H^{-2}(0, l))$ terimini negatif mertebeli Sobolev uzaylarından seçmek dinamik Euler-Bernoulli kiriş denkleminin mühendislik uygulamaları açısından önemlidir. Bu mühendislik uygulamaları hareketli nokta kaynak yükleri ile ilgili mühendislik problemlerin modellenmesinde ortaya çıkar. Bu modeller, köprüler üzerinde hareket eden araçları, tren raylarını ve ayrıca boruların içinde akan sıvıları içerir (bkz. [19, 20] ve buradaki referanslar). Böyle bir problemin basit bir örneği, harmonik olarak salınan kuvvet fonksiyonu $\xi(x, t) = F_0 \cos(\omega t) \delta(x - l/2)$, frekansı ω ve büyüklüğü F_0 [18] olan Euler-Bernoulli kirişinin iyi bilinen hareketli osilatör modelidir. Daha gelişmiş hareketli nokta yük modelleri, kaynak terimi $\xi(x, t) = \sum_{k=1}^K p_k(x) \delta(x - x_k - \nu t)$ tarafından belirlenen asenkron nokta yüklerini içerir. [3]'te incelenen, parabolik ve hiperbolik KTD'lerde buradaki hareketli nokta kaynak genellemesine yer verilmemiştir. Bu sebeple bu çalışmadaki amacımız bu boşluğu ilgili kiriş denklemi için incelemektir.

$W(t)$ çözümünü ve türevlerini uygun uzaylarda ele almak için (1.1) problemi aşağıdaki gibi ifade edilmelidir.

$$w_{tt} = \underbrace{-\eta w_t + (Jw_x)_x}_m + \underbrace{\xi - (rw_{xx})_{xx}}_n.$$

Burada tüm $t \in (0, T]$ için $W''(t) = m(t, \cdot) + n(t, \cdot)$ ifadesinin $H^{-2}(0, l)$ 'ye ait olduğunu görüyoruz. $\langle \cdot, \cdot \rangle : H^{-2}(0, l) \times H_0^2(0, l) \rightarrow \mathbb{R}$ eşleşmesi $H^{-2}(0, l)$ ve $H_0^2(0, l)$ arasındaki ikili eşleştirme için kullanılır.

Yukarıdaki tanımlara ve gösterimlere dayanarak, problem (1.1)'in genelleştirilmiş (zayıf) çözümünün tanımı şu şekildedir.

Tanım 1.0.1. *Aşağıdaki koşulları sağlayan $W : [0, T] \mapsto H_0^2(0, l)$ fonksiyonuna problem (1.1)'in genelleştirilmiş çözümüdür denir:*

- (a) $W \in L^2(0, T; H_0^2(0, l))$, $W' \in L^2(0, T; L^2(0, l))$ ve $W'' \in L^2(0, T; H^{-2}(0, l))$;
(b) h.h. $t \in (0, T]$ için,

$$\langle W''(t), v \rangle + (\eta W'(t), v) + a(W(t), v) = \langle \Xi(t), v \rangle \quad \forall v \in H_0^2(0, l),$$

- (c) $W(0) = p$ ve $W'(0) = q$.

Kaynak [3] deki §5.9 Teorem 4'e göre,

$$W \in C([0, T]; L^2(0, l)) \quad \text{ve} \quad W' \in C([0, T]; H^{-2}(0, l))$$

olarak yazılabilir.

BÖLÜM 2

SONLU BOYUTLU ALTUZAYDA GALERKİN YÖNTEMİ VE DÜZGÜN SINIRLAMA

Bu bölümde, yaklaşık problem dizisi üzerine Galerkin metodunu ele alıyoruz. Öncelikle düzgün $\{\phi_i : i \in \mathbb{N}\}$ fonksiyonlarının $L^2(0, l)$ 'nin ortonormal tabanı ve $H_0^2(0, l)$ 'nin ortogonal tabanı olduğunu farzedelim (aynı zamanda $H_0^1(0, l)$ 'nin ortogonal tabanıdır). Örneğin, aşağıdaki özdeğer probleminin zayıf çözümü olarak $\phi_i \in H_0^2(0, l)$ seçilebilir:

$$\phi_i''''(x) = \lambda_i \phi_i(x), \quad \forall x \in (0, l).$$

Bu özfonksiyonlar, aşağıdaki gibi normalleştirilebilir:

$$(\phi_i, \phi_j) = \delta_{i,j} \quad \text{ve} \quad (\phi_i'', \phi_j'') = \lambda_i \delta_{i,j}.$$

Bu işlevlerin normalleştirilmemiş açık biçimi [14]'te bulunabilir. Aslında, bu özfonksiyonlar $H_0^2(0, l)$ uzayında $a(\cdot, \cdot)$ iç çarpımı tarafından bir ortogonal taban oluştururlar. Sabit n için, $H_0^2(0, l)$ 'nin n boyutlu altuzayı $V_n := \text{span}\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n\}$ şeklinde tanımlanabilir ve $W_n(t) := w_n(x, t) \in V_n$ h.h. $t \in [0, T]$ için aşağıdaki formda bir Galerkin yaklaşımı aranır.

$$W_n(t) = \sum_{i=1}^n w_{n,i}(t) \phi_i \quad (2.1)$$

Burada $W_n(t)$ 'nin (1.4)'ün benzer analogunu sağlaması için $w_{n,i}(t)$ katsayılarını buluruz. Yani:

h.h. $t \in [0, T]$ için aşağıdaki denklem sağlanmalıdır. Her $v \in V_n$ için,

$$\begin{cases} (W_n''(t), v) + (\eta W_n'(t), v) + a(W_n(t), v) = \langle \Xi(t), v \rangle, \\ W_n(0) = \Pi_n p, \quad W_n'(0) = \Pi_n q \end{cases} \quad (2.2)$$

Burada $\Pi_n : L^2(0, l) \rightarrow V_n$ ortogonal bir izdüşümü belirtir öyleki, $h \in L^2(0, l)$ için:

$$\Pi_n h = \sum_{i=1}^n h_i \phi_i \text{ burada } h_i = (h, \phi_i)' \text{ dir.}$$

Bu nedenle $\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n\}$ tarafından gerilen n boyutlu V_n altuzayında $W(t)$ 'nin $W_n(t)$ olan bir yaklaşık çözümünü arıyoruz.

Teorem 2.0.1. (1.2) ve (1.5) koşulları sağlansın. O zaman $n = 1, 2, 3, \dots$ için (2.2)'nin (2.1) formuna sahip tek bir çözümü vardır.

