

T.C.

İSTANBUL KÜLTÜR ÜNİVERSİTESİ

LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

**LİNEER OLMAYAN İKİLİ SCHRODINGER VE LİNEER OLMAYAN GÜÇLÜ
İKİLİ SCHRODINGER DENKLEMLERİNİN YAPI KORUYAN SAYISAL
YÖNTEMLERLE ÇÖZÜMÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**Pelin ŞAYLAN
1900005993**

Anabilim Dalı: Matematik ve Bilgisayar Bilimleri

Program: Matematik ve Bilgisayar Bilimleri

Tez Danışmanı : Dr. Öğr. Üyesi Canan AKKOYUNLU

OCAK 2022

T.C.

İSTANBUL KÜLTÜR ÜNİVERSİTESİ

LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

**LİNEER OLMAYAN İKİLİ SCHRODINGER VE LİNEER OLMAYAN GÜÇLÜ
İKİLİ SCHRODINGER DENKLEMLERİNİN YAPI KORUYAN SAYISAL
YÖNTEMLERLE ÇÖZÜMÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**Pelin ŞAYLAN
1900005993**

Anabilim Dalı: Matematik ve Bilgisayar Bilimleri

Program: Matematik ve Bilgisayar Bilimleri

Tez Danışmanı : Dr. Öğr. Üyesi Canan AKKOYUNLU

Jüri Üyeleri : Doç. Dr. Süleyman Hikmet ÇAĞLAR

Doç. Dr. Onur BAYSAL

OCAK 2022

ÖNSÖZ

Tez çalışmamın her aşamasında deneyimlerini, bilgilerini benimle paylaşan, bu süreçte sonsuz sabrı ve emeğiyle bana katkı sağlayan çok değerli danışmanım Dr. Öğr. Üyesi Canan Akkoyunlu'ya en içten şükranlarımı sunuyorum.

İstanbul Kültür Üniversitesi Matematik-Bilgisayar Bilimleri Bölümü hocalarıma katkıları ve emekleri için çok teşekkür ediyorum.

Bu günlere gelmemde en çok emeği olan bana her zaman güvenen ve daima yanımda olan canım aileme sonsuz teşekkürler. İyi ki varsınız.

Çalışmam süresince ve her zaman yanımda olan Onur ALTINTAŞLI'ya çok teşekkür ederim.

OCAK 2022

Pelin ŞAYLAN



ÖZET

LİNEER OLMAYAN İKİLİ SCHRODINGER VE LİNEER OLMAYAN GÜÇLÜ İKİLİ SCHRODINGER DENKLEMLERİNİN YAPI KORUYAN SAYISAL YÖNTEMLERLE ÇÖZÜMÜ

Pelin ŞAYLAN

Yüksek lisans Tezi, Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Canan AKKOYUNLU

OCAK 2022, 52 sayfa

Bu tezde lineer olmayan ikili Schrödinger denklemi ve lineer olmayan güçlü ikili Schrödinger denkleminin yapı koruyan yöntemlerle çözümü ele alınmıştır. Lineer olmayan ikili Schrödinger denklemine bölünmüş ortalama vektör alanı yöntemi ve ek yöntem ilk kez uygulanmıştır. Dağılım analizi yapılmıştır. Lineer olmayan güçlü ikili Schrödinger denklemine ek yöntem ilk kez uygulanmıştır. Bu çalışmada ayrıca bölünmüş ortalama vektör alanı yöntemi ve ek yöntemin hangi denklemlere uygulandığı araştırılmış ve bu sistemler ele alınmıştır.

JÜRİ: Doç. Dr. Süleyman Hikmet ÇAĞLAR

Doç. Dr. Onur BAYSAL

ABSTRACT

Solution of Coupled Nonlinear Schrödinger and Strongly Coupled Nonlinear Schrödinger Equations with Structure Preserving Numerical Methods

Pelin SAYLAN

MSc. Thesis in Department of Mathematics and Computer Science.

Supervisor: Assist. Prof. Dr. Canan AKKOYUNLU

JANUARY 2022, 52 pages

In this thesis the solutions with structure preserving methods of coupled nonlinear Schrödinger equation and strongly coupled nonlinear Schrödinger equation are discussed. This is the first time that the divided average vector field method and adjoint method are used for the coupled nonlinear Schrödinger equation. Distribution analysis is done. And again, this is the first time that the adjoint method is used for the strongly coupled nonlinear Schrödinger equation. Also in this thesis, to which equations the divided average vector field method and adjoint method are used for are researched and this systems are discussed.

COMMITTEE: Assoc. Prof. Dr. Süleyman Hikmet ÇAĞLAR

Assoc. Prof. Dr. Onur BAYSAL

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ	i
ÖZET	ii
ABSTRACT	iii
AKADEMİK BEYAN	v
ŞEKİLLER DİZİNİ	vi
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	3
2.1. Lineer Denklem Sistemi	3
2.2. Diferansiyel Denklemler	4
2.3. Lineer Diferansiyel Denklem Sistemi	5
2.4. Lineer Diferansiyel Operatör (LDO)	5
2.5. Süperpozisyon İlkesi	5
2.6. İkinci Mertebeden Sınır Değer Problemi	6
2.7. Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemler	7
2.8. Lineer Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemler	7
2.9. Taylor Teoremi	8
2.10. Sonlu Farklar Yöntemi	9
2.11. Lineer Olmayan Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemler	11
3. HAMILTON SİSTEMLER	14
3.1. Lagrange Fonksiyonu ve Denklemleri	15
3.2. Hamilton Fonksiyonu ve Denklemleri	16
4. ENERJİ KORUYAN SAYISAL YÖNTEMLER	18
4.1. Ortalama Vektör Alanı(OVA) Yöntemi	18
4.2. Bölünmüş Ortalama Vektör Alanı Yöntemi	19
5. LİNEER OLMAYAN SCHRODINGER (NLS) DENKLEMLERİ	22
5.1. Bir Boyutlu NLS Denklemi	22
5.2. NLS Denkleminin Koruduğu Özellikler	24
5.3. İkili NLS Denklem Sistemi	25
5.4. İkili NLS Denklem Sistemine Bölünmüş Ortalama Vektör Alanı Yöntemi- nin Uygulanması	28
5.5. İkili NLS Denklem Sisteminin Dağılım Analizi	30
5.6. İkili NLS Denklem Sistemine Ek Yöntemin Uygulanması	41
5.7. Lineer Olmayan Güçlü İkili Schrödinger Denklemi	44
5.8. Lineer Olmayan Güçlü İkili Schrödinger Denklemine Ek Yöntemin Uygulanması	44
5.9. Lineer Olmayan Güçlü İkili Schrödinger Denklemine Bölünmüş Ortalama Vektör Alanı Yönteminin Uygulanması	47
6. SONUÇ	49
7. KAYNAKLAR	50

AKADEMİK BEYAN

Yüksek lisans Tezi olarak sunduğum “LİNEER OLMAYAN İKİLİ SCHRODINGER VE LİNEER OLMAYAN GÜÇLÜ İKİLİ SCHRODINGER DENKLEMLERİNİN YAPI KORUYAN SAYISAL YÖNTEMLERLE ÇÖZÜMÜ ” adlı bu çalışmanın, akademik kurallar ve etik değerlere uygun olarak bulunduğunu belirtir, bu tez çalışmasında bana ait olmayan tüm bilgilerin kaynağını gösterdiğimi beyan ederim.

.../.../2022
Pelin ŞAYLAN
İmza



ŞEKİLLER DİZİNİ

2.1. Türev tanımı	9
2.2. Düğümlerin tablo şeklinde gösterimi	11



1. GİRİŞ

Çevremizde karşılaştığımız bazı fiziksel olayları anlamlandırmak için lineer olmayan diferansiyel denklemlerden yararlanılır. Kısmi türevli diferansiyel denklemler uygulamalı matematik alanındaki bir çok problemi ifade etmemizi sağlar. Ancak mühendislik, matematik, fizik alanlarında karşılaşılan lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemlerin analitik çözümleri bazı durumlarda bulunamayabilir. Bu tarz denklemlerin çözümünde nümerik yöntemler yaklaşık sonuçların hesaplanmasında oldukça önemlidir. Bir çok araştırmacı son yıllarda lineer olmayan diferansiyel denklemler üzerine çalışmalara ağırlık vermekte, bu denklemlerin çözüm yöntemlerini inceleyip yeni çözüm yöntemleri keşfetmektedirler. Yapılan araştırmalarda özellikle kısmi türevli denklemler incelenmiş ve solitonlar ile ilgili çalışmalar yapılmıştır. Son yıllarda yapı koruyan yöntemlerle ilgili çalışmalara ağırlık verilmiştir. Yapılan çalışmalarda diferansiyel denklem enerji, hız, simplektiklik ve simetrinin korunması gibi çeşitli geometrik özellikleri koruyor ise kullanılan yöntemin uygun olduğu ifade edilmektedir.

20. yüzyılın başlarında yapılan deneysel çalışmalar atom moleküllerinin doğada dalga gibi davranış sergilediğini öne sürdü. Buradan yola çıkılarak atom moleküllerinin davranışını bir dalga denklemiyle açıklanabileceği fikri ortaya atıldı. Böyle bir denklemi yazan tek kişi Schrödinger oldu. Özdeğer(eigenvalue) metodu olarak tanımlanan ve Fourier tarafından bulunan bu metod denklemin çözümünün temelini oluşturmuştur.

Lineer olmayan Schrödinger denklemi (NLS), kuantum mekaniğinde parçacıkların herhangi bir andaki konumlarını ve serbest enerji seviyelerini bulmak için, fizikte elektrik alan ve transistörlerin mekanizmasında, kimyada modern atom kuramlarında, ortalama bağ uzaklıkları, dipol ve moment hesaplarında kullanılır.

Benney ve Newell 1967 yılında NLS denklemini zayıf dalga paketlerinde kullanılan bir yöntem olarak açıkladılar [1]. Zakharov, 1968 yılında yapılan eski çalışmalardan bağımsız olarak NLS denklemini yeniden keşfetti [2]. 1971 yılında Hirota integrallenebilir lineer olmayan evölüsyon denklemlerine çoklu soliton çözüm öneren yöntemi buldu [3]. Bu yöntemin Hirota'nun 1972 ve 1973 yıllarında yaptığı çalışmalarla KdV ve NLS tarzındaki denklemlerde çok başarılı olduğu ve N-soliton çözümlerin genelleştirilerek elde edildiği anlaşıldı [4, 5]. 1972 yılında Zakharov ve Shabat 'Ters Saçılım Yöntemi'ni geliştirdi. Ters Saçılım Yöntemi güçlü bir yöntem olmasına rağmen Hirota yöntemi daha işlevsel bir yöntem olmuştur. Bu yöntemin avantajı cebirsel olduğu için denklem çözümünde hız kazandırır [6]. Ablowitz ve Ladik 1975 yılında yaptıkları çalışmada NLS için 'Sonlu Fark Yöntemi'ni geliştirdiler [7]. 1980 yılında Hirota bilineer forma dönüştürme konusunda detaylı çalışmalar yürütmüştür [8]. 1986 yılında Herbst ve Weidemann NLS denklemi için parçalara ayırma metodunun analizini yaptılar [9]. Aynı yıl Overman ve arkadaşları denklemin çeşitliliğini hesaplayan bilgisayar kodları ürettirler [10].

Bu çalışmada lineer olmayan ikili Schrödinger denklemine bölünmüş ortalama vektör alanı yöntemi ile ek yöntem uygulanmıştır. Lineer olmayan güçlü ikili Schrödinger denklemine ek yöntem uygulanmıştır. Çalışma altı bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde genel bir literatür özetine yer verilmiştir.

İkinci bölümde diferansiyel denklemin tanımı ve temel kavramlar verilmiştir.

Üçüncü bölümde Hamiltonian sistemler ile ilgili bilgi verilmiştir.

Dördüncü bölümde enerji koruyan sayısal yöntemlerden olan Ortalama Vektör Alanı Yöntemi, Bölünmüş Ortalama Vektör Alanı Yöntemi ve Ek Yöntem ile ilgili bilgi verilmiştir.

Beşinci bölümde Lineer Olmayan İkili Schrödinger Denklemleri ve bu denklemler bölünmüş ortalama vektör alanı yöntemi ile ek yöntemin uygulanmasına dair bilgiler verilmiştir. Dağılım analizi yapılmıştır. Ayrıca Lineer olmayan güçlü İkili Schrödinger denklemleri ile ilgili bilgi verilip denklemler ek yöntem uygulanmıştır.

Altıncı bölümde tezde elde edilen sonuçlar özetlenmiştir.



2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1. Lineer Denklem Sistemi

Tanım 2.1. $a_i, b \in \mathbb{R}$ ve $x_1, x_2, \dots, x_n$ değişkenler olmak üzere,

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$$

şeklindeki bir ifadeye lineer denklem denir.

Tanım 2.2. $b_1, b_2, \dots, b_m$ ve $a_{ij} \in \mathbb{R} (1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)$, $x_1, x_2, \dots, x_n$ bilinmeyenler olmak üzere;

$$\left. \begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \right\}$$

şeklinde verilen bir ifadeye n bilinmeyenli m denklemden oluşan bir lineer denklem sistemi denir.

Bu denklem sistemi kısaca

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i, \quad 1 \leq i \leq m$$

şeklinde ifade edilebilir.

Eğer verilen sistemde $b = [b_1, \dots, b_m]^T$ sütun vektörü sıfır ise sisteme homojen lineer denklem sistemi denir. Aşağıdaki şekilde gösterilir.

$$\left. \begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n & = & 0 \\ & \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n & = & 0 \end{array} \right\}$$

Tanım 2.3. m denklem ve n bilinmeyenden oluşan

$$\left. \begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \right\}$$

lineer denklem sistemini göz önüne alalım. $x_1, x_2, \dots, x_n$ bilinmeyenleri, a ve b ler ise sabitleri ifade etmek üzere lineer denklem sistemi matrislerle aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \rightarrow AX = B$$

X matrisi $|A| \neq 0$ olmak üzere şu şekilde bulunur:

$$X = A^{-1}B$$

2.2. Diferansiyel Denklemler

Tanım 2.4. Bir fonksiyon ve bu fonksiyonun türevlerinden oluşan eşitliğe diferansiyel denklem denir.

$$y'' - 5y' + 4y = x$$

eşitliği bir diferansiyel denklem örneğidir.

Diferansiyel denklem üzerindeki en yüksek mertebeli türev, o denklemin mertebesini belirler. Örneğin,

$$y' + y = 6x + 4 \text{ ve } (2 + e^x)y' = e^{x-y} \text{ birinci mertebeden,}$$

$$y'' + 16y = 0 \text{ ve } y'' - 4y' + 6y = x \text{ ikinci mertebeden,}$$

$$y''' - 4y'' + x^4y' - y = x \text{ üçüncü mertebeden diferansiyel denklemlerdir.}$$

Bir diferansiyel denklemde $y, y', y'' \dots$ yerine, bir $y=f(x)$ ve bunun $f'(x), f''(x), \dots$ türevleri konulduğunda denklem özdeş olarak gerçekleşirse, $y = f(x)$ diferansiyel denkleminin bir çözümü olur.

2.3. Lineer Diferansiyel Denklem Sistemi

Adi diferansiyel denklem sistemi bir bağımsız değişken, bu bağımsız değişkene bağlı bir bağımlı değişken ve belirli mertebeye kadar olan türevleri arasında kurulmuş m tane bağıntıdan oluşan sistem olarak ifade edilir. Sistemdeki bağıntılar dikkate alınacağından bu şekildeki sistemler Simultane Diferansiyel Denklem Sistemi olarak adlandırılır.

s bağımsız değişken olmak üzere $y_1 = y_1(s), y_2 = y_2(s), \dots, y_m = y_m(s)$ m tane farklı fonksiyon ele alınsın. Fonksiyonlar, bunların belirli bir mertebeye kadar türevlerini ve ayrıca bağımsız değişkeni içeren aşağıdaki m tane bağıntıya lineer diferansiyel denklem sistemi denir.

$$\begin{aligned} f_1(s, y_1, y_1', y_1'', \dots, y_m, y_m', y_m'') &= 0 \\ f_2(s, y_1, y_1', y_1'', \dots, y_m, y_m', y_m'') &= 0 \\ &\vdots \\ f_m(s, y_1, y_1', y_1'', \dots, y_m, y_m', y_m'') &= 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

2.4. Lineer Diferansiyel Operatör (LDO)

İkinci mertebeden LDO şu şekilde ifade edilir:

$$\tilde{L} = b_0(x) \frac{d^2}{dx^2} + b_1(x) \frac{d}{dx} + b_2(x)$$

$u, v \in C^2(I)$ ve $s_1, s_2 \in C$ olmak üzere

$$\tilde{L}(s_1 u + s_2 v) = s_1 \tilde{L}u + s_2 \tilde{L}v$$

gerçeklenir. Bu durumda $\tilde{L}$ lineer operatördür [11].