Kanıt. $\{\phi_i : i \in \mathbb{N}\}$ kümesi $L^2(0, l)$ 'nin bir ortonormal tabanı ve (2.1)'in $W_n(t)$ formu olduğundan aşağıdaki ifadeyi elde ederiz.

$$(W_n'', \phi_j) = \sum_{i=1}^n w_{n,i}''(t)(\phi_i, \phi_j) = w_{n,j}''(t). \quad (2.3)$$

ve ayrıca

$$(\eta W_n', \phi_j) = \sum_{i=1}^n w_{n,i}'(t)(\eta \phi_i, \phi_j) \text{ ve } a(W_n, \phi_j) = \sum_{i=1}^n w_{n,i}(t)a(\phi_i, \phi_j). \quad (2.4)$$

$a_{i,j} := a(\phi_i, \phi_j)$, $\eta_{i,j} = (\eta \phi_i, \phi_j)$ ve $\xi_j(t) := \langle \Xi(t), \phi_j \rangle$ şeklinde tanımlansın. Her $j = 1, \dots, n$, (2.2) için $v = \phi_j$ seçilerek homojen olmayan sabit katsayılı doğrusal ODE için aşağıdaki problemi ifade eder:

$$\begin{cases} w_{n,j}''(t) + \sum_{i=1}^n [\eta_{i,j} w_{n,i}'(t) + a_{i,j} w_{n,i}(t)] = \xi_j(t) \text{ for } t \in (0, T], \\ w_{n,j}(0) = (p, \phi_j), \quad w_{n,j}'(0) = (q, \phi_j). \end{cases} \quad (2.5)$$

Bu lineer adi türevli denklemler (ATD) sistemi $\vec{w}_n = [w_{n,1}, \dots, w_{n,n}]^T$ vektör biçiminde yazılabilir

$$\vec{w}_n''(t) + M \vec{w}_n'(t) + N \vec{w}_n = \vec{\xi}(t) \text{ for } t \in (0, T], \quad (2.6)$$

başlangıç koşulları $\vec{w}_n(0) = [(p, \phi_1), \dots, (p, \phi_n)]^T$ ve $\vec{w}_n'(0) = [(q, \phi_1), \dots, (q, \phi_n)]^T$ olsun. $M = [\eta_{i,j}]_{n \times n}$ ve $N = [a_{i,j}]_{n \times n}$ sabit matrisler ve $\vec{\xi} = [\xi_1, \dots, \xi_n] \in L^2(0, T; \mathbb{R}^n)$ olduğundan, ATD lerin standart teorisini takiben denklem (2.7)'nin $\vec{w}_n \in C^1([0, T]; \mathbb{R}^n)$, $\vec{w}_n' \in C([0, T]; \mathbb{R}^n)$ ve $\vec{w}_n'' \in L^2(0, T; \mathbb{R}^n)$ olacak şekilde tek bir çözümü vardır. Bu nedenle (2.2)'ye karşılık gelen yaklaşık çözüm mevcuttur, benzersizdir ve aşağıdaki ifadeye aittir.

$$W_n \in C^1([0, T]; V_n), \quad W_n' \in C([0, T]; V_n) \text{ ve } W_n'' \in L^2(0, T; V_n).$$

□

(1.1)'in zayıf çözümüne yakınsayan W_n 'in yaklaşık çözümünün alt dizisinin bir limitini göstermek için, aşağıdaki Gronwall [3] eşitsizliğinin diferansiyel formunu belirtmeliyiz.

Lemma 2.0.2. $y : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ mutlak sürekli bir fonksiyon olsun, $z(t)$ ve $w(t)$ $[0, T]$ üzerinde $t \in [0, T]$ için aşağıdaki eşitsizliği sağlayan negatif olmayan iki sürekli fonksiyon olmak üzere,

$$y'(t) \leq w(t)y(t) + z(t).$$

Bu durumda tüm $t \in [0, T]$ için

$$y(t) \leq e^{\int_0^t w(s)ds} \left[y(0) + \int_0^t z(s)ds \right].$$

sağlanır.

Şimdi aşağıdaki düzgün yaklaşımı ispatlamaya hazırız.

Teorem 2.0.3. W_n (2.2)'nin tek çözümü olsun. O zaman $C = C(l, T, \eta, r, J)$ (sadece belirtilen şartlara bağlı) olacak şekilde bir sabit vardır, öyle ki $n = 1, 2, \dots$ için aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir:

$$\begin{aligned} \max_{t \in [0, T]} \left(\|W_n'(t)\|_{L^2(0, l)}^2 + \|W_n(t)\|_{H_0^2(0, l)}^2 \right) + \|W_n''\|_{L^2(0, T; H^{-2}(0, l))}^2 \\ \leq C \left(\|\Xi\|_{L^2(0, T; H^{-2}(0, l))}^2 + \|p\|_{H_0^2(0, l)}^2 + \|q\|_{L^2(0, l)}^2 \right) \end{aligned} \quad (2.7)$$

Kanıt. (2.2) denklemini $w'_{n,j}$ ile çarpıp $j = 1 : n$ toplamını alalım, bu durumda her $t \in (0, T]$ için aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$(W_n''(t), W_n'(t)) + (\eta W_n'(t), W_n'(t)) + a(W_n(t), W_n'(t)) = \langle \Xi(t), W_n'(t) \rangle, \quad (2.8)$$

Riesz teoremine göre, tüm $t \in (0, T)$ için

$$\langle \Xi(t), W_n'(t) \rangle = (\nu_t, W_n'(t)) \quad \text{ve} \quad \|\nu_t\|_{H_0^2(0, l)} = \|\Xi(t)\|_{H^{-2}(0, l)}$$

olmak üzere $\nu_t \in H_0^2(0, l)$ şeklinde tek bir eleman vardır.

Ayrıca aşağıdaki özellikleri (2.8)'e uygularsak;

$$(W_n''(t), W_n'(t)) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|W_n'(t)\|_{L^2(0, l)}^2 \quad \text{ve} \quad a(W_n(t), W_n'(t)) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} a(W_n(t), W_n(t))$$

Cauchy - Bunyakovsky - Schwarz (CBS) eşitsizliği ile aşağıdaki ifadeyi elde ederiz.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\|W'_n(t)\|_{L^2(0,l)}^2 + a(W_n(t), W_n(t)) \right] + \|\sqrt{\eta}W'_n(t)\|_{L^2(0,l)}^2 \\ \leq 2\|W'_n(t)\|_{L^2(0,l)}\|\nu_t\|_{L^2(0,l)}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Devamında $\|\nu_t\|_{L^2(0,l)} \leq \|\nu_t\|_{H^2(0,l)} = \|\Xi(t)\|_{H^{-2}(0,l)}$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\|W'_n(t)\|_{L^2(0,l)}^2 + a(W_n(t), W_n(t)) \right] + \|\sqrt{\eta}W'_n(t)\|_{L^2(0,l)}^2 \\ \leq 2\|W'_n(t)\|_{L^2(0,l)}\|\Xi(t)\|_{H^{-2}(0,l)} \end{aligned} \quad (2.10)$$

elde edilir.

Bu yaklaşımda, $\|\sqrt{\eta}W'_n(t)\|_{L^2(0,l)}^2$ sönümleme terimi atlanabilir ve sağ taraftaki terim aşağıdaki gibi Young eşitsizliği ile ayrılabilir.

$$\frac{d}{dt} \left[\|W'_n(t)\|_{L^2(0,l)}^2 + a(W_n(t), W_n(t)) \right] \leq \|W'_n(t)\|_{L^2(0,l)}^2 + \|\Xi(t)\|_{L^2(0,l)}^2 \quad (2.11)$$

Ayrıca, bi-linear $a(.,.)$ formu $H_0^2(0, l)$ üzerinde bir norm tanımladığı için,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\|W'_n(t)\|_{L^2(0,l)}^2 + a(W_n(t), W_n(t))) \\ \leq (\|W'_n(t)\|_{L^2(0,l)}^2 + a(W_n(t), W_n(t)) + \|\Xi(t)\|_{H^{-2}(0,l)}^2) \end{aligned} \quad (2.12)$$

elde edilir. Şimdi $z(t) = \|\Xi(t)\|_{H^{-2}(0,l)}^2$, $w(t) = 1$ ve $y(t) = \|W'_n(t)\|_{L^2(0,l)}^2 + a(W_n(t), W_n(t))$ varsayımlarıyla Gronwall eşitsizliğini Lemma 3'e uygulayalım, eşitsizlik (2.12) aşağıdaki ifadeye dönüşür:

$$\begin{aligned} \|W'_n(t)\|_{L^2(0,l)}^2 + a(W_n(t), W_n(t)) \\ \leq e^t \left(\|W'_n(0)\|_{L^2(0,l)}^2 + a(W_n(0), W_n(0)) + \int_0^t \|\Xi(t)\|_{H^{-2}(0,l)}^2 dt \right). \end{aligned}$$

$r(x)$ ve $J(x)$ katsayılarının (1.2) üzerindeki varsayımları sayesinde, $a(W_n(t), W_n(t))$ terimi alttan $\underline{C}\|W_n(t)\|_{H_0^2(0,l)}^2$ ile ve $a(W_n(0), W_n(0))$ terimi üstten $\overline{C}\|W_n(0)\|_{H_0^2(0,l)}^2$ ile $\underline{C}, \overline{C} \in \mathbb{R}^+$ için sınırlandırılabilir.

$$\begin{aligned} \|W'_n(t)\|_{L^2(0,l)}^2 + \underline{C}\|W_n(t)\|_{H_0^2(0,l)}^2 \\ \leq e^t \left(\|W'_n(0)\|_{L^2(0,l)}^2 + \overline{C}\|W_n(0)\|_{H_0^2(0,l)}^2 + \int_0^t \|\Xi(t)\|_{H^{-2}(0,l)}^2 dt \right). \end{aligned}$$

Projeksiyon $\|W'_n(0)\|_{L^2(0,l)} \leq \|q\|_{L^2(0,l)}$ eşitsizliğinden dolayı, yukarıdaki hesaplama aşağıdaki gibi yazılabilir

$$\|W'_n(t)\|_{L^2(0,l)}^2 + \|W_n(t)\|_{H_0^2(0,l)}^2 \leq C_1 e^t (\|q\|_{L^2(0,l)}^2 + \|p\|_{H_0^2(0,l)}^2 + \|\Xi\|_{L^2(0,T;H^{-2}(0,l))}^2).$$

Sonra $t \in [0, T]$ üzerinden maksimum alınarak aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\begin{aligned} \max_{t \in [0, T]} [\|W'_n(t)\|_{L^2(0,l)}^2 + \|W_n(t)\|_{H_0^2(0,l)}^2] \\ \leq C_2 [\|q\|_{L^2(0,l)}^2 + \|p\|_{H_0^2(0,l)}^2 + \|\Xi\|_{L^2(0,T;H^{-2}(0,l))}^2]. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Diğer taraftan, eğer herhangi bir $\varpi \in H_0^2(0, l)$ elemanını $\|\varpi\|_{H^2(0,l)} = 1$ ile alırsak, ve V_n uzayını $\text{span}\{\phi_i\}_{i=1}^n$ olarak tanımlayıp, $\phi \in V_n$ ve $\psi \in V_n^\perp$ olmak üzere $\varpi = \phi + \psi$ şeklinde ϖ gösterilebilir, sonrasında

$$(W_n''(t), \varpi) = (W_n''(t), \phi) = \langle \Xi(t), \phi \rangle - a(W_n(t), \phi) - (\eta W_n'(t), \phi) \quad (2.14)$$

elde edilir. $H_0^2(0, l)$ 'de Pisagor teoremini kullanarak, $\|\phi\|_{H_0^2(0,l)} \leq 1$ ve CBS eşitsizliklerini elde ederiz ve (2.14) aşağıdaki ifadeye dönüşür.

$$|(W_n''(t), \varpi)| \leq \bar{C}_1 \left(\|\Xi(t)\|_{H^{-2}(0,l)} + \|W_n(t)\|_{H_0^2(0,l)} + \|W_n'(t)\|_{L^2(0,l)} \right).$$

H^{-2} -normuna tekrardan bakalım

$$\|v\|_{H^{-2}(0,l)} := \sup\{ \langle v, \varpi \rangle : \varpi \in H_0^2(0, l) \text{ ile } \|\varpi\|_{H^2(0,l)} = 1 \}.$$

Sonra $\varpi \in H_0^2(0, l)$ üzerinden $\|\varpi\|_{H^2(0,l)} = 1$ ile son eşitsizliğin supremumu alınarak ve 0'dan T 'ye her iki tarafın karesini alırsak, aşağıdaki ifadeyi elde ederiz.