2.5. Süperpozisyon İlkesi

Homojen lineer diferansiyel denklemlerin çözümlerinin lineer birleşimi de bir çözümdür. u ve v fonksiyonları için $\tilde{L}u = 0, \tilde{L}v = 0$ oluyorsa s_1 ve s_2 herhangi sabitler olmak üzere

$$\tilde{L}(s_1 u + s_2 v) = s_1 \tilde{L}u + s_2 \tilde{L}v = 0$$

sonucu elde edilir. Yukarıdaki eşitliğe süperpozisyon ilkesi denir [12].

2.6. İkinci Mertebeden Sınır Değer Problemi

$$\alpha_1 w(\tilde{a}) + \beta_1 w(\tilde{a}) = \gamma_1 \quad \alpha_2 w(\tilde{b}) + \beta_2 w(\tilde{b}) = \gamma_2 \quad (2.2)$$

sınır koşulları ile

$$w'' + R(x)w' + T(x)w = \psi(x) \quad (2.3)$$

ikinci mertebeden lineer diferansiyel denklem bir lineer sınır değer problemi oluşturur. Denklemden yer alan $R(x)$, $T(x)$ ve $\psi(x)$, $[\tilde{a}, \tilde{b}]$ aralığında sürekli ve $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$ ve $\alpha_1^2 + \beta_1^2 \neq 0$ ve $\alpha_2^2 + \beta_2^2 \neq 0$ dir [11].

Tanım 2.5. (2.2)-(2.3) sınır değer problemine $\psi(x) = 0$ ve $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ olması durumunda homojen sınır değer problemi denir. Aksi durumda homojen olmayan sınır değer problemi olarak adlandırılır.

Denklem

$$w'' + R(x)w' + T(x)w = 0 \quad (2.4)$$

olmak üzere

$$\alpha_1 w(\tilde{a}) + \beta_1 w(\tilde{a}) = \gamma_1 \quad \alpha_2 w(\tilde{b}) + \beta_2 w(\tilde{b}) = \gamma_2 \quad (2.5)$$

sınır koşulları ile homojen sınır değer problemi ifade edilir.

Not:

$w(x) = 0$ çözümü aşıkâr(trivial) çözüm olarak ifade edilir ve her zaman homojen sınır değer probleminin bir çözümüdür. ($w(x) \neq 0$) olacak şekilde çözümler aşıkâr olmayan çözümler olarak adlandırılır.

Teorem 2.6. (2.4)-(2.5) probleminin sadece aşıkâr çözümünün olması için gerek ve yeter şart (2.2)-(2.3) probleminin tek çözüme sahip olmasıdır.

En çok rastlanan sınır koşulları:

1. Periyodik sınır koşulları:

$$w(-\tilde{L}) = w(\tilde{L}) \quad w'(-\tilde{L}) = w'(\tilde{L})$$

2. Ayrılabilir sınır koşulları:

$$\beta_1 w(p) + \alpha_1 w(p) = 0 \quad \beta_2 w(s) + \alpha_2 w(s) = 0$$

3. Dirichlet sınır koşulları:

$$w(p) = \phi_1 \qquad w(s) = \phi_2$$

4. Neumann sınır koşulları:

$$w'(p) = \phi_1 \qquad w'(s) = \phi_2$$

2.7. Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemler

Tanım 2.7. $U : R^n \rightarrow R$ olmak üzere $U = F(x_1, x_2, \dots, x_m, \dots, x_n)$ biçiminde tanımlanan n tane bağımsız değişkene bağlı U fonksiyonunun diğer değişkenler sabit tutularak herhangi bir değişkenin Δx_m değişimine karşılık fonksiyonun değişim hızı ,

$$\frac{\Delta U}{\Delta x_m} = \frac{F(x_1, x_2, \dots, x_m + \Delta x_m, \dots, x_n) - F(x_1, x_2, \dots, x_m, \dots, x_n)}{\Delta x_m} \quad (2.6)$$

Burada $\Delta x_m = h$ diyelim. Eğer (2.6) denkleminin sağ tarafındaki limit mevcut ise,

$$\frac{\partial U}{\partial x_m} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x_1, x_2, \dots, x_m + h, \dots, x_n) - F(x_1, x_2, \dots, x_m, \dots, x_n)}{h} \quad (2.7)$$

ifadesine $U = F(x_1, x_2, \dots, x_m, \dots, x_n)$ fonksiyonunun x_m değişkenine göre kısmi türevi denir.

Tanım 2.8. En az iki bağımsız ve en az bir bağımlı değişken ile bağımlı değişkenin bağımsız değişkenlere göre birinci veya daha fazla mertebeden kısmi türevlerinden oluşan denklemlere kısmi türevli diferansiyel denklemler denir.

Kısmi türevli diferansiyel denklemlerin genel formu; $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ bağımsız değişkenler olmak üzere ve

$$U_{x_1} = \frac{\partial u}{\partial x_1}, \quad U_{x_2} = \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \quad U_{x_n} = \frac{\partial u}{\partial x_n}$$

U bağımlı değişkenin kısmi türevlerini göstermek üzere,

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, U_{x_1}, U_{x_2}, \dots, U_{x_n}, U_{x_1 x_1}, U_{x_2 x_2}, \dots) = 0$$

şeklindedir.

2.8. Lineer Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemler

Bağımlı değişkenlerin ve bunların bağımsız değişkenlere bağlı kısmi türevlerinin katsayılarının bağımsız değişkenlerin kümesi üzerinde tanımlı birer fonksiyon olduğu kısmi

türevli diferansiyel denklemlere lineer kısmi türevli diferansiyel denklemler denir. Aşağıda iki bağımsız ve bir bağımlı değişkenden oluşan, sırasıyla birinci ve ikinci mertebeden lineer kısmi türevli diferansiyel denklemler verilmiştir:

$$P(x, y)u_x + Q(x, y)u_y + R(x, y)u = S(x, y)$$

$$A(x, y)u_{xx} + 2B(x, y)u_{xy} + C(x, y)u_{yy} + D(x, y)u_x + E(x, y)u_y + F(x, y)u = G(x, y)$$

2.9. Taylor Teoremi

Taylor teoremi, Nümerik Analizde ve bilimsel hesaplamaların sayısal algoritmalarında karşımıza çıkan $C^n[a, b]$ 'deki fonksiyonları ilgilendiren önemli bir teoremdir.

Teorem 2.9. *Eğer $f \in C^n[a, b]$ ve (a, b) açık aralığında f^{n+1} mevcut ise bu durumda $[a, b]$ kapalı aralığındaki herhangi c ve x noktaları için*

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(c)}{k!} (x - c)^k + E_n(x) \quad (2.8)$$

dir.

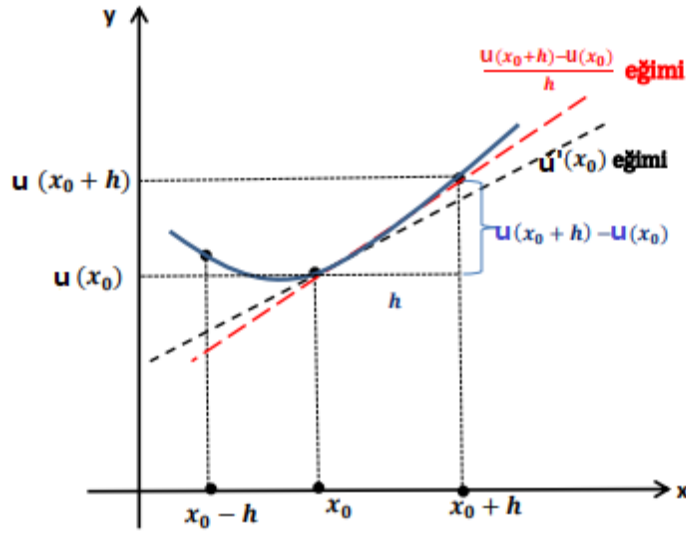
Burada c ve x arasındaki bazı ζ ler için hata terimi;

$$E_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\zeta) (x - c)^{n+1}$$

dir.

Burada ζ , x ve c nin özel değerlerine bağlı olarak ya $c < \zeta < x$ ya da $x < \zeta < c$ dir [13].

2.10. Sonlu Farklar Yöntemi



Şekil 2.1: Türev tanımı

$$\tilde{u}'(x) = \frac{d\tilde{u}(x)}{dx} = \lim_{x_2 - x_1 \rightarrow 0} \frac{\tilde{u}(x_2) - \tilde{u}(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Metod, bir diferansiyel denklemin tanım bölgesinin sonlu miktarda ızgara noktalarına bölünerek, her bir ızgara noktasındaki türevleri yerine yaklaşımın yazılması olarak ifade edilebilir. Diferansiyel denklem cebirsel denklem olarak yazılmış olur. Taylor serileri bir değişken içeren ifadelerin sonlu fark yaklaşımlarını elde etmek için kullanılır.

m bir pozitif tamsayı, $\tilde{h} = \frac{\tilde{b} - \tilde{a}}{m}$ olarak alınsın. Burada $[\tilde{a}, \tilde{b}]$ tanım aralığıdır.

$$x_i = \tilde{a} + j\tilde{h}, \quad j = 0, 1, 2, \dots, m \quad (2.9)$$

olarak ifade ettiğimiz x_i 'ler parçalanma noktalarıdır.

Kendisi ve türevleri tanım aralığı üzerinde sürekli $\tilde{U}(x)$ fonksiyonunu ele alalım.

$\tilde{U}(x_i + h)$ ve $\tilde{U}(x_i - h)$ ifadelerinin x_i noktasındaki Taylor açılımları

$$\tilde{U}(x_i + h) = \tilde{U}(x_i) + h\tilde{U}_x(x_i) + \frac{h^2}{2!}\tilde{U}_{xx}(x_i) + \frac{h^3}{3!}\tilde{U}_{xxx}(x_i), \dots \quad (2.10)$$

$$\tilde{U}(x_i - h) = \tilde{U}(x_i) - h\tilde{U}_x(x_i) + \frac{h^2}{2!}\tilde{U}_{xx}(x_i) - \frac{h^3}{3!}\tilde{U}_{xxx}(x_i), \dots \quad (2.11)$$

Sırasıyla (2.10)-(2.11) değerleri yaklaşık olarak şu şekilde hesaplanabilir:

$$\tilde{U}_x(x_i) = \frac{\tilde{U}(x_i + h) - \tilde{U}(x_i)}{h} + O(h) = \frac{\tilde{U}_{i+1} - \tilde{U}_i}{h} + O(h), \quad (2.12)$$

$$\tilde{U}_x(x_i) = \frac{\tilde{U}(x_i) - \tilde{U}(x_i - h)}{h} + O(h) = \frac{\tilde{U}_i - \tilde{U}_{i-1}}{h} + O(h), \quad (2.13)$$

(2.12) yaklaşımı ileri farklar olarak adlandırılırken (2.13) yaklaşımı geri farklar olarak ifade edilir. Yaklaşımlarda fark edildiği üzere, seri belli yerden sonra devam ettirilmemiştir. Bundan dolayı bir hata meydana gelecektir. $O(h)$ olarak ifade edilen hatalar serinin alınmadığı ilk terime göre incelenir.

(2.12)'den (2.13) eşitliği çıkarılır ve gerekli sadeleşmeler yapılırsa merkezi fark yaklaşımı olarak ifade edilen şu eşitlik elde edilir:

$$\tilde{U}_x(x_i) = \frac{\tilde{U}(x_i + h) - \tilde{U}(x_i - h)}{2h} + O(h^2)$$

$$\tilde{U}_x(x_i) = \frac{\tilde{U}(x_{i+1}) - \tilde{U}(x_{i-1}))}{2h} + O(h^2) \quad (2.14)$$

Toplama işlemi yapılırsa aşağıda yer alan ikinci türev için yaklaşımlar bulunur:

$$\tilde{U}_{xx}(x_i) = \frac{\tilde{U}(x_i + h) - 2\tilde{U}(x_i) + \tilde{U}(x_i - h))}{h^2} + O(h^2)$$

$$\tilde{U}_{xx}(x_i) = \frac{\tilde{U}_{i+1} - 2\tilde{U}_i + \tilde{U}_{i-1}}{h^2} + O(h^2) \quad (2.15)$$

Ayrıca Taylor serileri iki değişkenli fonksiyonlar için sonlu fark yaklaşımlarını bulmak

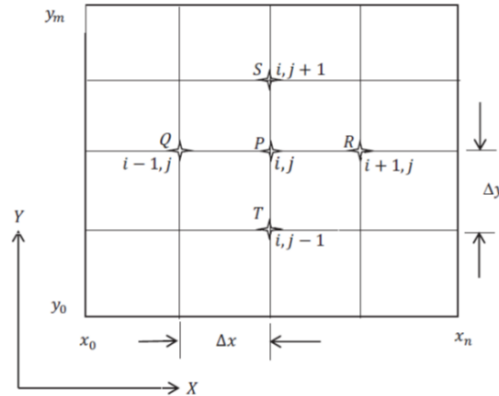
istediğimizde de kullanılır.

$\tilde{a} \leq x \leq \tilde{b}$, $\tilde{a} \leq y \leq \tilde{b}$, $\tilde{h} = \frac{\tilde{b} - \tilde{a}}{\tilde{N}}$, $k = \frac{\tilde{b} - \tilde{a}}{\tilde{N}}$ olarak alınsın. Burada $\tilde{N}$ ve $\tilde{M}$ pozitif tamsayılardır. Ayrıca $x_s = \tilde{a} + sh$, $s = 0, 1, \dots, \tilde{N}$, $y_r = \tilde{a} + rk$, $r = 0, 1, \dots, \tilde{M}$ olarak parçalanma noktalarını dikkate alalım. x ve y değişkenine göre sonlu fark yaklaşımları şu şekilde elde edilir:

$$U_x(x_i, y_i) = \frac{U_{i+1,j} - U_{i,j}}{h} + O(h), \quad (2.16)$$

$$U_x(x_i, y_i) = \frac{U_{i,j} - U_{i-1,j}}{h} + O(h), \quad (2.17)$$

$$U_x(x_i, y_i) = \frac{U_{i+1,j} - U_{i-1,j}}{2h} + O(h^2), \quad (2.18)$$



Şekil 2.2: Düğümlerin tablo şeklinde gösterimi

2.11. Lineer Olmayan Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemler

Lineer Olmayan Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemler, fiziksel denklemlerin matematiksel modellenmesinde ve doğanın temel kanunlarının formüllendirilmesinde sıklıkla kullanılır. x ve y bağımsız değişkenler olmak üzere birinci mertebeden lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklem genel olarak;

$$F(x, y, u, u_x, u_y) = 0$$

şeklinde. x ve y bağımsız değişkenler olmak üzere ikinci mertebeden lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklem genel olarak

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = 0$$

şeklinde. Benzer şekilde yüksek mertebeden lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemler yazılabilir. Genel olarak bu denklemler

$$L_x u(x) = f(x) \quad (2.19)$$

şeklinde operatör formunda yazılabilir. Burada L_x lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklem operatörü, $f(x)$, iki ya da daha fazla $x = (x, y, \dots)$ bağımsız değişkenine sahip fonksiyondur. Ayrıca $f(x) = 0$ ise (2.19) denklemi lineer olmayan homojen kısmi türevli diferansiyel denklem ve $f(x) \neq 0$ ise (2.19) denklemi lineer olmayan ve homojen olmayan kısmi türevli diferansiyel denklem olarak ifade edilir.