$$\begin{aligned} \|W_n''\|_{L^2(0,T;H^{-2}(0,l))}^2 &= \int_0^T \|W_n''(t)\|_{H^{-2}(0,l)}^2 dt \\ &\leq \bar{C}_2 \int_0^T \|\Xi(t)\|_{H^{-2}(0,l)}^2 + \|W_n(t)\|_{H_0^2(0,l)}^2 + \|W_n'(t)\|_{L^2(0,l)}^2 dt \\ &\leq \bar{C}_2 (\|\Xi\|_{L^2(0,T;H^{-2}(0,l))}^2 + \|p\|_{H_0^2(0,l)}^2 + \|q\|_{L^2(0,l)}^2) \end{aligned}$$

Bu eşitsizlik (2.13) ile birleştirildi ve $C = C_2 + \bar{C}_2$ alınarak (2.7)'deki istenilen sonuç elde edilir. \square

BÖLÜM 3

ÇÖZÜMÜN VARLIK VE TEKLİK ÖZELLİKLERİ

Çalışmanın bu bölümünde, (1.1)'in zayıf bir çözümünün varlığını ve teklliğini kanıtıyoruz. Aslında, varlık kısmındaki ispat teknikleri, [15] ve [3]'de kapsamlı olarak ele alınan hiperbolik durum için kullanılan benzer fikirlere dayanmaktadır.

3.1 Varlık Teoremi

Önceki bölümde elde edilen W_n yaklaşık çözümleri ve bunların türevleri sayesinde sırasıyla $L^\infty(0, T; H_0^2(0, l))$ ve $L^\infty(0, T; L^2(0, l))$ ve $L^2(0, T; H^{-2}(0, l))$ içindeki $\{W_n\}$, $\{W_n'\}$ ve $\{W_n''\}$ dizileri için bir sınırlılık özelliği elde edildi. Fonksiyonel analizin sonuçlarından, eğer yaklaşık çözümlerin dizisi bir yansımali Banach uzayında sınırlandırılmışsa, o zaman bu sınırlı dizinin zayıf yakınsak alt dizisi var olan ve (1.1)'in zayıf çözümüne yakınsayan zayıf ön kompakt olduğunu söyleyebiliriz. Sadece $\{W_n''\}$ yansımali Banach uzayının özel formu olan Hilbert uzayında sınırlı olmasına rağmen, $\{W_n\}$ ve $\{W_n'\}$ yansımali olmayan L^∞ 'da sınırlıdır. Öte yandan zayıf*-topoloji, ikili Banach uzaylarında dizilerin istenen yakınsama özelliği için çok kullanışlı bir araçtır. Ayrıntılı olarak, V bir Banach uzayıysa, duali olan V' uzayındaki herhangi bir kapalı birim küre zayıf*-kompaktır (bu, zayıf* topolojide kompakt anlamına gelir) [16]. Bu sonuç Banach-Alaoglu teoremi olarak bilinir ve zayıf* topolojinin en önemli özelliklerinden biridir. Bu teoremin dizi versiyonu (2.7)'deki düz yakınsaması nedeniyle zayıf*-limit durumunda $\{W_n\}$ ve $\{W_n'\}$ dizilerinin yakınsak alt dizilerinin olduğunu belirtir. Bizim durumlarımızda, $\{W_n\}$ ve

$\{W'_n\}$ için karşılık gelen uzaylar sırasıyla $L^\infty(0, T; H_0^2(0, l))$ ve $L^\infty(0, T; L^2(0, l))$ dual uzaylara izomorftir.

Teorem 3.1.1. (1.2) ve (1.5) içindeki koşullar geçerli olsun. O zaman (1.1) denkleminin zayıf bir çözümü vardır.

Kanıt. Yukarıdaki incelemeye ve önceki teoremdaki enerji sınırlamasına göre, $\{W_{n_m}\}$, $\{W'_{n_m}\}$ ve $\{W''_{n_m}\}$ alt dizileri ve $W_{n_m} \rightharpoonup^* W \in L^\infty(0, T; H_0^2(0, l))$, $W'_{n_m} \rightharpoonup^* W' \in L^\infty(0, T; L^2(0, l))$ ve $W''_{n_m} \rightharpoonup W'' \in L^2(0, T; H^{-2}(0, l))$ olacak şekilde W , W' ve W'' limit fonksiyonları mevcuttur. Üstelik,

$$\begin{aligned}\langle W_{n_m}, v \rangle_\alpha &= \int_0^T \langle W_{n_m}(t), v(t) \rangle dt \rightarrow \int_0^T \langle W(t), v(t) \rangle \quad \forall v \in L^1(0, T; H^{-2}(0, l)) \\ \langle W_{n_m}, v \rangle_\beta &= \int_0^T \langle W'_{n_m}(t), v(t) \rangle dt \rightarrow \int_0^T \langle W'(t), v(t) \rangle \quad \forall v \in L^1(0, T; L^2(0, l)) \\ \langle W_{n_m}, v \rangle_\gamma &= \int_0^T \langle W''_{n_m}(t), v(t) \rangle dt \rightarrow \int_0^T \langle W''(t), v(t) \rangle \quad \forall v \in L^2(0, T; H_0^2(0, l))\end{aligned}$$

Burada $\langle \cdot, \cdot \rangle_\alpha$ ve $\langle \cdot, \cdot \rangle_\beta$ sırasıyla zayıf* topolojide $L^\infty(0, T; H_0^2(0, l)) - L^1(0, T; H^{-2}(0, l))$ ve $L^\infty(0, T; L^2(0, l)) - L^1(0, T; L^2(0, l))$ dualite eşleşmesini temsil ederler. Ek olarak, $\langle \cdot, \cdot \rangle_\gamma$ zayıf topolojide $L^2(0, T; H^{-2}(0, l)) - L^2(0, T; H_0^2(0, l))$ dualite eşleşmesini temsil eder.