Örnek:

$u_t - ku_{xx} = 0$ ısı denklemi homojen olup
 $u_t + uu_x = f(x, t)$ denklemi ($u > 0$ ve $f(x, t)$ bilinen bir fonksiyon olmak üzere) homojen olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemdir.

Aşağıda bazı önemli kısmi türevli diferansiyel denklem modelleri verilmiştir [14].

1) Advection Denklemi

$$u_t + uu_x = f(x, t)$$

2) Burgers Denklemi

$$u_t + uu_x = \alpha u_{xx}$$

3) Korteweg-de Vries Denklemi (KdV)

$$u_t + \alpha uu_x + bu_{xxx} = 0$$

4) Modifiye KdV (mKdV) Denklemi

$$u_t - 6u^2 u_x + u_{xxx} = 0$$

5) Boussinesq Denklemi

$$u_{tt} - u_{xx} + 3(u^2)_{xx} - u_{xxx} = 0$$

6) Sine-Gordon Denklemi

$$u_{tt} - u_{xx} = \alpha \sin u$$

7) Sinh-Gordon Denklemi

$$u_{tt} - u_{xx} = \alpha \sinh u$$

8) Liouville Denklemi

$$u_{tt} - u_{xx} = e^{\pm u}$$

9) Fisher Denklemi

$$u_t = Du_{xx} + u(1 - u)$$

10) Kadomtsev-Petviashvili (KP) Denklemi

$$(u_t + \alpha uu_x + bu_{xxx})_x + u_{yy} = 0$$

11) K(n, n) Denklemi

$$u_t + \alpha (u^n)_x + b (u^n)_{xx} = 0, \quad n > 1$$

12) Lineer Olmayan Schrödinger Denklemi (NLS)

$$iu_t + u_{xx} + \gamma |u|^2 u = 0$$

13) Camassa-Holm Denklemi (CH)

$$u_t - u_{xxt} + \alpha u_x + 3uu_x = 2u_x u_{xx} + uu_{xxx}$$

14) Degasperis-Procesi Denklemi

$$u_t - u_{xxt} + \alpha u_x + 4uu_x = 3u_x u_{xx} + uu_{xxx}$$

3. HAMILTON SİSTEMLER

Yüzyıllar boyunca insanoğlunun amacı doğayı anlamlandırmaya çalışmak olmuştur. Bu anlam arayışında en büyük yardımcıları matematik ve fiziktir. Fiziğin amacı doğanın genel analizini yapmak, matematiğin amacı ise doğayı denklemler yardımıyla modellemektir.

Fizik, modern fizik ve klasik fizik olmak üzere ikiye ayrılır. Modern fizik kuantum ve rölativistik mekanik ilkeleriyle çalışırken, klasik fizik klasik mekanik ilkeleri ile çalışır. Klasik mekaniğin konusu cisimlerin hareketleri ve onlara etki eden kuvvetlerdir. Rölativistik mekaniğin konusu makro düzeyde ışık hızına yakın hızlardaki sistemler, kuantum mekaniğinin konusu ise mikro düzeyde cisim veya parçacıkların hareketidir.

Mekanik, cisimlerin durağan halini veya kuvvet etkisi altındaki hareketlerini inceler. Mekanik; dinamik, statik, kinematik olmak üzere üçe ayrılır [15].

Dinamik, cisimlerin çeşitli kuvvetler altında hareketlerindeki değişiklikleri inceler. Statik, cisimlerin dengede kalması için gerekli koşulları inceler. Kinematik ise harekete neden olan faktörleri hesaba katmadan cisimlerin ve parçacıkların hızını inceler.

Mekanik 17.yy. da Kepler, Galileo, Tycho Brahe gibi önemli bilim insanları tarafından incelenmiştir. 18.yy. da ise Newton, Leibnitz, Euler, Lagrange ve Hamilton tarafından çalışmalar yapılmıştır. 19.yy. da bir çok bilim insanının katkılarıyla mekanik mükemmel bir sistematik yapı haline gelmiştir. Newton yasaları üzerine kurulan yapı, klasik mekanik olarak adlandırılırken 19.yy da yapılan çalışmalarda oluşturulan yapı ise analitik mekanik(analitik dinamik) olarak adlandırılmaktadır.

Lagrange ve Hamilton denklemleri analitik dinamiğin temelini oluşturur. Lagrange yönteminin en önemli özelliği Hamilton yönteminin temelini oluşturmasıdır. Hamilton denklemler günümüzde oldukça önemlidir ve kuantum mekaniğinde başarıyla uygulanmaktadır [16].

Uçağın uçuşu, gökdelenlerin yıkılmadan ayakta kalması, makinelerin çalışması gibi doğadaki bütün hareketler mekanik prensipleriyle çalışır. Mühendisliğin bütün alanlarında kullanılan klasik mekanik oldukça önemlidir [16, 17].

Uygulamalı matematikte önemli bir yere sahip olan Hamilton sistemler ile ilgili bir çok çalışma yapılmıştır ve çalışmalara hala devam edilmektedir.

Chang ve arkadaşlarının 1981 yılında Henon – Heiles Hamiltonunun sonuçlarını kompleks zaman düzleminde incelemeleri yapılan ilk araştırmalardandır [18]. Özer'in 1994 yılında KdV, CKdV, integrallenebilir Klein-Gordon denklemleri gibi bazı integrallenebilir sistemlerin NLS tipi denklemlerini çıkarmak için çarpım skalası yöntemini kullanması ve bu yöntemin sonlu boyutlu Hamilton sistemler için de uygulanabilir olduğunu göstermesi yapılan çalışmalara örnek olarak verilebilir [19]. Bunların yanısıra Civelek, 1996 yılında genişletilmiş vektör demetleri üzerinde Hamilton ve Lagrange denklemlerinin dikey ve tam liftlerini incelemiştir [20]. 2001 yılında simplektik ve kosimplektik manifoldlar üzerindeki Hamilton çatısını klasik alan teorilerini göz önünde tutarak genişleten De Leon ve arkadaşlarıdır [21]. 2002 yılında lift teoriiyi kullanarak Hamilton denklemlerini genişletilmiş Kahler manifoldlara genelleyen ve yüksek mertebeden

kısmi türevli Hamilton denklemlerinin geometrik özelliklerinin sonuçlarını araştıran Tekkoyun yaptığı çalışmalarla literatüre önemli katkılarda bulunmuştur [22]. Zabzine ise 2005 yılında yaptığı çalışmada genişletilmiş world-sheet süpersimetri ile geliştirilmiş kompleks yapı arasındaki bağlantıyı ortaya koyarak bu çalışmanın faz uzayı tanımı ile sigma modellerinin geniş sınıfıyla ilişkili olduğunu belirtmiştir. [23].

3.1. Lagrange Fonksiyonu ve Denklemleri

$u_1, u_2, \dots, u_n$ koordinatlar ve $\dot{u}_1, \dot{u}_2, \dots, \dot{u}_n$ zamana karşı birinci türevler olsun. $\tilde{T}$ sistemin kinetik enerjisi, potansiyel enerjisinin farkı $\tilde{V}$ olmak üzere sistemin Lagrange fonksiyonu

$$\tilde{L} = \tilde{T} - \tilde{V}$$

şeklinde gösterilir.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{u}_k} \right) - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial u_k} = 0, \quad k = 1, 2, 3, \dots, m \quad (3.1)$$

sistemin Lagrange denklemleri olarak verilir [16].

$x_1, x_2, \dots, x_n$ yardımıyla yazılabilir. (3.1) denklemi şu şekilde ifade edilir:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{x}_k} \right) - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial x_k} = 0, \quad k = 1, 2, 3, \dots, m \quad (3.2)$$

Ayrıca

$$\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{x}_k} = \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \dot{x}_k} = m\dot{x}_k = p_k (p = \text{momentum})$$

ve

$$\frac{\partial \tilde{L}}{\partial x_k} = \frac{\partial \tilde{V}}{\partial x_k} = -F_k$$

olmasından $\dot{p}_k = F_k$ dir. Bu da $\dot{\vec{p}} = \vec{F}$ şeklinde Newton denklemleridir.

3.2. Hamilton Fonksiyonu ve Denklemleri

Hamilton fonksiyonu;

$$H(q, p, t) = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - L(q, \dot{q}, t), \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (3.3)$$

şeklinde tanımlanır [16].

Burada eşitliğin her iki tarafının diferansiyeli alınırsa;

$$dH = \sum_i \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i \right) + \frac{\partial H}{\partial t} dt$$

olmasından

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i \right) + \frac{\partial H}{\partial t} dt \\ &= \sum_{i=1}^n (p_i d\dot{q}_i + dp_i \dot{q}_i) - \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i \right) - \frac{\partial L}{\partial t} dt \end{aligned} \quad (3.4)$$

elde edilir. Burada $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ ifadesi ve (3.1) Lagrange hareket denklemi kullanılırsa (3.4) denklemi aşağıdaki şeklini alır.

$$\begin{aligned} & \sum_i \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i \right) + \frac{\partial H}{\partial t} dt \\ &= \sum_i \dot{q}_i dp_i - \sum_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) dq_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt \\ &= \sum_i \dot{q}_i dp_i - \sum_i \dot{p}_i dq_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt \end{aligned} \quad (3.5)$$

q_i genelleştirilmiş koordinatlarıyla p_i genelleştirilmiş momentumların bağımsız olarak alındığı hatırlanırsa

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (3.6)$$

denklemleri bulunur. Bu denklemler ilk defa Hamilton tarafından elde edildiği için Hamilton Denklemleri olarak adlandırılırlar.

$$\dot{q} = H_p, \quad \dot{p} = -H_q, \quad (3.7)$$

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}(t, q, p), \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}(t, q, p), \quad i = 1, \dots, n,$$

Burada $H = H(t, q, p)$, Hamiltonian olarak adlandırılır, $(t, q, p) \in \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ için tanımlanmış düzgün gerçekteğerli bir fonksiyondur.

$q = (q_1, \dots, q_n)$, $p = (p_1, \dots, p_n)$ vektörlerine sırasıyla konum ve momentum vektörleri denir. t ise zaman olarak adlandırılır.

q ve p değişkenleri eşlenik değişkenlerdir. Eşlenik değişken kavramı, teori geliştikçe önem kazanır. n tamsayısı ise, sistemin serbestlik derecesi sayısıdır.

$2n$ boyutlu z vektörü, $2n \times 2n$ lik ters eşlenik J matrisi ve grandyanı aşağıdaki şekilde tanımlarız.

$$z = \begin{bmatrix} q \\ p \end{bmatrix}, \quad J = J_n = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix}, \quad \nabla H = \begin{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial z_1} \\ \frac{\partial H}{\partial z_{2n}} \end{bmatrix}$$

Burada 0 , $n \times n$ lik sıfır matrisidir ve I , $n \times n$ lik birim matristir. Buradan (3.7) sistemini aşağıdaki şekilde yazabiliriz.

$$\dot{z} = J \nabla H(t, z) \quad (3.8)$$

Adi diferansiyel denklemlerin genel teorisinin temel sonuçlarından biri varlık ve teklik teoremidir. Bu teorem, $(t_0, z_0) \in \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ için $\phi(t_0, t_0, z_0)$ başlangıç koşulu olmak üzere $z = \phi(t, t_0, z_0)$ nin (3.8) sisteminin tek çözümü olduğunu belirtir [24].

4. ENERJİ KORUYAN SAYISAL YÖNTEMLER

4.1. Ortalama Vektör Alanı(OVA) Yöntemi

Orta nokta yönteminin genişletilmiş hali olarak bilinen ortalama vektör alanı(OVA) yöntemine olan ilgi son yıllarda oldukça artmıştır. Yüksek mertebeden OVA yöntemi Hamiltonian sistemler için uygulandı. Ayrıca analizi yapıldı [25, 26]. Simplektiklik ile enerji korunumu arasında bağ kurulmuş ve bu bağa B-serisi denilmiştir. Adi diferansiyel denklem sistemleri için B-serileri kuvvet serisidir [27]. OVA yöntemi ve yüksek mertebeli OVA yöntemi kanonik olmayan ve kanonik Hamiltonian sistemler için uygulanmıştır. Bu yöntemler aynı zamanda B-serisi yöntemidir [25, 26].

Aşağıdaki diferansiyel denklem için

$$\frac{du}{dt} = f(u), \quad u \in \mathbb{R}^n \quad (4.1)$$

ikinci mertebeden OVA yöntemi şu şekildedir: [28].

$$\frac{u_{n+1} - u_n}{\Delta t} = \int_0^1 f((1 - \xi)u_n + \xi u_{n+1}) d\xi \quad (4.2)$$

Örneğin $f(u) = u$ için integral aşağıdaki şekilde hesaplanır:

$$\int_0^1 f((1 - \xi)u_n + \xi u_{n+1}) d\xi = \frac{u_{n+1} + u_n}{2}$$

Bu (4.2)'nin orta nokta kuralına eşdeğer olduğu anlamına gelir.

$$\frac{u_{n+1} - u_n}{\Delta t} = \frac{u_{n+1} + u_n}{2} \quad (4.3)$$

Eğer $f(u) = u^2$ (kuadratik) ise integral şöyle elde edilir:

$$\int_0^1 f((1 - \xi)u_n + \xi u_{n+1}) d\xi = \frac{u_{n+1}^2 + u_{n+1}u_n + u_n^2}{3}$$

(4.2) den OVA yöntemi

$$\frac{u_{n+1} - u_n}{\Delta t} = \frac{u_{n+1}^2 + u_{n+1}u_n + u_n^2}{3} \quad (4.4)$$

şeklindedir.

Eğer $f(u) = u^3$ (kübik) ise integral şöyle hesaplanır:

$$\int_0^1 f((1-\xi)u_n + \xi u_{n+1}) d\xi = \frac{u_{n+1}^3 + u_{n+1}^2 u_n + u_{n+1} u_n^2 + u_n^3}{4}$$

(4.2) den OVA yöntemi

$$\frac{u_{n+1} - u_n}{\Delta t} = \frac{u_{n+1}^3 + u_{n+1}^2 u_n + u_{n+1} u_n^2 + u_n^3}{4} \quad (4.5)$$

şeklindedir. OVA yöntemi ayrık bir gradyan yöntemidir. Ayrık gradyan yönteminin kullanılması, formun vektör alanı için avantajlıdır.

$$f(u) = S(u)\nabla V(u)$$

Burada $S(u)$ bir ters eşlenik matristir. Hamilton sistemi için

$$f(u) = S(u)\nabla H(u)$$

şeklindedir. Burada H enerjidir. OVA yöntemini Hamilton sistemine uyguladığımızda, herhangi bir entegrasyon adımı boyutu seçimi için her adımda sayısal çözümün enerji korunumu garanti edilir [28, 29].

4.2. Bölünmüş Ortalama Vektör Alanı Yöntemi

Aşağıdaki formda bir Hamilton sistemini ele alalım [30].

$$\dot{w} = f(w) = S_m \nabla H(w) \quad (4.6)$$

$m = 2d$ ve $w = (s, r)^T = (w_1, w_2, \dots, w_d; w_{d+1}, w_{d+2}, \dots, w_m)^T$ olarak üzere (4.6) sistemi aşağıdaki şekilde yeniden yazılabilir.

$$\begin{pmatrix} \dot{s} \\ \dot{r} \end{pmatrix} = S_{2d} \begin{pmatrix} H_s(s, r) \\ H_r(s, r) \end{pmatrix}, \quad s, r \in \mathbb{R}^d \quad (4.7)$$

Mevcut Hamilton sistem $H(s, r)$ herhangi bir sürekli akış boyunca korunur.

Buradan

$$\frac{dH(s(t), r(t))}{dt} = H_s(s, r)^T \dot{s} + H_r(s, r)^T \dot{r} = \nabla H(s, r)^T S_{2d} \nabla H(s, r) = 0$$

yazılır. Daha sonra Hamilton sistemi (4.7) için Bölünmüş Ortalama Vektör Alanı yöntemi (PAVF) aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\frac{1}{\tau} \begin{pmatrix} s^{n+1} - s^n \\ r^{n+1} - r^n \end{pmatrix} = S_{2d} \begin{pmatrix} \int_0^1 H_s(\xi s^{n+1} + (1-\xi)s^n, r^n) d\xi \\ \int_0^1 H_r(s^{n+1}, \xi r^{n+1} + (1-\xi)r^n) d\xi \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

Teorem 4.1. *Bölünmüş Ortalama Vektör Alanı yöntemi (4.8), (4.7) $H(s, r)$ Hamilton sisteminin değerini tam olarak korur.*

İspat:

(4.8) in her iki tarafına $\int_0^1 H_s(\xi s^{n+1} + (1-\xi)s^n, r^n)^T d\xi, \int_0^1 H_r(s^{n+1}, \xi r^{n+1} + (1-\xi)r^n)^T d\xi$ ile skaler çarpım uygularsak, kalkülüsün temel teoreminden ve S_{2d} ters eşlenik matrisinden aşağıdaki sonucu elde ederiz.

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{\tau} \int_0^1 H_s(\xi s^{n+1} + (1-\xi)s^n, r^n)^T d\xi (s^{n+1} - s^n) \\ &\quad + \frac{1}{\tau} \int_0^1 H_r(s^{n+1}, \xi r^{n+1} + (1-\xi)r^n)^T d\xi (r^{n+1} - r^n) \\ &= \frac{1}{\tau} \int_0^1 \frac{d}{d\xi} [H(\xi s^{n+1} + (1-\xi)s^n, r^n) + H(s^{n+1}, \xi r^{n+1} + (1-\xi)r^n)] d\xi \\ &= \frac{1}{\tau} [H(s^{n+1}, r^n) - H(s^n, r^n) + H(s^{n+1}, r^{n+1}) - H(s^{n+1}, r^n)] \\ &= \frac{1}{\tau} (H(s^{n+1}, r^{n+1}) - H(s^n, r^n)) = 0 \end{aligned}$$

Sonuç 1:

Bölünmüş Ortalama Vektör Alanı yöntemi (4.8), birinci dereceden tek adım yöntemidir.

Sonuç 2:

Eğer (4.7), $H(s, r) = H_1(s) + H_2(r)$ şeklinde ayrılabilir bir Hamilton sistem ise o zaman bölünmüş ortalama vektör alanı yöntemi (4.8), ortalama vektör alanı yöntemi (4.2)'ye eşittir. Hamilton sistemi (4.7) ayrılabilir değildir.

Sonuç olarak, elde edilen bölünmüş ortalama vektör alanı yöntemi Hamiltonianı korur.

Bölünmüş ortalama vektör alanı yöntemi (4.8)'i Φ_τ ile gösterirsek buradan ek yöntem olan Φ_τ^* (PAVF*)'ı aşağıdaki şekilde elde ederiz:

$$\frac{1}{\tau} \begin{pmatrix} s^{n+1} - s^n \\ r^{n+1} - r^n \end{pmatrix} = S_{2d} \begin{pmatrix} \int_0^1 H_s(\xi s^{n+1} + (1-\xi)s^n, r^{n+1}) d\xi \\ \int_0^1 H_r(s^n, \xi r^{n+1} + (1-\xi)r^n) d\xi \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

Sonuç olarak ek yöntem olan (4.9) Hamiltonian $H(w)$ yi korur ve bölünmüş ortalama vektör alanı yönteminin bütün özelliklerine sahiptir.

Bölünmüş ortalama vektör alanı yöntemi ile bağlantılı olan başka bir yöntem ise bölünmüş ortalama vektör alanı-C (PAVF-C) yöntemidir.

PAVF-C yöntemini aşağıdaki şekilde tanımlayabiliriz:

$$\Psi_\tau := \Phi_{\frac{\tau}{2}}^* \circ \Phi_{\frac{\tau}{2}} \quad (4.10)$$

bölünmüş ortalama vektör alanı yöntemi ile ek yöntemin ortalaması şeklinde ifade edilen yöntem aşağıdaki gibidir [30].

$$\hat{\Psi}_\tau := \frac{1}{2} (\Phi_\tau^* + \Phi_\tau) \quad (4.11)$$

5. LİNEER OLMAYAN SCHRODINGER (NLS) DENKLEMLERİ

Doğayı anlamlandırmada ve modellemede matematik bizim için en önemli anahtardır. Pek çok doğa olayını modellemede lineer olmayan denklemler kullanılmaktadır. Bu sebeple son yıllarda lineer olmayan denklemlere ilgi oldukça artmıştır.

Lineer olmayan Schrödinger denklemi (NLS), kuantum mekaniğinde parçacıkların herhangi bir andaki konumlarını ve serbest enerji seviyelerini bulmak için, fizikte elektrik alan ve transistörlerin mekanizmasında, kimyada modern atom kuramlarında ortalama bağ uzaklıkları, dipol ve moment hesaplarında kullanılır.

5.1. Bir Boyutlu NLS Denklemi

$\psi = \psi(x, t)$ kompleks fonksiyonu alınsın. $\psi(x, 0) = \psi_0(x)$ başlangıç koşulu ve $\psi(x, t) = \psi(x + L, t)$ periyodik sınır koşulu olmak üzere

$$i\psi_t + \psi_{xx} + \lambda|\psi|^2\psi = 0 \quad (5.1)$$

lineer olmayan Schrödinger diferansiyel denklemdir. Burada $x \in \mathbb{R}, \lambda > 0$ dir. ψ kompleks fonksiyon olduğundan $\psi = p + iq$ şeklinde yazılır. Burada $p = p(x, t), q = q(x, t)$ dir. Bu durumda (5.1) denklemi aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\begin{aligned} p_t + q_{xx} + \lambda(p^2 + q^2)q &= 0 \\ q_t - p_{xx} - \lambda(p^2 + q^2)p &= 0 \end{aligned} \quad (5.2)$$

Şimdi (5.2) sisteminin kanonik Hamiltonian sistemi olduğunu gösterelim. Hamiltonian

$$\mathcal{H} = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial q}{\partial x} \right)^2 - \frac{\lambda}{2} (p^2 + q^2)^2 \right] dx \quad (5.3)$$

olarak alınırsa

$$\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta p} = -\lambda p (p^2 + q^2) - p_{xx}, \quad \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta q} = -\lambda q (p^2 + q^2) - q_{xx}$$

eşitlikleri elde edilir, buradan (5.2) sistemi

$$\begin{aligned} p_t &= \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta q} \\ q_t &= -\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta p} \end{aligned}$$

şeklinde yazılır.

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ ve } z = (p, q)^T$$

olarak alınırsa kanonik Hamiltonian sistemi

$$\dot{z} = \mathbf{J}^{-1} \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta z}, \quad -\mathbf{J} = \mathbf{J}^{-1}$$

şeklinde elde edilir.

İleri fark yöntemi kullanılarak (5.3) denkleminin türev terimleri hesaplanırsa sonlu boyutlu Hamiltonian sistemine ulaşılır. (5.3) de p_x ve q_x birinci mertebeden türevleri x_{j+1} ve x_j düğüm noktaları kullanılarak diskrize edilir. Uzay değişkenine göre adım uzunluğu $\Delta x = x_{j+1} - x_j$ olmak üzere $\Delta x = L/N$ olarak alınsın. Buradaki N düğüm sayısına karşılık gelmektedir. Daha kolay bir çözüm oluşturması açısından $p_j = p(jL/N, t)$ notasyonu p gerçek çözümünün jL/N düğüm noktasında aldığı değere bir yaklaşım olarak kullanılacaktır. Benzer ifade q için de geçerlidir.

Bu açıklamalardan Hamiltonian aşağıdaki şekilde diskrize edilir:

$$\overline{\mathcal{H}} = \frac{1}{2\Delta x^2} \sum_{j=1}^N ((p_{j+1} - p_j)^2 + (q_{j+1} - q_j)^2) - \frac{\lambda}{4} \sum_{j=1}^N (p_j^2 + q_j^2)^2$$

Buradan Hamiltonianın gradiyenti

$$\nabla \overline{\mathcal{H}} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\Delta x^2} (p_{j-1} - 2p_j + p_{j+1}) - \lambda p_j (p_j^2 + q_j^2) \\ -\frac{1}{\Delta x^2} (q_{j-1} - 2q_j + q_{j+1}) - \lambda q_j (p_j^2 + q_j^2) \end{pmatrix}$$

olmak üzere yarı ayrık Hamiltonian sistemi

$$\begin{aligned} p_t &= -Aq - \lambda q (p^2 + q^2) \\ q_t &= Ap + \lambda p (p^2 + q^2) \end{aligned} \tag{5.4}$$

olarak elde edilir. Burada A matrisi şu şekildedir:

$$A = \frac{1}{\Delta x^2} \begin{pmatrix} -2 & 1 & & & 1 \\ 1 & -2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 1 & & & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

5.2. NLS Denkleminin Koruduğu Özellikler

NLS denkleminin koruduğu özellikleri bilmek yapılan çalışmalara önemli ölçüde katkı sağlamaktadır [31].

Aşağıda NLS denkleminin koruduğu özellikleri gösterelim:

Daima $|\psi|^2$ eğrisinin altında kalan alan korunmaktadır. Bu demektir ki, (5.1) denkleminde her iki taraf ψ^* ile çarpılırsa

$$i\psi^*\psi_t + \psi^*\psi_{xx} + \lambda|\psi|^4 = 0 \quad (5.5)$$

denklemini elde edilir. Buradan (5.5) denkleminin kompleks eşleniği alınır ve bulunan denklemden (5.5) denklemini çıkarılırsa

$$|\psi|_t^2 = i\psi^*\psi_{xx} - i\psi\psi_{xx}^*$$

elde edilir. Buradan

$$\int_0^L |\psi|_t^2 dx = i \int_0^L (\psi^*\psi_{xx} - \psi\psi_{xx}^*) dx = 0$$

sonucuna ulaşılır. Bu demektir ki

$$\frac{d}{dt} \int_0^L |\psi|^2 dx = 0$$

dir. Dolayısıyla $|\psi|^2$ nin altında kalan alan zamana bağlı olarak değişmez.

İkinci bir özellik ise hareketin yani $\int_0^L (|\psi_x|^2 - |\psi|^4) dx$ integralinin zamandan bağımsız

sız olmasıdır. Bu demektir ki (5.1) denklemi ψ_t^* ile çarpılırsa

$$i\psi_t^*\psi_t + \psi_t^*\psi_{xx} + \lambda\psi_t^*|\psi|^2\psi = 0$$

denklemi elde edilir. $\psi_t^*\psi_t = |\psi|_t^2$ olduğu kullanılırsa

$$i|\psi|_t^2 + \psi_t^*\psi_{xx} + \lambda\psi_t^*|\psi|^2\psi = 0 \quad (5.6)$$

elde edilir. Bu denklemin kompleks eşleniği alınır ve (5.6) denklemi ile toplanırsa aşağıdaki sonuç elde edilir:

$$\psi_t^*\psi_{xx} + \psi_t\psi_{xx}^* + (|\psi|^4)_t = 0$$

Buradan

$$\int_0^L (\psi_t^*\psi_{xx} + \psi_t\psi_{xx}^* + (|\psi|^4)_t) dx = \int_0^L [-|\psi_x|_t^2 + (|\psi|^4)_t] dx = 0$$

elde edilir. Buradan

$$\frac{d}{dt} \int_0^L [|\psi_x|^2 - |\psi|^4] dx = 0 \text{ dir.}$$

olduğunu göstermiş oluruz.

5.3. İkili NLS Denklem Sistemi

$\psi_1(x, t)$ ve $\psi_2(x, t)$ kompleks fonksiyonlar ve $\psi_1 = \psi_1(x, t)$ ve $\psi_2 = \psi_2(x, t)$ olmak üzere periyodik sınır koşullu ikili NLS denklem sistemi

$$\begin{aligned} i\psi_{1t} + \alpha_1\psi_{1xx} + (\sigma_1|\psi_1|^2 + \mu|\psi_2|^2)\psi_1 &= 0 \\ i\psi_{2t} + \alpha_2\psi_{2xx} + (\sigma_2|\psi_2|^2 + \mu|\psi_1|^2)\psi_2 &= 0 \end{aligned} \quad (5.7)$$

şeklinededir. İkili NLS denklem sistemin jeofizik akış dinamiği ve lineer olmayan optik gibi çeşitli uygulamaları vardır. İkili NLS denkleminin bazı integrallenebildiği durumlarda analitik çözümler elde edilir. Bunlardan biri $\alpha_1 = \alpha_2 = 1, \sigma_1 = \sigma_2 = \mu$ olması

durumda yani Manakov modelidir, diğer bir model ise $\alpha_1 = -\alpha_2, \sigma_1 = \sigma_2 = -\mu$ olmasıdır bu durumda, ters saçılım dönüşüm yöntemi ile çözüm elde edilir.

Sistemde kararlı ve kararlı olmayan dalga paketlerinin birbiriyle etkileşimi sonucu lineer olmayan durumlar ortaya çıkar. İntegrallenemeyen durumlarda ise lineer olmayan durumları analiz etmek için sayısal yöntemlerin kullanılması gereklidir.

İkili NLS denklem sistemini çözmek için yapılan çalışmalar aşağıdaki gibidir.

Simplektik, çoklu simplektik yöntemler uygulanmıştır [32]. İkili NLS denklemini çözmek için sonlu fark yöntemi kullanılmıştır [33]. NLS ve ikili NLS denklem sistemlerine sürekli olmayan Galerkin yöntemi uygulanmıştır [34].

$p = p(x, t), q = q(x, t), u = u(x, t), v = v(x, t)$ olmak üzere $\psi_1 = p + iq$ ve $\psi_2 = u + iv$ olarak alınırsa denklem sistemi

$$\begin{aligned} p_t + \alpha_1 q_{xx} + (\sigma_1 (p^2 + q^2) + \mu (u^2 + v^2)) q &= 0 \\ q_t - \alpha_1 p_{xx} - (\sigma_1 (p^2 + q^2) + \mu (u^2 + v^2)) p &= 0 \\ u_t + \alpha_2 v_{xx} + (\mu (p^2 + q^2) + \sigma_2 (u^2 + v^2)) v &= 0 \\ v_t - \alpha_2 u_{xx} - (\mu (p^2 + q^2) + \sigma_2 (u^2 + v^2)) u &= 0 \end{aligned} \quad (5.8)$$

olarak yazılır.

$$w = \frac{1}{4} \left(\sigma_1 (p^2 + q^2)^2 + \sigma_2 (u^2 + v^2)^2 \right) + \frac{\mu}{2} (p^2 + q^2) (u^2 + v^2)$$

olmak üzere Hamiltonian

$$\mathcal{H} = \int_{\Omega} \left[w - \frac{\alpha_1}{2} (p_x^2 + q_x^2) - \frac{\alpha_2}{2} (u_x^2 + v_x^2) \right] dx \quad (5.9)$$

şeklinde alınırsa

$$\begin{aligned} \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta p} &= \alpha_1 p_{xx} + (\sigma_1 (p^2 + q^2) + \mu (u^2 + v^2)) p \\ \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta q} &= \alpha_1 q_{xx} + (\sigma_1 (p^2 + q^2) + \mu (u^2 + v^2)) q \\ \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta u} &= \alpha_2 u_{xx} + (\mu (p^2 + q^2) + \sigma_2 (u^2 + v^2)) u \\ \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta v} &= \alpha_2 v_{xx} + (\mu (p^2 + q^2) + \sigma_2 (u^2 + v^2)) v \end{aligned} \quad (5.10)$$

eşitlikleri elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}
p_t &= -\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta q} \\
q_t &= \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta p} \\
u_t &= -\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta v} \\
v_t &= \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta u}
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan (5.8) denklem sisteminin kanonik Hamiltonian denklem sistemi olduğunu göstermiş olduk.

$$\dot{z} = \mathbf{J}^{-1} \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta z}$$

yazılır.