Şimdi $\varrho \in C_0^\infty(0, T)$ olacak şekilde bir test fonksiyonu seçelim ve $k \leq n$ olarak $\varpi(t) = \varrho(t)v$ olacak şekilde bir $\varpi : [0, T] \rightarrow V_k \subset H_0^2(0, l)$ fonksiyonunu tanımlıyalım. (2.2)'yi $\varrho(t)$ ile çarparsak, aşağıdaki ifadeyi elde ederiz.

$$\langle W''_n(t), \varpi(t) \rangle + (\eta W'_n(t), \varpi(t)) + a(W_n(t), \varpi(t)) = \langle \Xi(t), \varpi(t) \rangle \quad (3.1)$$

$n = n_m$ seçerek (3.1)'e uygulayıp t 'e göre integralini alırsak

$$\int_0^T \langle W''_{n_m}(t), \varrho(t)v \rangle + (\eta W'_{n_m}(t), \varrho(t)v) + a(W_{n_m}(t), \varrho(t)v) dt = \int_0^T \langle \Xi(t), \varrho(t)v \rangle dt.$$

elde edilir. Sonrasında (3.1)'i kullanarak $m \rightarrow \infty$ olacak şekilde limit alınırsa,

$$\int_0^T \langle W''(t), \varrho(t)v \rangle + (\eta W'(t), \varrho(t)v) + a(W(t), \varrho(t)v) dt = \int_0^T \langle \Xi(t), \varrho(t)v \rangle dt. \quad (3.2)$$

elde edilir. $W \in L^\infty(0, T; H_0^2(0, l)) \quad \forall \varrho \in C_0^\infty(0, T)$ ve $v \in H_0^2(0, l)$ sağladığından dolayı,

$$\int_0^T \varrho(t) [\langle W''(t), v \rangle + (\eta W'(t), v) + a(W(t), v)] dt = \int_0^T \varrho(t) \langle \Xi(t), v \rangle dt \quad (3.3)$$

elde edilir. Hemen her $t \in [0, T]$ için,

$$\langle W''(t), v \rangle + (\eta W'(t), v) + a(W(t), v) = \langle \Xi(t), v \rangle \quad \forall v \in H_0^2(0, l). \quad (3.4)$$

Dahası, $W' \in C([0, T]; H^{-2}(0, l))$ olduğu biliniyor ([3], §5.9, Teorem 2). Bu sonucu $W(0) = p$ ve $W'(0) = q$ olduğunu göstermek için kullanıyoruz. İlk olarak, $\varrho \in C^\infty([0, T])$ ile $\varrho(0) = \varrho(T) = \varrho'(T) = 0$, $\varrho'(0) = 1$ ve $v \in H_0^2(0, l)$ ifadelerini seçiyoruz. Sonra (3.2)'ü kullanarak ve kısmi integrasyon uygulanılarak aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\begin{aligned} \int_0^T (W(t), \varrho''(t)v) + (\eta W, \varrho'(t)v) + a(W(t), \varrho(t)v) dt + (W(0), v) dt \\ = \int_0^T \langle \Xi(t), \varrho(t)v \rangle dt. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Bu ifade düzenlenirse $\forall \varrho \in C^\infty([0, T])$ ve $v \in H_0^2(0, l)$ için aşağıdaki denklem elde edilir.

$$(W(0), v) = \int_0^T \varrho(t) [\langle \Xi(t), v \rangle - a(W(t), v)] dt + \varrho'(t)(\eta W, v) - \varrho''(t)(W(t), v) dt.$$

Benzer bir şekilde bu eşitlik $\forall \varrho \in C^\infty([0, T])$ ve $v \in V_k \subset H_0^2(0, l)$ olarak W_n için de yazılabilir.

$$(W_n(0), v) = \int_0^T \varrho(t) [\langle \Xi(t), v \rangle - a(W_n(t), v)] dt + \varrho'(t)(\eta W_n, v) - \varrho''(t)(W_n(t), v) dt.$$

n yerine n_m yazıp $m \rightarrow \infty$ limit alınırsa $\forall \varrho \in C^\infty([0, T])$ ve $v \in H_0^2(0, l)$ için aşağıdaki elde edilir.

$$(p, v) = \int_0^T \varrho(t) [\langle \Xi(t), v \rangle - a(W(t), v)] dt + \varrho'(t)(\eta W, v) - \varrho''(t)(W(t), v) dt.$$

Sonrasında $W(0) = p$ olacak şekilde $(W(0), v) = (p, v) \quad \forall v \in H_0^2(0, l)$ elde edilir.

Benzer hesaplama $W'(0) = q$ için de yapılabilir. Bu durumda, $\varrho'(0) = \varrho(T) = \varrho'(T) = 0$, $\varrho(0) = 1$ ve $v \in H_0^2(0, l)$ ile birlikte $\varrho \in C^\infty([0, T])$ seçilebilir. Sonra elde edilen form $(W'(0), v) = (q, v) \quad \forall v \in H_0^2(0, l)$ olur, bu da $W'(0) = q$ anlamına gelir. Böylece, $W(0) = p$ ve $W'(0) = q$ istenilen sonuçları elde ederiz ve bu W 'nin (1.1)'in zayıf bir çözümü olduğunu gösterir. \square

3.2 Teklik Teoremi

Bölümün geri kalan kısmında, zayıf çözümün tekliği kanıtlanmıştır. Literatürde, kenetlenmiş Euler Bernoulli kiriş modelinin temel formu için [7] ve [17]'de iki bağımsız yaklaşım önerilmiştir. İlk yaklaşım enerji sınırlamasına dayanırken, ikincisi hiperbolik denklem [3] için kullanılan tekniğin bir uyarlamasıdır. Burada kullanılan metod ikinci yaklaşımının devamı olarak değerlendirilebilir.

Teorem 3.2.1. (1.2) ve (1.5) içindeki koşullar geçerli olsun. O zaman problem (1)'in zayıf çözümü Tanım 1'e göre tektir.

Kanıt. $t \in [0, T]$ için denklem (1.4)'ü sağlayan W_1 ve W_2 fonksiyonların olduğunu varsayalım. $\bar{W} = W_1 - W_2$ fonksiyonunu tanımlayalım. Açık ki her $\varpi(t) \in H_0^2(0, l)$ için, aşağıdaki ifade her t için sağlanır.

$$\begin{cases} \langle \bar{W}''(t), \varpi(t) \rangle + (\eta \bar{W}'(t), \varpi(t)) + a(\bar{W}(t), \varpi(t)) = 0 \\ \bar{W}(0) = 0, \quad \bar{W}'(0) = 0. \end{cases} \quad (3.6)$$