Burada $z = (p, q, u, v)^T$ ve

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{J}^{-1} = -\mathbf{J}$$

olarak bulunur. Burada (5.9) da ileri fark yöntemi kullanılarak birinci mertebeden türev terimleri bulunur ve sonlu boyutlu Hamiltonian sistemine ulaşılır.

p_x, q_x, u_x, v_x birinci mertebeden türevleri x_{m+1} ve x_m düğüm noktaları yardımıyla disk-rize edilirler. $\Delta x = L/N$ adım uzunluğu ve $p_m = p(mL/N, t)$, $q_m = q(mL/N, t)$, $u_m = u(mL/N, t)$, $v_m = v(mL/N, t)$ de p, q, u, v gerçek çözümünün mL/N düğüm noktasındaki yaklaşım olmak üzere diskrit Hamiltonian şu şekildedir:

$$\begin{aligned}
\overline{\mathcal{H}} &= \sum_{m=1}^{N-1} \left\{ \frac{1}{4} \left[\sigma_1 (p_m^2 + q_m^2)^2 + \sigma_2 (u_m^2 + v_m^2)^2 \right] + \frac{\mu}{2} (p_m^2 + q_m^2) (u_m^2 + v_m^2) \right\} \\
&\quad - \sum_{m=1}^{N-1} \frac{\alpha_1}{2} \left[\left(\frac{p_{m+1} - p_m}{\Delta x} \right)^2 + \left(\frac{q_{m+1} - q_m}{\Delta x} \right)^2 \right] \\
&\quad - \sum_{m=1}^{N-1} \frac{\alpha_2}{2} \left[\left(\frac{u_{m+1} - u_m}{\Delta x} \right)^2 + \left(\frac{v_{m+1} - v_m}{\Delta x} \right)^2 \right]
\end{aligned}$$

Diskrit Hamiltonian gradiyenti

$$\nabla \overline{\mathcal{H}} = \begin{pmatrix} \frac{\alpha_1}{\Delta x^2} (p_{m-1} - 2p_m + p_{m+1}) + \sigma_1 (p_m^2 + q_m^2) p_m + \mu (u_m^2 + v_m^2) p_m \\ \frac{\alpha_1}{\Delta x^2} (q_{m-1} - 2q_m + q_{m+1}) + \sigma_1 (p_m^2 + q_m^2) q_m + \mu (u_m^2 + v_m^2) q_m \\ \frac{\alpha_2}{\Delta x^2} (u_{m-1} - 2u_m + u_{m+1}) + \sigma_2 (u_m^2 + v_m^2) u_m + \mu (p_m^2 + q_m^2) u_m \\ \frac{\alpha_2}{\Delta x^2} (v_{m-1} - 2v_m + v_{m+1}) + \sigma_2 (u_m^2 + v_m^2) v_m + \mu (p_m^2 + q_m^2) v_m \end{pmatrix}$$

kullanılırsa yarı ayrık Hamiltonian sistemi,

$$A = \frac{1}{\Delta x^2} \begin{pmatrix} -2 & 1 & & & 1 \\ 1 & -2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 1 & & & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} p_t &= -\alpha_1 A q - \sigma_1 (p^2 + q^2) q - \mu (u^2 + v^2) q \\ q_t &= \alpha_1 A p + \sigma_1 (p^2 + q^2) p + \mu (u^2 + v^2) p \\ u_t &= -\alpha_2 A v - \sigma_2 (u^2 + v^2) v - \mu (p^2 + q^2) v \\ v_t &= \alpha_2 A u + \sigma_2 (u^2 + v^2) u + \mu (p^2 + q^2) u \end{aligned} \quad (5.11)$$

elde edilir.

5.4. İkili NLS Denklem Sistemine Bölünmüş Ortalama Vektör Alanı Yönteminin Uygulanması

(5.11) İkili NLS denklem sistemine Bölünmüş Ortalama Vektör Alanı Yönteminin uygulanması sonucunda aşağıdaki eşitlikler elde edilir:

$$\frac{p^{n+1} - p^n}{\Delta t} = -\frac{\alpha_1}{2} A (q^n + q^{n+1}) - \int_0^1 [\sigma_1 (b_1^2 + b_2^2) b_2 + \mu (b_3^2 + b_4^2) b_2] d\tau$$

$$\frac{q^{n+1} - q^n}{\Delta t} = \frac{\alpha_1}{2} A (p^n + p^{n+1}) + \int_0^1 [\sigma_1 (b_1^2 + b_2^2) b_1 + \mu (b_3^2 + b_4^2) b_1] d\tau$$

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} = -\frac{\alpha_2}{2} A (v^n + v^{n+1}) - \int_0^1 [\sigma_2 (b_3^2 + b_4^2) b_4 + \mu (b_1^2 + b_2^2) b_4] d\tau$$

$$\frac{v^{n+1} - v^n}{\Delta t} = \frac{\alpha_2}{2} A (u^n + u^{n+1}) + \int_0^1 [\sigma_2 (b_3^2 + b_4^2) b_3 + \mu (b_1^2 + b_2^2) b_3] d\tau$$

Kolay ifade edilmesi açısından,

$$b_1 = (1 - \tau)p^n + \tau p^{n+1}$$

$$b_2 = (1 - \tau)q^n + \tau q^{n+1}$$

$$b_3 = (1 - \tau)u^n + \tau u^{n+1}$$

$$b_4 = (1 - \tau)v^n + \tau v^{n+1}$$

kısaltması yapılmıştır.

İntegraller aşağıdaki şekilde hesaplanır:

$$\begin{aligned} \frac{p^{n+1} - p^n}{\Delta t} = & -\frac{\alpha_1}{2} A (q^n + q^{n+1}) \\ & - \frac{\sigma_1}{4} \left[2 (p^{n+1})^2 q^n + 2 (p^{n+1})^2 q^{n+1} + (q^n)^3 + (q^n)^2 q^{n+1} + q^n (q^{n+1})^2 + (q^{n+1})^3 \right] \\ & - \frac{\mu}{2} [(u^n)^2 q^n + (u^n)^2 q^{n+1} + (v^n)^2 q^n + (v^n)^2 q^{n+1}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{q^{n+1} - q^n}{\Delta t} = & \frac{\alpha_1}{2} A (p^n + p^{n+1}) \\ & + \frac{\sigma_1}{4} \left[(p^n)^3 + (p^n)^2 p^{n+1} + p^n (p^{n+1})^2 + (p^{n+1})^3 + 2 (q^n)^2 p^n + 2 (q^n)^2 p^{n+1} \right] \\ & + \frac{\mu}{2} [(u^n)^2 p^n + (u^n)^2 p^{n+1} + (v^n)^2 p^n + (v^n)^2 p^{n+1}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} = & -\frac{\alpha_2}{2} A (v^n + v^{n+1}) \\ & - \frac{\sigma_2}{4} \left[2 (u^{n+1})^2 v^n + 2 (u^{n+1})^2 v^{n+1} + (v^n)^3 + (v^n)^2 v^{n+1} + v^n (v^{n+1})^2 + (v^{n+1})^3 \right] \\ & - \frac{\mu}{2} [(p^{n+1})^2 v^n + (p^{n+1})^2 v^{n+1} + (q^{n+1})^2 v^n + (q^{n+1})^2 v^{n+1}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{v^{n+1} - v^n}{\Delta t} = & \frac{\alpha_2}{2} A (u^n + u^{n+1}) \\ & + \frac{\sigma_2}{4} \left[(u^n)^3 + (u^n)^2 u^{n+1} + u^n (u^{n+1})^2 + (u^{n+1})^3 + 2 (v^n)^2 u^n + 2 (v^n)^2 u^{n+1} \right] \\ & + \frac{\mu}{2} [(p^{n+1})^2 u^n + (p^{n+1})^2 u^{n+1} + (q^{n+1})^2 u^n + (q^{n+1})^2 u^{n+1}] \end{aligned}$$

İntegraller hesaplanıp ulaşılan sonuçtan Newton Raphson yöntemiyle çözüm bulundu.

Jakobiyeen aşağıdaki şekilde hesaplandı:

$$\begin{aligned}
J = & \begin{pmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -a_1 A & 0 & 0 \\ a_1 A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a_2 A \\ 0 & 0 & a_2 A & 0 \end{pmatrix} \\
& + a_3 \begin{pmatrix} -4p^{n+1}q^n & -2(p^{n+1})^2 - 3(q^{n+1})^2 & 0 & 0 \\ (p^n)^2 + 2(q^n)^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
& + a_3 \begin{pmatrix} -4p^{n+1}q^{n+1} & -(q^n)^2 - 2q^n q^{n+1} & 0 & 0 \\ 2p^n p^{n+1} + 3(p^{n+1})^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
& + a_4 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4v^{n+1}v & -2(v^{n+1})^2 - 3(v^{n+1})^2 \\ 0 & 0 & (u^n)^2 + 2(v^n)^2 & 0 \end{pmatrix} \\
& + a_4 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4u^{n+1}v^{n+1} & -(v^n)^2 - 2v^n v^{n+1} \\ 0 & 0 & 2u^n u^{n+1} + 3(v^{n+1})^2 & 0 \end{pmatrix} \\
& + a_5 \begin{pmatrix} 0 & -(u^n)^2 - (v^n)^2 & 0 & 0 \\ (u^n)^2 + (v^n)^2 & 0 & 0 & 0 \\ -2p^{n+1}v^n & -2q^{n+1}v^n & 0 & -(p^{n+1})^2 - (q^{n+1})^2 \\ 2p^{n+1}u^n & 2q^{n+1}u^n & (p^{n+1})^2 + (q^{n+1})^2 & 0 \end{pmatrix} \\
& + a_5 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2p^{n+1}v^{n+1} & -2q^{n+1}v^{n+1} & 0 & 0 \\ 2p^{n+1}u^{n+1} & 2q^{n+1}u^{n+1} & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

burada

$$a_1 = \frac{\alpha_1 \Delta t}{2}, a_2 = \frac{\alpha_2 \Delta t}{2}, a_3 = \frac{\sigma_1 \Delta t}{4}, a_4 = \frac{\sigma_2 \Delta t}{4}, a_5 = \frac{\mu \Delta t}{2}$$

şeklindedir.

5.5. İkili NLS Denklem Sisteminin Dağılım Analizi

Bu bölümde lineer olmayan ikili Schrödinger denklem sistemi için dağılım analizi yapıldı. Başlangıçta sistem lineer denklem sistemi şekline getirildi. Daha sonra sistemin kesikli ve sürekli dağılım analizini karşılaştırmak için sistem Bölünmüş Ortalama Vek-

tör Alanı Yöntemi ile çözüldü [35].

$$\psi_1 = ae^{i\mu_1 t}, \quad \psi_2 = be^{i\mu_2 t} \quad (5.12)$$

çözümü (5.7) denklem sisteminde yerine yazılırsa $\mu_1 = \sigma_1 a^2 + vb^2$, $\mu_2 = \sigma_2 b^2 + va^2$ elde edilir.

İkili NLS denklem sisteminin lineer şekline ulaşmak için çözümlerin aşağıdaki şekilde açıldığını kabul edelim.

$$\psi_1 = \psi_{10} + \epsilon_1 \psi_{11} + O(\epsilon_1^2)$$

$$\psi_{10} = ae^{i(\sigma_1 a^2 + vb^2)t}$$

$$\psi_{11} = \alpha(x, t)\psi_{10}$$

$$\psi_2 = \psi_{20} + \epsilon_2 \psi_{21} + O(\epsilon_2^2)$$

$$\psi_{20} = be^{i(\sigma_2 b^2 + va^2)t}$$

$$\psi_{21} = \beta(x, t)\psi_{20}$$

Buradan $\psi_1 = \psi_{10} + \epsilon_1 \psi_{11}$ ve $\psi_2 = \psi_{20} + \epsilon_2 \psi_{21}$ açılımları (5.7) de yerine yazılır. Sistemin

$$i\psi_{1t} + \alpha_1 \psi_{1xx} + (\sigma_1 |\psi_1|^2 + \mu |\psi_2|^2) \psi_1 = 0$$

ilk denklemden

$$i[(\psi_{10})_t + \epsilon_1 (\psi_{11})_t] + \alpha_1 [(\psi_{10})_{xx} + \epsilon_1 (\psi_{11})_{xx}] + [\sigma_1 (\psi_{10} + \epsilon_1 \psi_{11}) (\psi_{10}^* + \epsilon_1 \psi_{11}^*) + \mu (\psi_{20} + \epsilon_2 \psi_{21}) (\psi_{20}^* + \epsilon_2 \psi_{21}^*)] (\psi_{10} + \epsilon_1 \psi_{11}) = 0$$

$$\Rightarrow i(\psi_{10})_t + i\epsilon_1 (\psi_{11})_t + \alpha_1 (\psi_{10})_{xx} + \alpha_1 \epsilon_1 (\psi_{11})_{xx} + (\sigma_1 \psi_{10} \psi_{10}^* + \sigma_1 \epsilon_1 \psi_{10} \psi_{11}^* + \sigma_1 \epsilon_1 \psi_{11} \psi_{10}^* + \mu \psi_{20} \psi_{20}^* + \mu \psi_{20} \epsilon_2 \psi_{21}^* + \mu \epsilon_2 \psi_{21} \psi_{20}^*) (\psi_{10} + \epsilon_1 \psi_{11}) = 0$$

$$\Rightarrow i(\psi_{10})_t + i\epsilon_1 (\psi_{11})_t + \alpha_1 (\psi_{10})_{xx} + \alpha_1 \epsilon_1 (\psi_{11})_{xx} + \sigma_1 |\psi_{10}|^2 \psi_{10} + \sigma_1 \epsilon_1 |\psi_{10}|^2 \psi_{11} + \sigma_1 \epsilon_1 \psi_{10}^2 \psi_{11}^* + \sigma_1 \epsilon_1 \psi_{11} |\psi_{10}|^2 + \mu |\psi_{20}|^2 \psi_{10} + \mu |\psi_{20}|^2 \epsilon_1 \psi_{11} + \mu \psi_{20} \epsilon_2 \psi_{21}^* \psi_{10} + \mu \psi_{20} \epsilon_2 \epsilon_1 \psi_{21}^* \psi_{11} + \mu \epsilon_2 \psi_{21} \psi_{20}^* \psi_{10} + \mu \epsilon_2 \psi_{21} \psi_{20}^* \epsilon_1 \psi_{11} = 0$$

$$\Rightarrow i(\psi_{10})_t + \alpha_1 (\psi_{10})_{xx} + (\sigma_1 |\psi_{10}|^2 + \mu |\psi_{20}|^2) \psi_{10} + \epsilon_1 [i(\psi_{11})_t + \alpha_1 (\psi_{11})_{xx} + 2\sigma_1 |\psi_{10}|^2 \psi_{11} + \sigma_1 \psi_{10}^2 \psi_{11}^* + \mu |\psi_{20}|^2 \psi_{11}] + \epsilon_2 [\mu \psi_{20} \psi_{21}^* \psi_{10} + \mu \psi_{21} \psi_{20}^* \psi_{10}] + \epsilon_1 \epsilon_2 [\mu \psi_{20} \psi_{21}^* \psi_{11} + \mu \psi_{21} \psi_{20}^* \psi_{11}] = 0$$

elde edilir. ψ_{10} düzlem dalga çözümü olduğundan

$$\begin{aligned}
\theta(1) : i(\psi_{10})_t + \alpha_1(\psi_{10})_{xx} + (\sigma_1|\psi_{10}|^2 + \mu|\psi_{20}|^2)\psi_{10} &= 0 \\
\theta(\epsilon_1) : i(\psi_{11})_t + \alpha_1(\psi_{11})_{xx} + 2\sigma_1|\psi_{10}|^2\psi_{11} + \sigma_1\psi_{10}^2\psi_{11}^* + \mu|\psi_{20}|^2\psi_{11} &= 0 \\
\theta(\epsilon_2) : \mu\psi_{20}\psi_{21}^*\psi_{10} + \mu\psi_{21}\psi_{20}^*\psi_{10} + \epsilon_1\epsilon_2[\mu\psi_{20}\psi_{21}^*\psi_{11} + \mu\psi_{21}\psi_{20}^*\psi_{11}] &= 0 \\
\theta(\epsilon_1\epsilon_2) : \mu\psi_{20}\psi_{21}^*\psi_{11} + \mu\psi_{21}\psi_{20}^*\psi_{11} &= 0
\end{aligned} \tag{5.13}$$

olarak yazılır. (5.7) sisteminin ikinci denklemine de benzer işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned}
\theta(1) : i(\psi_{20})_t + \alpha_2(\psi_{20})_{xx} + (\sigma_2|\psi_{20}|^2 + \mu|\psi_{10}|^2)\psi_{20} &= 0 \\
\theta(\epsilon_2) : i(\psi_{21})_t + \alpha_2(\psi_{21})_{xx} + 2\sigma_2|\psi_{20}|^2\psi_{21} + \sigma_2\psi_{20}^2\psi_{21}^* + \mu|\psi_{10}|^2\psi_{21} &= 0 \\
\theta(\epsilon_1) : \mu\psi_{10}\psi_{11}^*\psi_{20} + \mu\psi_{11}\psi_{10}^*\psi_{20} &= 0 \\
\theta(\epsilon_1\epsilon_2) : \mu\psi_{10}\psi_{11}^*\psi_{21} + \mu\psi_{11}\psi_{10}^*\psi_{21} &= 0
\end{aligned} \tag{5.14}$$

eşitlikleri elde edilir. $\psi_{11} = \alpha(x, t)\psi_{10}$ çözümü (5.13) denkleminde yerine yazılırsa

$$i\alpha_t\psi_{10} - \alpha(\sigma_1a^2 + \mu b^2)\psi_{10} + \alpha_1\alpha_{xx}\psi_{10} + 2\sigma_1a^2\alpha\psi_{10} + \sigma_1a^2\alpha^*\psi_{10} + \mu b^2\alpha\psi_{10} = 0$$

elde edilir, buradan

$$i\alpha_t + \alpha_1\alpha_{xx} + \sigma_1\alpha a^2 = -\sigma_1a^2\alpha^*$$

ya da

$$[i\partial_t + \alpha_1\partial_{xx} + \sigma_1a^2]\alpha = -\sigma_1a^2\alpha^* \tag{5.15}$$

şeklinde yazılır. Bu ifade

$$L_1 := i\partial_t + \alpha_1\partial_{xx} + \sigma_1a^2$$

olmak üzere

$$L_1[\alpha] = -\sigma_1a^2\alpha^*$$

olarak yazılır.

$$L_1^* := [-i\partial_t + \alpha_1\partial_{xx} + \sigma_1 a^2]$$

olmak üzere

$$L_1^*[\alpha^*] = -\sigma_1 a^2 \alpha$$

şeklindedir.

L_1^* (5.15) denkleminin her iki tarafına uygulanırsa

$$\begin{aligned} \Rightarrow (-i\partial_t + \alpha_1\partial_{xx} + \sigma_1 a^2)(i\partial_t + \alpha_1\partial_{xx} + \sigma_1 a^2)\alpha &= (-i\partial_t + \partial_{xx} + \sigma_1 a^2)(-\sigma_1 a^2 \alpha^*) \\ \Rightarrow \alpha_{tt} + \alpha_1^2 \alpha_{xxxx} + 2\sigma_1 \alpha_1 a^2 \alpha_{xx} &= 0 \end{aligned} \quad (5.16)$$

elde edilir. Benzer şekilde $\psi_{2_1} = \beta(x, t)\psi_{2_0}$ çözümü (5.14) denkleminde yazılırsa

$$i\beta_t + \sigma_2 b^2 \beta + \alpha_2 \beta_{xx} = -\sigma_2 b^2 \beta^*$$

elde edilir. Ayrıca benzer olarak

$$\begin{aligned} [i\partial_t + \alpha_2\partial_{xx} + \sigma_2 b^2]\beta &= -\sigma_2 b^2 \beta^* \\ L_2[\beta] &= -\sigma_2 b^2 \beta^* \\ L_2^* &:= [-i\partial_t + \alpha_2\partial_{xx} + \sigma_2 b^2], L_2^*[\beta^*] = -\sigma_2 b^2 \beta \end{aligned} \quad (5.17)$$

eşitlikleri yazılır. L_2^* (5.17) denkleminin her iki tarafına uygulanırsa

$$\begin{aligned} \Rightarrow (-i\partial_t + \alpha_2\partial_{xx} + \sigma_2 b^2)(i\partial_t + \alpha_2\partial_{xx} + \sigma_2 b^2)\beta &= (i\partial_t + \alpha_2\partial_{xx} + \sigma_2 b^2)(-\sigma_2 b^2 \beta^*) \\ \Rightarrow \beta_{tt} + \alpha_2^2 \beta_{xxxx} + 2\sigma_2 \alpha_2 b^2 \beta_{xx} &= 0 \end{aligned} \quad (5.18)$$

elde edilir. Böylece lineer ikili NLS denklem sistemi elde edilmiş olur:

$$\alpha_{tt} + \alpha_1^2 \alpha_{xxxx} + 2\sigma_1 \alpha_1 a^2 \alpha_{xx} = 0 \quad (5.19)$$

$$\beta_{tt} + \alpha_2^2 \beta_{xxxx} + 2\sigma_2 \alpha_2 b^2 \beta_{xx} = 0 \quad (5.20)$$

İşlem kolaylığı açısından $c = \alpha_1^2$, $d = \alpha_2^2$, $m = 2\sigma_1 \alpha_1 a^2$, $n = \sigma_2 \alpha_2 b^2$ alalım.

Şimdi elde edilen lineer sistemin Hamiltonian sistem olduğunu aşağıda gösterelim:

$\alpha = \alpha(x, t)$ kompleks fonksiyon olduğundan

$$\alpha(x, t) = p_1(x, t) + iq_1(x, t)$$

şeklinde yazılabilir. (5.19) denkleminde bu ifadeyi yerine yazarsak

$$\begin{aligned} (p_1)_{tt} + c(p_1)_{xxxx} + m(p_1)_{xx} &= 0 \\ (q_1)_{tt} + c(q_1)_{xxxx} + m(q_1)_{xx} &= 0 \end{aligned} \quad (5.21)$$

elde edilir. Bu sistem şu şekilde ifade edilir:

$$\begin{aligned} ((p_1)_t)_t &= (-c(p_1)_{xxx} - m(p_1)_x)_x \\ ((q_1)_t)_t &= (-c(q_1)_{xxx} - m(q_1)_x)_x \end{aligned}$$

Buradan

$$\begin{aligned} (p_1)_t &= u_x \\ u_t &= -c(p_1)_{xxx} - m(p_1)_x \end{aligned} \quad (5.22)$$

$$\begin{aligned} (q_1)_t &= v_x \\ v_t &= -c(q_1)_{xxx} - m(q_1)_x \end{aligned} \quad (5.23)$$

yazılır. p ile q arasında bir farkın olmadığı (5.21), (5.22), (5.23) nolu sistemlerden görülür. Bundan dolayı yalnızca $p_1(x, t)$ incelenirse $q_1(x, t)$ hakkında da aynıları söylenebilir.

Benzer şekilde $\beta(x, t) = p_2(x, t) + iq_2(x, t)$ alınırsa

$$\begin{aligned} (p_2)_t &= w_x \\ w_t &= -d(p_2)_{xxx} - n(p_2)_x \end{aligned} \quad (5.24)$$

ve

$$\begin{aligned}(q_2)_t &= z_x \\ z_t &= -d(q_2)_{xxx} - n(q_2)_x\end{aligned}\tag{5.25}$$

elde edilir. Buradan p_2 ve q_2 arasında fark olmadığı görülür. Şimdi

$$\begin{aligned}(p_1)_t &= u_x \\ u_t &= -c(p_1)_{xxx} - m(p_1)_x \\ (p_2)_t &= w_x \\ w_t &= -d(p_2)_{xxx} - n(p_2)_x\end{aligned}\tag{5.26}$$

sistemin Hamiltonian sistem olduğunu gösterelim. Bu sistem

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} p_1 \\ u \\ p_2 \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \partial_x & 0 & 0 \\ \partial_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \partial_x \\ 0 & 0 & \partial_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -c(p_1)_{xx} - mp_1 \\ u \\ -d(p_2)_{xx} - np_2 \\ w \end{pmatrix}$$

şeklinde ifade edilir. Hamiltonian

$$\mathcal{H}(p_1, u, p_2, w) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (u^2 + c(p_1)_x^2 - mp_1^2 + d(p_2)_x^2 - np_2^2 + w^2) dx$$

olarak alınırsa

$$\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta p_1} = -mp_1 - c(p_1)_{xx}, \quad \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta p_2} = -np_2 - d(p_2)_{xx}, \quad \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta u} = u, \quad \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta w} = w$$

şartları sağlandığından bu sistem Hamiltonian sistemdir. Bu sistemde türev terimleri yerine ileri farklar formülleri yazılırsa ayrık Hamiltonian sistem

$$\overline{\mathcal{H}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N-1} \left[u_i^2 + \frac{c}{\Delta x^2} ((p_1)_{i+1} - (p_1)_i)^2 - m(p_1)_i^2 - \frac{d}{\Delta x^2} ((p_2)_{i+1} - (p_2)_i)^2 - n(p_2)_i^2 + w_i^2 \right]$$

olarak bulunur. Buradan diskrit Hamiltonian sistem

$$\begin{pmatrix} (p_1)_t \\ u_t \\ (p_2)_t \\ w_t \end{pmatrix} = \bar{S} \nabla \overline{\mathcal{H}}$$

olarak yazılır. Burada

$$\nabla \overline{\mathcal{H}} = \begin{pmatrix} -\frac{c}{\Delta x^2} ((p_1)_{i-1} - 2(p_1)_i + (p_1)_{i+1}) - m(p_1)_i \\ u_i \\ -\frac{d}{\Delta x^2} ((p_2)_{i-1} - 2(p_2)_i + (p_2)_{i+1}) - n(p_2)_i \\ w_i \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2\Delta x} & & & \\ -\frac{1}{2\Delta x} & 0 & \frac{1}{2\Delta x} & & \\ \frac{1}{2\Delta x} & \cdots & \cdots & -\frac{1}{2\Delta x} & \\ & & & 0 & \\ \frac{1}{2\Delta x} & 0 & & & \end{pmatrix}$$

$$\bar{S} = \begin{pmatrix} 0 & G & 0 & 0 \\ G & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G \\ 0 & 0 & G & 0 \end{pmatrix}$$

dir. Diskrit Hamiltonian sisteminden

$$\begin{aligned} (p_1)_t &= \frac{1}{2\Delta x} (-A_2) u \\ u_t &= \frac{c}{2\Delta x^3} A p_1 + \frac{m}{2\Delta x} A_2 p_1 \\ (p_2)_t &= \frac{1}{2\Delta x} (-A_2) w \\ w_t &= \frac{d}{2\Delta x^3} A p_2 + \frac{n}{2\Delta x} A_2 p_2 \end{aligned}$$

yazılır. Burada A ve A_2 matrisleri aşağıdaki formdadır.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -2 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -2 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Diskrit Hamiltonian Bölünmüş Ortalama Vektör Alanı Yöntemi ile şu şekilde çözülür:

$$\frac{p_1^{n+1} - p_1^n}{\Delta t} = -\frac{1}{4\Delta x} A_2 (u^{n+1} + u^n) \quad (5.27)$$

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} = \frac{c}{4\Delta x^3} A (p_1^n + p_1^{n+1}) + \frac{m}{4\Delta x} A_2 (p_1^{n+1} + p_1^n) \quad (5.28)$$

$$\frac{p_2^{n+1} - p_2^n}{\Delta t} = -\frac{1}{\Delta x} A_2 (w^n + w^{n+1}) \quad (5.29)$$

$$\frac{w^{n+1} - w^n}{\Delta t} = \frac{d}{4\Delta x^3} A (p_2^n + p_2^{n+1}) + \frac{n}{4\Delta x} A_2 (p_2^{n+1} + p_2^n) \quad (5.30)$$

A ve A_2 matrislerini açarsak

$$\frac{1}{\Delta t} \left((p_1)_j^{n+1} - (p_1)_j^n \right) = \frac{1}{4\Delta x} (-u_{j-1}^n + u_{j+1}^n - u_{j-1}^{n+1} + u_{j+1}^{n+1}) \quad (5.31)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t} (u_j^{n+1} - u_j^n) &= \frac{c}{4\Delta x^3} \left((p_1)_{j-2}^n - 2(p_1)_{j-1}^n + 2(p_1)_{j+1}^n - (p_1)_{j+2}^n + (p_1)_{j-2}^{n+1} - 2(p_1)_{j-1}^{n+1} \right. \\ &\quad \left. + 2(p_1)_{j+1}^{n+1} - (p_1)_{j+2}^{n+1} \right) + \frac{m}{4\Delta x} \left((p_1)_{j-1}^n - (p_1)_{j+1}^n + (p_1)_{j-1}^{n+1} - (p_1)_{j+1}^{n+1} \right) \end{aligned} \quad (5.32)$$

$$\frac{1}{\Delta t} \left((p_2)_j^{n+1} - (p_2)_j^n \right) = \frac{1}{4\Delta x} (-w_{j-1}^n + w_{j+1}^n - w_{j-1}^{n+1} + w_{j+1}^{n+1}) \quad (5.33)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t} (w_j^{n+1} - w_j^n) &= \frac{c}{4\Delta x^3} \left((p_2)_{j-2}^n - 2(p_2)_{j-1}^n + 2(p_2)_{j+1}^n - (p_2)_{j+2}^n + (p_2)_{j-2}^{n+1} - 2(p_2)_{j-1}^{n+1} \right. \\ &\quad \left. + 2(p_2)_{j+1}^{n+1} - (p_2)_{j+2}^{n+1} \right) + \frac{m}{4\Delta x} \left((p_2)_{j-1}^n - (p_2)_{j+1}^n + (p_2)_{j-1}^{n+1} - (p_2)_{j+1}^{n+1} \right) \end{aligned} \quad (5.34)$$

eşitlikleri elde edilir. (5.31) den

$$-u_{j-1}^n + u_{j+1}^n - u_{j-1}^{n+1} + u_{j+1}^{n+1} = \frac{4\Delta x}{\Delta t} \left((p_1)_j^{n+1} - (p_1)_j^n \right) \quad (5.35)$$

$n = n - 1$ alınırsa

$$-u_{j-1}^{n-1} + u_{j+1}^{n-1} - u_{j-1}^n + u_{j+1}^n = \frac{4\Delta x}{\Delta t} \left((p_1)_j^n - (p_1)_j^{n-1} \right) \quad (5.36)$$

elde edilir.(5.35) den (5.36) çıkarılırsa

$$\begin{aligned} & - (u_{j-1}^n - u_{j-1}^{n-1}) + (u_{j+1}^n - u_{j+1}^{n-1}) - (u_{j-1}^{n+1} - u_{j-1}^n) + (u_{j+1}^{n+1} - u_{j+1}^n) \\ & = \frac{4\Delta x}{\Delta t} \left((p_1)_j^{n+1} - 2(p_1)_j^n + (p_1)_j^{n-1} \right) \end{aligned} \quad (5.37)$$

elde edilir. (5.32) de önce $j = j - 1$, $n = n - 1$ daha sonra aynı denklemde $j = j + 1$, $n = n - 1$ alınır

$$\begin{aligned} u_{j-1}^n - u_{j-1}^{n-1} &= \frac{c\Delta t}{4\Delta x^3} \left((p_1)_{j-3}^{n-1} - 2(p_1)_{j-2}^{n-1} + 2(p_1)_j^{n-1} - (p_1)_{j+1}^{n-1} + (p_1)_{j-3}^n - 2(p_1)_{j-2}^n \right. \\ & \left. + 2(p_1)_j^n - (p_1)_{j+1}^n + \frac{m\Delta t}{4\Delta x} \left((p_1)_{j-2}^{n-1} - (p_1)_j^{n-1} + (p_1)_{j-2}^n - (p_1)_j^n \right) \right) \end{aligned} \quad (5.38)$$

$$\begin{aligned} u_{j+1}^n - u_{j+1}^{n-1} &= \frac{c\Delta t}{4\Delta x^3} \left((p_1)_{j-1}^{n-1} - 2(p_1)_j^{n-1} + 2(p_1)_{j+2}^{n-1} - (p_1)_{j+3}^{n-1} + (p_1)_{j-1}^n - 2(p_1)_j^n \right. \\ & \left. + 2(p_1)_{j+2}^n - (p_1)_{j+3}^n + \frac{m\Delta t}{4\Delta x} \left((p_1)_j^{n-1} - (p_1)_{j+2}^{n-1} + (p_1)_j^n - (p_1)_{j+2}^n \right) \right) \end{aligned} \quad (5.39)$$