Teoremin bu kısmını ispatlamak için $\bar{W} \equiv 0$ olduğunu göstermek yeterlidir. Önce keyfi $t_0 \in [0, T]$ seçiyoruz ve

$$t \in [0, t_0] \text{ için } \varpi(t) = \int_{t_0}^t \bar{W}(s) ds \text{ ve } t \in (t_0, T] \text{ için } \varpi(t) = 0$$

olacak şekilde $\varpi(t) \in H_0^2(0, l)$ tanımlıyoruz. $\bar{W} \in L^\infty(0, T; H_0^2(0, l))$ ve $\varpi(t_0) = 0$ olduğundan, $\varpi \in C([0, T]; H_0^2(0, l))$ olduğu açıktır. Sonra (3.6)'yı 0 ve t_0 aralığında integrallersek

$$\int_0^{t_0} \langle \bar{W}''(t), \varpi(t) \rangle + (\eta \bar{W}'(t), \varpi(t)) + a(\bar{W}(t), \varpi(t)) dt = 0$$

ifadesi elde edilir. $\bar{W}(0) = \bar{W}'(0) = 0$ ve $\varpi(t_0) = 0$ ile kısmi integrasyon kullanılarak aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\int_0^{t_0} (\bar{W}'(t), \varpi'(t)) + (\eta \bar{W}(t), \varpi'(t)) - a(\bar{W}(t), \varpi(t)) dt = 0$$

Diğer taraftan, $\varpi(t)$ tanımından,

$$\int_0^{t_0} (\bar{W}'(t), \bar{W}(t)) + (\eta \bar{W}(t), \bar{W}(t)) - a(\varpi'(t), \varpi(t)) dt = 0$$

elde etmek için $\varpi'(t) = \overline{W}(t)$ yerine koyarız. Bu da aşağıdaki ifadeye eşittir.

$$\int_0^{t_0} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} [(\overline{W}(t), \overline{W}(t)) - a(\varpi(t), \varpi(t))] + (\eta \overline{W}(t), \overline{W}(t)) dt = 0.$$

Bu integral şu şekilde ayrılabilir:

$$\frac{1}{2} [(\overline{W}(t_0), \overline{W}(t_0)) + a(\varpi(0), \varpi(0))] + \int_0^{t_0} (\eta \overline{W}(t), \overline{W}(t)) dt = 0. \quad (3.7)$$

(3.7)'nin sol tarafındaki her terim negatif olmadığından, $\overline{W}(t_0) = 0$ elde ederiz. Aslında bu kanıtlamak istediğimiz sonuçtur, çünkü $t_0 \in [0, T]$ 'de keyfi bir noktadır. Sonuç olarak gösterdik ki $[0, T]$ üzerindeki hemen her t için $\overline{W}(t) = W_1(t) - W_2(t) = 0$, bu da var olan zayıf çözümün tek olduğu manasına gelir(1.1). \square

BÖLÜM 4

SAYISAL ÖRNEKLER

Önceki bölümlerde sıkı kenetli kiriş denklemi için çözülebilirlik incelemesi yapıldı. Bu inceleme Dirichlet tip sınır koşul için yapılsa da farklı tip sınır koşullar için de genelleştirilebilir. Özellikle mühendislik uygulamalarında öne çıkan bir diğer model ise “Simple Supported” olarak bilinen çift taraflı dayanaklara sahip kiriş denklemdir. Bu denklem aşağıdaki gibi verilir.

$$\begin{cases} \rho(x)w_{tt} + \eta(x)w_t + (r(x)w_{xx})_{xx} - (J(x)w_x)_x = \xi(x, t), & (x, t) \in \Omega_T, \\ w(0, t) = w_{xx}(0, t) = 0, \quad w(l, t) = w_{xx}(l, t) = 0, & t \in (0, T), \\ w(x, 0) = p(x), \quad w_t(x, 0) = q(x), & x \in \Omega. \end{cases} \quad (4.1)$$

Burada görüldüğü üzere (1.1) denkleminde tek farkı sınır koşullarda sadece Dirichlet değil aynı zamanda Neuman koşulunda bulunmasıdır. Bu modelin sıkı kenetli modele göre avantajı özfonksiyonlarının daha kolay hesaplanabilmesidir. Bu modelde ilgili özdeğer problemi aşağıdaki gibidir. $\phi_i \in H^2(0, l) \cap H_0^1(0, l)$ için

$$\phi_i''''(x) = \lambda_i \phi_i(x), \quad \forall x \in (0, l). \quad (4.2)$$

$$\phi_i(0) = \phi_i''(0) = \phi_i(l) = \phi_i''(l) = 0 \quad (4.3)$$

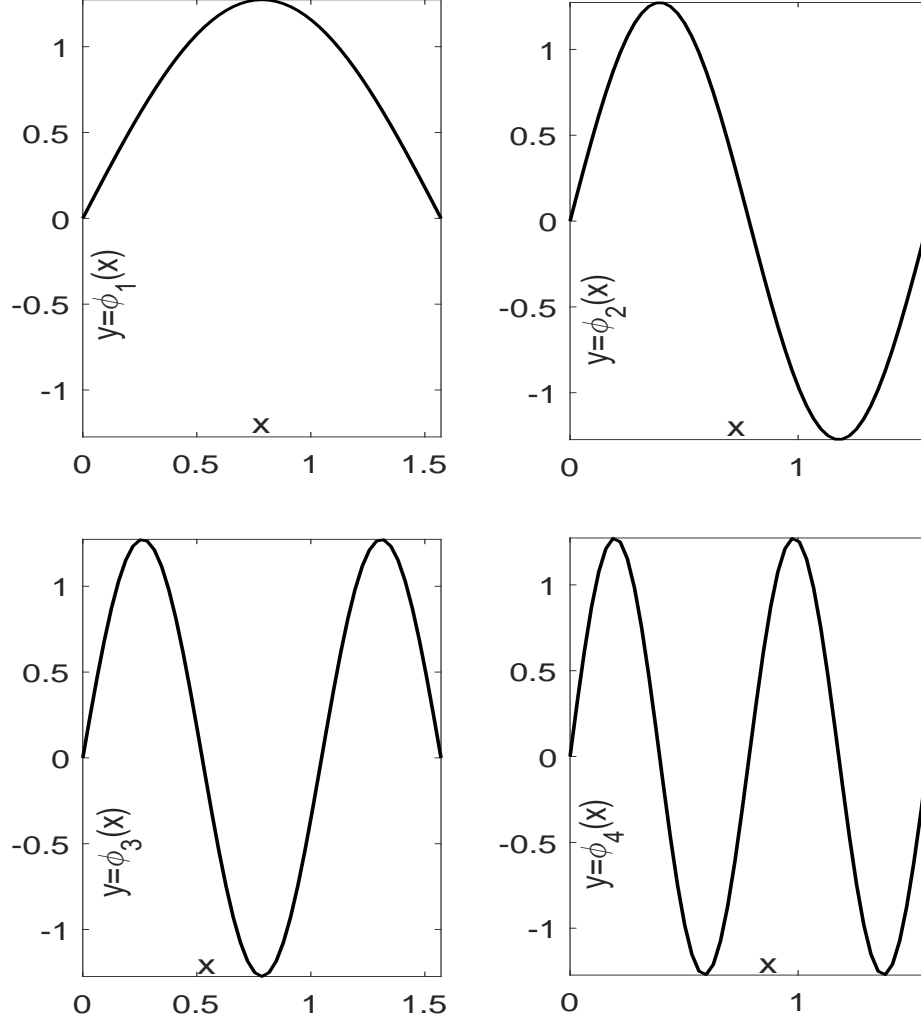
Bu özfonksiyonlar, ortonormal formda şu şekilde yazılabilirler:

$$\phi_i(x) = \frac{2}{l} \sin\left(\frac{i\pi x}{l}\right)$$

Bu fonksiyonların Galerkin çözümü belirlemede önemli bir rolü vardır. Biliyoruz ki yaklaşık çözümler (2.1) formunda olmalıdır.

$$W_n(t) = \sum_{i=1}^n w_{n,i}(t) \phi_i \quad (4.4)$$

Bu aşamadan sonra $w_{n,i}(t)$ katsayılarının belirlenmesi Bölüm 2 de belirtildiği gibi hesaplanabilir. Aşağıda ayrıca ilk 4 özfonksiyonlarının grafikleri $l = \pi/2$ ve $T = 1/5$ için verilmiştir. Galerkin yaklaşımı ile elde edilen $\{W_n\}$ serisinin



Şekil 4.1: Öz fonksiyonlar $\phi_i(x)$.

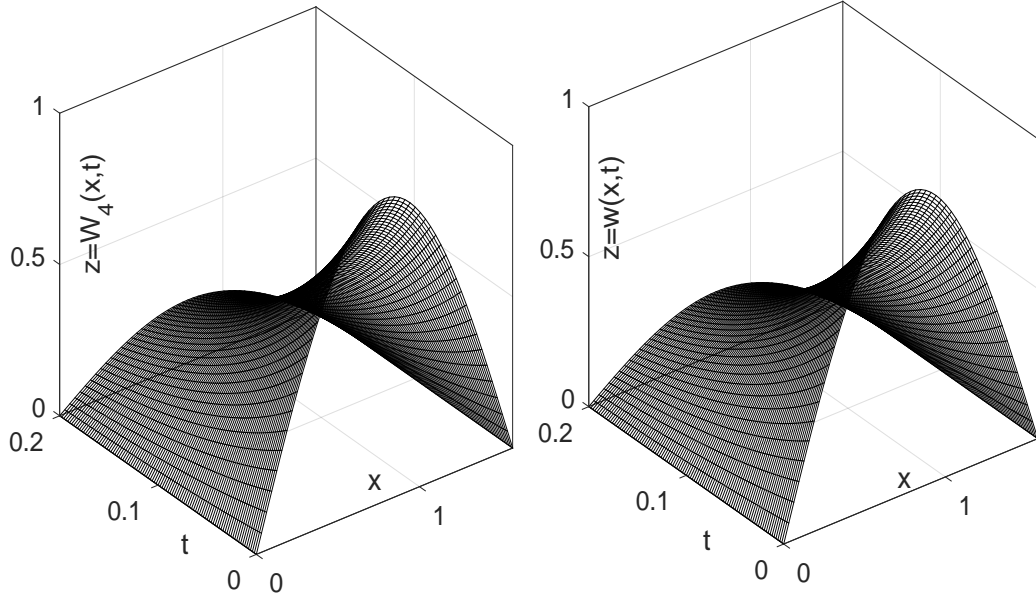
performansını göstermek için aşağıdaki test problemi inceleyelim:

$$\begin{cases} w_{tt} + 8w_t + 1/16w_{xxxx} = 0, & (x, t) \in \Omega_T := (0, \pi/2) \times (0, 1/5), \\ w(0, t) = w_{xx}(0, t) = 0, & w(\pi/2, t) = w_{xx}(\pi/2, t) = 0, & t \in (0, 1/5), \\ w(x, 0) = \sin(2x), & w_t(x, 0) = (-\sqrt{15} - 4) * \sin(2x), & x \in \Omega := (0, \pi/2). \end{cases} \quad (4.5)$$

(4.5) probleminin tam çözümü aşağıdaki gibi verilebilir.

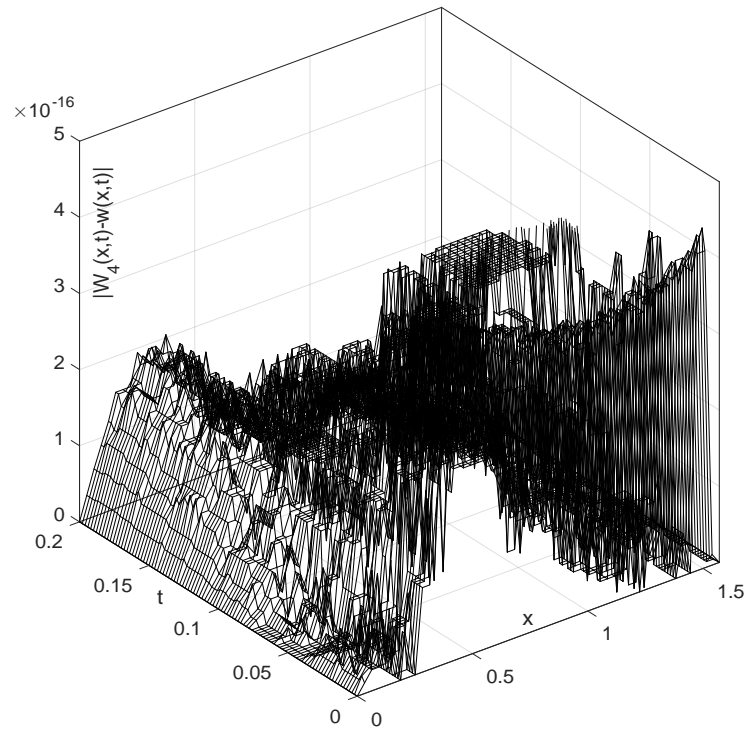
$$w(x, t) = \exp((-\sqrt{15} - 4)t) \sin(2x);$$