denklemleri bulunur. (5.32) de ilk olarak $j = j - 1$ sonra da aynı denklemde $j = j + 1$ alınır

$$\begin{aligned} u_{j-1}^{n+1} - u_{j-1}^n &= \frac{c\Delta t}{4\Delta x^3} \left((p_1)_{j-3}^n - 2(p_1)_{j-2}^n + 2(p_1)_j^n - (p_1)_{j+1}^n + (p_1)_{j-3}^{n+1} - 2(p_1)_{j-2}^{n+1} + 2(p_1)_j^{n+1} - (p_1)_{j+1}^{n+1} \right) \\ & + \frac{m\Delta t}{4\Delta x} \left((p_1)_{j-2}^n - (p_1)_j^n + (p_1)_{j-2}^{n+1} - (p_1)_j^{n+1} \right) \end{aligned} \quad (5.40)$$

$$\begin{aligned} u_{j+1}^{n+1} - u_{j+1}^n &= \frac{c\Delta t}{4\Delta x^3} \left((p_1)_{j-1}^n - 2(p_1)_j^n + 2(p_1)_{j+2}^n - (p_1)_{j+3}^n + (p_1)_{j-1}^{n+1} - 2(p_1)_j^{n+1} \right. \\ & \left. + 2(p_1)_{j+2}^{n+1} - (p_1)_{j+3}^{n+1} + \frac{m\Delta t}{4\Delta x} \left((p_1)_j^n - (p_1)_{j+2}^n + (p_1)_j^{n+1} - (p_1)_{j+2}^{n+1} \right) \right) \end{aligned} \quad (5.41)$$

elde edilir. (5.38), (5.39), (5.40), (5.41) nolu eşitlikleri (5.37) nolu eşitlikte yazarsak

$$\begin{aligned}
& \frac{c\Delta t}{4\Delta x^3} \left[(p_1)_{j-3}^{n-1} - 2(p_1)_{j-2}^{n-1} - (p_1)_{j-1}^{n-1} + 4(p_1)_j^{n-1} - (p_1)_{j+1}^{n-1} - 2(p_1)_{j+2}^{n-1} + (p_1)_{j+3}^{n-1} \right. \\
& + 2(p_1)_{j-3}^n - 4(p_1)_{j-2}^n - 2(p_1)_{j-1}^n + 8(p_1)_j^n - 2(p_1)_{j+1}^n - 4(p_1)_{j+2}^n + 2(p_1)_{j+3}^n + (p_1)_{j-3}^{n+1} \\
& \left. - 2(p_1)_{j-2}^{n+1} - (p_1)_{j-1}^{n+1} + 4(p_1)_j^{n+1} - (p_1)_{j+1}^{n+1} - 2(p_1)_{j+2}^{n+1} + (p_1)_{j+3}^{n+1} \right] + \frac{m\Delta t}{4\Delta x} \left[(p_1)_{j-2}^{n-1} \right. \\
& \left. - 2(p_1)_j^{n-1} + (p_1)_{j+2}^{n-1} + 2(p_1)_{j-2}^n - 4(p_1)_j^n + 2(p_1)_{j+2}^n + (p_1)_{j-2}^{n+1} - 2(p_1)_j^{n+1} + (p_1)_{j+2}^{n+1} \right] \\
& = \frac{4\Delta x}{\Delta t} \left[(p_1)_j^{n+1} - 2(p_1)_j^n + (p_1)_j^{n-1} \right]
\end{aligned} \tag{5.42}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\Delta t^2} \left[-(p_1)_j^{n+1} + 2(p_1)_j^n - (p_1)_j^{n-1} \right] = \frac{c}{16\Delta x^4} \left[(p_1)_{j-3}^{n-1} - 2(p_1)_{j-2}^{n-1} - (p_1)_{j-1}^{n-1} + 3(p_1)_j^{n-1} \right. \\
& \left. - (p_1)_{j+1}^{n-1} - 2(p_1)_{j+2}^{n-1} + (p_1)_{j+3}^{n-1} + 3(p_1)_{j-3}^n - 4(p_1)_{j-2}^n - 2(p_1)_{j-1}^n + 8(p_1)_j^n \right. \\
& \left. - 2(p_1)_{j+1}^n - 4(p_1)_{j+2}^n + 2(p_1)_{j+3}^n + (p_1)_{j-3}^{n+1} - 2(p_1)_{j-2}^{n+1} - (p_1)_{j-1}^{n+1} + 4(p_1)_j^{n+1} \right. \\
& \left. - (p_1)_{j+1}^{n+1} - 2(p_1)_{j+2}^{n+1} + (p_1)_{j+3}^{n+1} \right] + \frac{m}{16\Delta x^2} \left[(p_1)_{j-2}^{n-1} - 2(p_1)_j^{n-1} \right. \\
& \left. + (p_1)_{j+2}^{n-1} + 2(p_1)_{j-2}^n - 4(p_1)_j^n + 2(p_1)_{j+2}^n + (p_1)_{j-2}^{n+1} - 2(p_1)_j^{n+1} + (p_1)_{j+2}^{n+1} \right]
\end{aligned} \tag{5.43}$$

elde ederiz. Burada

$$(p_1)_j^n = \hat{p}_1 e^{i(j\bar{k}\Delta x + n\bar{w}\Delta t)} = \hat{p}_1 e^{i(j\bar{k} + n\bar{w})}, \quad \bar{k} = k\Delta x, \quad \bar{w} = w\Delta t$$

alalım. Bu durumda

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\Delta t^2} (e^{-i\bar{w}} - 2 + e^{i\bar{w}}) + \frac{c}{16\Delta x^4} \left[(e^{-i\bar{w}} + 2 + e^{i\bar{w}}) (e^{-3i\bar{k}} - 2e^{-2i\bar{k}} - e^{-i\bar{k}} + 4 - e^{i\bar{k}} - 2e^{2i\bar{k}} \right. \\
& \left. + e^{3i\bar{k}}) \right] + \frac{m}{16\Delta x^2} \left[(e^{-i\bar{w}} + 2 + e^{i\bar{w}}) (e^{-2i\bar{k}} - 2 + e^{2i\bar{k}}) \right] = 0
\end{aligned} \tag{5.44}$$

elde edilir. Burada $e^{-i\bar{w}} - 2 + e^{i\bar{w}} = -4 \sin^2 \left(\frac{\bar{w}}{2} \right)$ ve $e^{-i\bar{w}} + 2 + e^{i\bar{w}} = 4 \cos^2 \left(\frac{\bar{w}}{2} \right)$ eşitliklerinden yararlanılırsa

$$\begin{aligned}
& \Rightarrow \frac{1}{\Delta t^2} \left[-4 \sin^2 \left(\frac{\bar{w}}{2} \right) \right] + \frac{c}{16\Delta x^4} \left[4 \cos^2 \left(\frac{\bar{w}}{2} \right) (e^{-3i\bar{k}} - 2e^{-2i\bar{k}} - e^{-i\bar{k}} + 4 - e^{i\bar{k}} - 2e^{2i\bar{k}} + e^{3i\bar{k}}) \right. \\
& \left. + \frac{m}{16\Delta x^2} \left[4 \cos^2 \left(\frac{\bar{w}}{2} \right) (-4 \sin^2(\bar{k})) \right] \right] = 0
\end{aligned}$$

elde edilir. Her iki taraf $\frac{-\Delta t^2}{4 \cos^2(\frac{w}{2})}$ ile çarpılır, $e^{-i\bar{k}} + e^{i\bar{k}} = 2 \cos(\bar{k})$ eşitliği de kullanılırsa

$$\Rightarrow \tan^2\left(\frac{\bar{w}}{2}\right) - \frac{c\Delta t^2}{16\Delta x^4} [2 \cos(3\bar{k}) - 4 \cos(2\bar{k}) - 2 \cos(\bar{k}) + 4] + \frac{m\Delta t^2}{4\Delta x^2} \sin^2(\bar{k}) = 0 \quad (5.45)$$

elde edilir. Burada

$$\cos(3k) = \cos^3(k) - 3 \cos(k) \sin^2(k), \cos(2k) = \cos^2(k) - \sin^2(k)$$

trigonometrik dönüşümler kullanılır ve

$$\cos(\bar{k}) = c_1, \sin(\bar{k}) = c_2 \text{ alınır}$$

$$\Rightarrow \tan^2\left(\frac{\bar{w}}{2}\right) = \frac{c\Delta t^2}{16\Delta x^4} [2c_1^3 - 6c_1c_2^2 - 4c_1^2 + 4c_2^2 - 2c_1 + 4] - \frac{m\Delta t^2}{4\Delta x^2} c_2^2$$

elde edilir. Kolaylık olması açısından

$$l_1 = -\frac{m\Delta t^2}{4\Delta x^2}, l_2 = \frac{c\Delta t^2}{16\Delta x^4} \text{ alınır}$$

$$\begin{aligned} \bar{w}_1 &= 2 \arctan \left(\sqrt{l_1 c_2^2 + l_2 [2c_1^3 - 6c_1c_2^2 - 4c_1^2 + 4c_2^2 - 2c_1 + 4]} \right) \\ \bar{w}_2 &= 2 \arctan \left(-\sqrt{l_1 c_2^2 + l_2 [2c_1^3 - 6c_1c_2^2 - 4c_1^2 + 4c_2^2 - 2c_1 + 4]} \right) \end{aligned}$$

elde edilir. $\bar{w}_1, \bar{w}_2$ nin bu şekilde yazılabilmesi için tanjant fonksiyonunun tersinin mevcut olması gerekir. Tanjant fonksiyonunun $(-\pi/2, \pi/2)$ aralığında tersi vardır.

Dolayısıyla $-\pi < w < \pi$ olmalıdır. w ve k $[-\pi/2, \pi/2]$ aralığında tanımlandığından bu koşul sağlanır. Buradan

$$\begin{aligned} w_1 &= \frac{2}{\Delta t} \arctan \left(\sqrt{l_1 c_2^2 + l_2 [2c_1^3 - 6c_1c_2^2 - 4c_1^2 + 4c_2^2 - 2c_1 + 4]} \right) \\ w_2 &= \frac{2}{\Delta t} \arctan \left(-\sqrt{l_1 c_2^2 + l_2 [2c_1^3 - 6c_1c_2^2 - 4c_1^2 + 4c_2^2 - 2c_1 + 4]} \right) \end{aligned}$$

elde edilir. Benzer işlemler q_2 ve w için yapılırsa

$$\Rightarrow \tan^2\left(\frac{\bar{w}}{2}\right) = \frac{d\Delta t^2}{16\Delta x^4} [2c_1^3 - 6c_1c_2^2 - 4c_1^2 + 4c_2^2 - 2c_1 + 4] - \frac{n\Delta t^2}{4\Delta x^2} c_2^2$$

bulunur. Buraya kadar yapılanlar kesikli dağılım içindi, şimdi sürekli dağılım için işlemleri yapalım.

$$\begin{aligned} \partial_{tt}\alpha + \alpha_1 \partial_{xxxx}\alpha + 2\sigma_1 \alpha_1 a^2 \partial_{xx}\alpha &= 0 \\ \partial_{tt}\beta + \alpha_2 \partial_{xxxx}\beta + 2\sigma_2 \alpha_2 b^2 \partial_{xx}\beta &= 0 \end{aligned}$$

lineer sistem için dağılım analizi çözümü

$\alpha = e^{i(kx+wt)}$, $\beta = e^{i(k_1x+w_1t)}$ şeklinde olduğu kabul edilerek bulundu.

$\alpha_{tt} = -w^2\alpha$, $\alpha_{xx} = -k^2\alpha$, $\alpha_{xxxx} = k^4\alpha$ olduğu açıktır. Buradan

$$w^2 - k^2 (\alpha_1^2 k^2 - 2\sigma_1 \alpha_1 a^2) = 0$$

elde edilir. β için ise

$$w_1^2 - k_1^2 (\alpha_2^2 k_1^2 - 2\sigma_2 \alpha_2 b^2) = 0$$

bulunur.

5.6. İkili NLS Denklem Sistemine Ek Yöntemin Uygulanması

(5.7) nolu ikili NLS denklemini ele alalım:

$$\begin{aligned} \frac{p^{n+1} - p^n}{\Delta t} &= -\alpha_1 A \int_0^1 [(1-\varepsilon)q^n + \varepsilon q^{n+1}] d\varepsilon \\ &\quad - \sigma_1 \int_0^1 \left[(p^n)^2 ((1-\varepsilon)q^n + \varepsilon q^{n+1}) + ((1-\varepsilon)q^n + \varepsilon q^{n+1})^3 \right] d\varepsilon \\ &\quad - \mu \int_0^1 \left[(u^{n+1})^2 + (v^{n+1})^2 \right] ((1-\varepsilon)q^n + \varepsilon q^{n+1}) d\varepsilon \\ &= -\alpha_1 A \left(\frac{1}{2}q^n + \frac{1}{2}q^{n+1} \right) \\ &\quad - \sigma_1 \left[(p^n)^2 \left(\frac{1}{2}q^n + \frac{1}{2}q^{n+1} \right) + \frac{1}{4}(q^n)^3 + \frac{1}{4}(q^n)^2 q^{n+1} + \frac{1}{4}q^n (q^{n+1})^2 + \frac{1}{4}(q^{n+1})^3 \right] \\ &\quad - \mu \left[(u^{n+1})^2 + (v^{n+1})^2 \right] \left(\frac{1}{2}q^n + \frac{1}{2}q^{n+1} \right) \\ &= -\frac{\alpha_1}{2} A (q^n + q^{n+1}) \\ &\quad - \frac{\sigma_1}{4} \left[2(p^n)^2 q^n + 2(p^n)^2 q^{n+1} + (q^n)^3 + (q^n)^2 q^{n+1} + q^n (q^{n+1})^2 + (q^{n+1})^3 \right] \\ &\quad - \frac{\mu}{2} \left[(u^{n+1})^2 q^n + (u^{n+1})^2 q^{n+1} + (v^{n+1})^2 q^n + (v^{n+1})^2 q^{n+1} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{q^{n+1} - q^n}{\Delta t} &= \alpha_1 A \int_0^1 [(1-\varepsilon)p^n + \varepsilon p^{n+1}] d\varepsilon \\ &\quad + \sigma_1 \int_0^1 \left[((1-\varepsilon)p^n + \varepsilon p^{n+1})^3 + (q^{n+1})^2 ((1-\varepsilon)p^n + \varepsilon p^{n+1}) \right] d\varepsilon \\ &\quad + \mu \int_0^1 \left[(u^{n+1})^2 + (v^{n+1})^2 \right] ((1-\varepsilon)p^n + \varepsilon p^{n+1}) d\varepsilon \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \alpha_1 A \left(\frac{1}{2} p^n + \frac{1}{2} p^{n+1} \right) \\
&\quad + \sigma_1 \left[\frac{1}{4} (p^n)^3 + \frac{1}{4} (p^n)^2 p^{n+1} + \frac{1}{4} p^n (p^{n+1})^2 + \frac{1}{4} (p^{n+1})^3 + (q^{n+1})^2 \left(\frac{1}{2} p^n + \frac{1}{2} p^{n+1} \right) \right] \\
&\quad + \mu \left[\left((u^{n+1})^2 + (v^{n+1})^2 \right) \left(\frac{1}{2} p^n + \frac{1}{2} p^{n+1} \right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\alpha_1}{2} A (p^n + p^{n+1}) \\
&\quad + \frac{\sigma_1}{4} \left[(p^n)^3 + (p^n)^2 p^{n+1} + p^n (p^{n+1})^2 + (p^{n+1})^3 + 2 (q^{n+1})^2 p^n + 2 (q^{n+1})^2 p^{n+1} \right] \\
&\quad + \frac{\mu}{2} \left[(u^{n+1})^2 p^n + (u^{n+1})^2 p^{n+1} + (v^{n+1})^2 p^n + (v^{n+1})^2 p^{n+1} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} &= -\alpha_2 A \int_0^1 [(1-\varepsilon)v^n + \varepsilon v^{n+1}] d\varepsilon \\
&\quad - \sigma_2 \int_0^1 \left[(u^n)^2 ((1-\varepsilon)v^n + \varepsilon v^{n+1}) + ((1-\varepsilon)v^n + \varepsilon v^{n+1})^3 \right] d\varepsilon \\
&\quad - \mu \int_0^1 \left[((p^n)^2 + (q^n)^2) ((1-\varepsilon)v^n + \varepsilon v^{n+1}) \right] d\varepsilon
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\alpha_2 A \left(\frac{1}{2} v^n + \frac{1}{2} v^{n+1} \right) \\
&\quad - \sigma_2 \left[(u^n)^2 \left(\frac{1}{2} v^n + \frac{1}{2} v^{n+1} \right) + \frac{1}{4} (v^n)^3 + \frac{1}{4} (v^n)^2 v^{n+1} + \frac{1}{4} v^n (v^{n+1})^2 + \frac{1}{4} (v^{n+1})^3 \right] \\
&\quad - \mu \left[(p^n)^2 + (q^n)^2 \right] \left(\frac{1}{2} v^n + \frac{1}{2} v^{n+1} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{\alpha_2}{2} A (v^n + v^{n+1}) \\
&\quad - \frac{\sigma_2}{4} \left[2 (u^n)^2 v^n + 2 (u^n)^2 v^{n+1} + (v^n)^3 + (v^n)^2 v^{n+1} + v^n (v^{n+1})^2 + (v^{n+1})^3 \right] \\
&\quad - \frac{\mu}{2} \left[(p^n)^2 v^n + (p^n)^2 v^{n+1} + (q^n)^2 v^n + (q^n)^2 v^{n+1} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{v^{n+1} - v^n}{\Delta t} &= \alpha_2 \Lambda \int_0^1 ((1-\varepsilon)u^n + \varepsilon u^{n+1}) d\varepsilon \\
&\quad + \sigma_2 \int_0^1 \left[((1-\varepsilon)u^n + \varepsilon u^{n+1})^3 + (v^{n+1})^2 ((1-\varepsilon)u^n + \varepsilon u^{n+1}) \right] d\varepsilon \\
&\quad + \mu \left[((p^n)^2 + (q^n)^2) ((1-\varepsilon)u^n + \varepsilon u^{n+1}) \right] d\varepsilon
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \alpha_2 A \left(\frac{1}{2} u^n + \frac{1}{2} u^{n+1} \right) \\
&\quad + \sigma_2 \left[\frac{1}{4} (u^n)^3 + \frac{1}{4} (u^n)^2 u^{n+1} + \frac{1}{4} u^n (u^{n+1})^2 + \frac{1}{4} (u^{n+1})^3 + (v^{n+1})^2 \left(\frac{1}{2} u^n + \frac{1}{2} u^{n+1} \right) \right] \\
&\quad + \mu \left[((p^n)^2 + (q^n)^2) \left(\frac{1}{2} u^n + \frac{1}{2} u^{n+1} \right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\alpha_2}{2} A (u^n + u^{n+1}) \\
&\quad + \frac{\sigma_2}{4} \left[(u^n)^3 + (u^n)^2 u^{n+1} + u^n (u^{n+1})^2 + (u^{n+1})^3 + 2 (v^{n+1})^2 u^n + 2 (v^{n+1})^2 u^{n+1} \right] \\
&\quad + \frac{\mu}{2} \left[(p^n)^2 u^n + (p^n)^2 u^{n+1} + (q^n)^2 u^n + (q^n)^2 u^{n+1} \right]
\end{aligned}$$