Bu fonksiyonu Galerkin yaklaşımından elde edilen W_4 ile kıyaslırsak aşağıdaki grafikleri elde edebiliriz. Grafiklerin birbiri ile aynı gözükmesi hatanın oldukça



Şekil 4.2: Galerkin yaklaşımı $W_4(x, t)$ (sol), tam çözüm $w(x, t)$ (sağ).

küçük olmasından kaynaklanmaktadır. Hata grafiği $|W_4(x, t) - w(x, t)|$ aşağıdaki grafikte görebiliriz. Mutlak hatanın grafikte görüldüğü gibi 10^{-16} seviyelerinde olması Galerkin yaklaşımının ne kadar etkin bir yöntem olduğunu göstermektedir. Ayrıca bu kadar iyi bir yaklaşımı (2.1) toplamında sadece 4 terim olarak elde etmiş olmak yöntemin ayrı bir pozitif özelliğidir. Bu durum zaten Fourier yönteminden bildiğimiz bir sonuçtur. Diğer taraftan incelenen test problem sabit katsayılı homojen bir denklem içermektedir. Açıkçası bu basit konfigürasyon sayesinde öz fonksiyonları $\phi_i(x)$ ve ilgili katsayılar $w_{n,i}(t)$ ler pratik olarak hesaplanabildi. Daha genel bir test problem alınmış olsaydı önemli bir nümerik hesaplama yükü olacaktı ve bunun için özel tekniklere ihtiyaç duyulacaktı. Bu durum da bu yöntemin bir dezavantajı olarak kabul edilebilir.



Şekil 4.3: Galerkin yaklaşımı $W_4(x, t)$ (sol), tam çözüm $w(x, t)$ (sag).

BÖLÜM 5

SONUÇ VE TARTIŞMA

Bu çalışmada, bir ray üzerindeki noktasal kütlenin hareketi için yeni bir model de içeren genel form Euler-Bernoulli kirişi için başlangıç sınır değer probleminin çözülebilirliği incelenmiştir. Zayıf çözümün varlığı ve tekliğinin ispatı aşamasında Galerkin yöntemini kullanarak, aynı zamanda yaklaşık çözümler için bir enerji sınırlaması yardımı ile zayıf çözüm teorisi geliştiriyoruz. İncelenen problem hem teorik olarak hem de uygulama açısından oldukça uzunca süredir bu alanda çalışan araştırmacıların dikkatini çekmiştir. Öte yandan, burada sunulan sonuçlar, farklı uygulamalarda kullanılan ve kiriş modellerine genişletilebilir. Ayrıca analizlere $h \in L^\infty(0, l)$ ve $h \geq 0$ varsayımı ile " $h(x)w$ " ek kuvvet terimi dahil edilebilir. Bu durumda, bu yeni terim bi-lineer fonksiyonel $a(\cdot, \cdot)$ içinde incelenebilir ve $a(\cdot, \cdot)$ pozitif tanımlılığı bozulmaz. Ayrıca ele alınan problemin katsayıları sadece mühendislik uygulamaları ile uyumlu uzay değişkenine bağlıdır. Katsayıların zaman değişkeni içermesi durumunda ilgili bi-lineer form $a(\cdot, \cdot; t)$ için sınırlılık ve süreklilik incelemesi gerekir. Bu bahsettiğimiz genellemeler ve çok boyutlu problemler de yeni birer araştırma konusu olarak seçilebilir.

KAYNAKLAR

- [1] Baysal O., Hasanov A., Solvability of the clamped Euler-Bernoulli beam equation *Applied Mathematics Letters*. vol. 93, pp. 85-90, 2019.
- [2] Aitken J. An account of some experiments on rigidity produced by centrifugal force. *Philosophical Magazine*. 1878; 5: 81-105.
- [3] Evans L.C. *Partial Differential Equations*. Rhode Island: American Mathematical Society; 2002.
- [4] Gladwell G.M.L. *Inverse problems in vibration (2nd ed.)*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers; 2004.
- [5] Morassi A. Damage detection and generalized Fourier coefficients. *Journal of Sound and Vibration*. 2007; 302: 229-259.
- [6] Balakrishnan A.V., Shubov M.A., Peterson C.A. Spectral analysis of coupled Euler-Bernoulli and Timoshenko beam model. *Z. Angew. Math. Mech.* 2004; 84(5): 291-313.
- [7] Hasanov A. Identification of an unknown source term in a vibrating cantilevered beam from final overdetermination. *Inverse Problems*. 2009; 25: 115015 (19pp).
- [8] Kawano A. Uniqueness in the identification of asynchronous sources and damage in vibrating beams. *Inverse Problems*. 2014; 30: 065008 (16pp).
- [9] Hasanov A., Baysal O. Identification of an unknown spatial load distribution in a vibrating cantilevered beam from final overdetermination. *Journal of Inverse and Ill-posed Problems*. 2015; 23: 85-102.
- [10] Hasanov A., Kawano A. Identification of unknown spatial load distributions in a vibrating Euler-Bernoulli beam from limited measured data. *Inverse Problems*. 2016; 32: 055004 (31pp).

- [11] Hasanov A., Baysal O. Identification of an unknown temporal and spatial load distributions in a vibrating Euler-Bernoulli beam from Dirichlet data. *Automatica*. 2016; 71: 106-117.
- [12] Adams R.A., Fournier J.J.F. *Sobolev Spaces*. Elsevier; 2003.
- [13] Renardy M., Rogers R. *An Introduction to Partial Differential Equations*. Springer; 2004.
- [14] Asmar N.H. *Partial Differential Equations with Fourier Series and Boundary Value Problems (2nd ed.)*. Pearson; 2004.
- [15] Hunter J.K. *Notes on Partial Differential Equations*. 2014.
- [16] Brezis H. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer; 2011.
- [17] Kawano A. Uniqueness in the determination of unknown coefficients of an Euler-Bernoulli beam equation with observation in an arbitrary small interval of time. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 2017; 452(1): 351-360.
- [18] Geist B., McLaughlin J.R. The Effect of Structural damping on nodes for the Euler-Bernoulli beam: A specific case study. *Appl. Math. Lett.* 1994; 7(3): 51-55.
- [19] Huajiang Ouyang H., Mottershead, J.E. A numerical-analytical combined method for vibration of a beam excited by a moving flexible body, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2007; 72 (10): 1181-1191.
- [20] Bajer C.I., Dyniewicz B., Shillor M. A Gao beam subjected to a moving inertial point load, *Mathematics and Mechanics of Solids*, 2017; 23 (3): 461-472.