olarak bulunur ve jakobiye aşağıdaki şekilde hesaplanır:

$$\begin{aligned}
J &= \begin{pmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -a_1 A & 0 & 0 \\ a_1 A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a_2 A \\ 0 & 0 & a_2 A & 0 \end{pmatrix} \\
&+ a_3 \begin{pmatrix} 0 & -2(p^n)^2 - (q^n)^2 & 0 & 0 \\ (p^n)^2 + 2p^n p^{n+1} & 4q^{n+1} p^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&+ a_3 \begin{pmatrix} 0 & -2q^n q^{n+1} - 3(q^{n+1})^2 & 0 & 0 \\ 3(p^{n+1})^2 + 2(q^{n+1})^2 & 4q^{n+1} p^{n+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&+ a_4 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2(u^n)^2 - (v^n)^2 \\ 0 & 0 & (u^n)^2 + 2u^n u^{n+1} & 4v^{n+1} u^n \end{pmatrix} \\
&+ a_4 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2v^n v^{n+1} - 3(v^{n+1})^2 \\ 0 & 0 & 3(u^{n+1})^2 + 2(v^{n+1})^2 & 4v^{n+1} u^{n+1} \end{pmatrix} \\
&+ a_5 \begin{pmatrix} 0 & -(u^{n+1})^2 - (v^{n+1})^2 & -2u^{n+1} q^n & -2v^{n+1} q^n \\ (u^{n+1})^2 + (v^{n+1})^2 & 0 & 2u^{n+1} p^n & 2v^{n+1} p^n \\ 0 & 0 & 0 & -(p^n)^2 - (q^n)^2 \\ 0 & 0 & (p^n)^2 + (q^n)^2 & 0 \end{pmatrix} \\
&+ a_5 \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2u^{n+1} q^{n+1} & -2v^{n+1} q^{n+1} \\ 0 & 0 & 2u^{n+1} p^{n+1} & 2v^{n+1} p^{n+1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Burada

$$a_1 = \frac{\alpha_1 \Delta t}{2}, a_2 = \frac{\alpha_2 \Delta t}{2}, a_3 = \frac{\sigma_1 \Delta t}{4}, a_4 = \frac{\sigma_2 \Delta t}{4}, a_5 = \frac{\mu \Delta t}{2}$$

şeklindedir.

5.7. Lineer Olmayan Güçlü İkili Schrödinger Denklemi

$u = p + iq$, $v = \mu + i\xi$ olmak üzere u, v kompleks fonksiyonlar,

$$u(x, 0) = u_0(x), v(x, 0) = v_0(x),$$

$$u(x_L, t) = u(x_R, t), v(x_L, t) = v(x_R, t), t > 0$$

başlangıç ve sınır koşulları olmak üzere lineer olmayan güçlü ikili Schrödinger denklemi (SCNLS) aşağıdaki şekildedir [36].

$$\begin{aligned} iu_t + \beta u_{xx} + [\alpha_1 |u|^2 + (\alpha_1 + 2\alpha_2) |v|^2] u + \gamma u + \Gamma v &= 0 \\ iv_t + \beta v_{xx} + [\alpha_1 |v|^2 + (\alpha_1 + 2\alpha_2) |u|^2] v + \gamma v + \Gamma u &= 0 \end{aligned} \quad (5.46)$$

Burada $u(x, t)$ ve $v(x, t)$ uzaysal koordinat x 'in karmaşık değerli fonksiyonları, t zaman, $\beta, \alpha_1, \alpha_2, \gamma, \Gamma$ reel sabitlerdir.

Burada β parametresi grup hız dağılımını tanımlar ve α_1 ile orantılı terim çift kırılmalı ortamlarda darbeler için bir sinyalin kendi kendine odaklanmasını tanımlar. Lineer olmayan bağlantı veya çapraz modülasyon parametresi $\alpha = \alpha_1 + 2\alpha_2$, çözümün her bir bileşeninin diğer bileşenden nasıl etkilendiğini açıklar. γ sabiti, normalleştirilmiş çift kırılma olarak adlandırılan ortam potansiyelidir. Γ parametresi, doğrusal çift kırılma olarak da adlandırılan doğrusal bağlantı parametresidir.

SCNLS, matematiksel fizik, doğrusal olmayan optik, plazma fiziği ve biyolojik yapıların birçok probleminde kapsamlı bir uygulamaya sahiptir.

SCNLS denkleminde $\alpha_2 = 0$ için Monakov modeli tamamen integrallenebilirdir. Ayrıca, $\alpha_2 = \gamma = \Gamma = 0$ durumu için ters saçılma dönüşümü yoluyla analitik çözümler mevcuttur.

5.8. Lineer Olmayan Güçlü İkili Schrödinger Denklemin Ek Yöntemin Uygulanması

SCNLS denklemi, reel değerli denklemlerin bir sistemi olarak yazılabilir:

$$\begin{aligned} p_t + \beta q_{xx} + [\alpha_1 (p^2 + q^2) + \alpha (\mu^2 + \xi^2)] q + \gamma q + \Gamma \xi &= 0 \\ -q_t + \beta p_{xx} + [\alpha_1 (p^2 + q^2) + \alpha (\mu^2 + \xi^2)] p + \gamma p + \Gamma \mu &= 0 \\ \mu_t + \beta \xi_{xx} + [\alpha_1 (\mu^2 + \xi^2) + \alpha (p^2 + q^2)] \xi + \gamma \xi + \Gamma q &= 0 \\ -\xi_t + \beta \mu_{xx} + [\alpha_1 (\mu^2 + \xi^2) + \alpha (p^2 + q^2)] \mu + \gamma \mu + \Gamma p &= 0 \end{aligned} \quad (5.47)$$

Bu denklemler, $z = (p, q, \mu, \xi)$ faz uzayında sonsuz boyutlu bir Hamiltonian sistemini temsil eder.

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.48)$$

$$z_t = S^{-1} \frac{\delta H}{\delta z}$$

Burada Hamiltonian sistem

$$H = \int_{\Omega} \left\{ W - \frac{\beta}{2} \left[\left(\frac{\partial q}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mu}{\partial x} \right)^2 \right] \right\} dx \quad (5.49)$$

$$W = \frac{\alpha_1}{4} \left[(p^2 + q^2)^2 + (\mu^2 + \xi^2)^2 \right] + \frac{\alpha}{2} (p^2 + q^2) (\mu^2 + \xi^2) + \frac{\gamma}{2} (p^2 + q^2 + \mu^2 + \xi^2) + \Gamma(\mu p + \xi q) \quad (5.50)$$

Buradan diskrit Hamiltonian sistem

$$\begin{aligned} \bar{H} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\alpha_1}{4} \left[(p_i^2 + q_i^2)^2 + (\mu_i^2 + \xi_i^2)^2 \right] + \frac{\alpha}{2} (p_i^2 + q_i^2) (\mu_i^2 + \xi_i^2) \\ + \frac{\gamma}{2} (p_i^2 + q_i^2 + \mu_i^2 + \xi_i^2) + \Gamma(\mu_i p_i + \xi_i q_i) - \frac{\beta}{2} \left[\left(\frac{q_{i+1} - q_i}{\Delta x} \right)^2 \right. \\ \left. + \left(\frac{p_{i+1} - p_i}{\Delta x} \right)^2 + \left(\frac{\mu_{i+1} - \mu_i}{\Delta x} \right)^2 + \left(\frac{\xi_{i+1} - \xi_i}{\Delta x} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (5.51)$$

elde edilir. Yarı ayrık Hamiltonian sistem

$$\begin{aligned} p_t &= -\alpha_1 q (p^2 + q^2) - \alpha q (\mu^2 + \xi^2) - \gamma q - \Gamma \xi + \beta A q \\ q_t &= \alpha_1 p (p^2 + q^2) + \alpha p (\mu^2 + \xi^2) + \gamma p + \Gamma \mu - \beta A p \\ \mu_t &= -\alpha_1 \xi (\mu^2 + \xi^2) - \alpha \xi (p^2 + q^2) - \gamma \xi - \Gamma q + \beta A \xi \\ \xi_t &= \alpha_1 \mu (\mu^2 + \xi^2) + \alpha \mu (p^2 + q^2) + \gamma \mu + \Gamma p - \beta A \mu \end{aligned}$$

olmak üzere, bu sisteme ek yöntemi uygularsak aşağıdaki sonuçları elde ederiz:

$$\begin{aligned} \frac{p^{n+1} - p^n}{\Delta t} = & -\frac{\alpha_1}{4} \left[2q^n (p^n)^2 + 2q^{n+1} (p^n)^2 + (q^n)^3 + (q^n)^2 q^{n+1} + q^n (q^{n+1})^2 + (q^{n+1})^3 \right] \\ & -\frac{\alpha}{2} \left[q^n (\mu^{n+1})^2 + q^n (\xi^{n+1})^2 + q^{n+1} (\mu^{n+1})^2 + q^{n+1} (\xi^{n+1})^2 \right] \\ & -\frac{\gamma}{2} (q^n + q^{n+1}) - \Gamma \xi^{n+1} + \beta A \left(\frac{1}{2} q^n + \frac{1}{2} q^{n+1} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{q^{n+1} - q}{\Delta t} = & \frac{\alpha_1}{4} [p^n]^3 + (p^n)^2 p^{n+1} + p^n (p^{n+1})^2 + (p^{n+1})^3 + 2p^n (q^{n+1})^2 + 2p^{n+1} (q^{n+1})^2] \\ & + \frac{\alpha}{2} [p^n (\mu^{n+1})^2 + p^n (\xi^{n+1})^2 + p^{n+1} (\mu^{n+1})^2 + p^{n+1} (\xi^{n+1})^2] \\ & + \frac{\gamma}{2} (p^n + p^{n+1}) + \Gamma \mu^{n+1} - \beta A \left(\frac{1}{2} p^n + \frac{1}{2} p^{n+1} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\mu^n - \mu^n}{\Delta t} = & -\frac{\alpha_1}{4} \left[2\xi^n (\mu^n)^2 + 2\xi^{n+1} (\mu^n)^2 + (\xi^n)^3 + (\xi^n)^2 \xi^{n+1} + \xi^n (\xi^{n+1})^2 + (\xi^{n+1})^3 \right] \\ & -\frac{\alpha}{2} [\xi^n (p^n)^2 + \xi^n (q^n)^2 + \xi^{n+1} (p^n)^2 + \xi^{n+1} (q^n)^2] \\ & -\frac{\gamma}{2} (\xi^n + \xi^{n+1}) - \Gamma q^n + \beta A \left(\frac{1}{2} \xi^n + \frac{1}{2} \xi^{n+1} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\xi^{n+1} - \xi^n}{\Delta t} = & \frac{\alpha_1}{4} [(\mu^n)^3 + (\mu^n)^2 \mu^{n+1} + \mu^n (\mu^{n+1})^2 + (\mu^{n+1})^3 + 2\mu^n (\xi^{n+1})^2 + 2\mu^{n+1} (\xi^{n+1})^2] \\ & + \frac{\alpha}{2} [\mu^n (p^n)^2 + \mu^n (q^n)^2 + \mu^{n+1} (p^n)^2 + \mu^{n+1} (q^n)^2] \\ & + \frac{\gamma}{2} (\mu^n + \mu^{n+1}) + \Gamma p^n - \beta A \left(\frac{1}{2} \mu^n + \frac{1}{2} \mu^{n+1} \right) \end{aligned}$$

bulunur ve jakobiyen aşağıdaki şekilde elde edilir :

$$\begin{aligned} J = & \begin{pmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & a \cdot A & 0 & 0 \\ -a \cdot A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \cdot A \\ 0 & 0 & -a \cdot A & 0 \end{pmatrix} \\ & + b \begin{pmatrix} 0 & -2(p^n)^2 - (q^n)^2 & 0 & 0 \\ (p^n)^2 + 2p^n p^{n+1} & 4p^n q^{n+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2(\mu^n)^2 - (\xi^n)^2 \\ 0 & 0 & (\mu^n)^2 + 2\mu^n \mu^{n+1} & 4\mu^n \xi^{n+1} \end{pmatrix} \\ & + b \begin{pmatrix} 0 & -2q^n q^{n+1} - 3(q^{n+1})^2 & 0 & 0 \\ 3(p^{n+1})^2 + 2(q^{n+1})^2 & 4p^{n+1} q^{n+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2\xi^n \xi^{n+1} - 3(\xi^{n+1})^2 \\ 0 & 0 & 3(\mu^{n+1})^2 + 2(\xi^{n+1})^2 & 4\mu^{n+1} \xi^{n+1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +c \begin{pmatrix} 0 & -(\mu^{n+1})^2 - (\xi^{n+1})^2 & -2q^n \mu^{n+1} - 2q^{n+1} \mu^{n+1} & -2q^n \xi^{n+1} - 2q^{n+1} \xi^{n+1} \\ (\mu^{n+1})^2 + (\xi^{n+1})^2 & 0 & 2p^n \mu^{n+1} + 2p^{n+1} \mu^{n+1} & 2p^n \xi^{n+1} + 2p^{n+1} \xi^{n+1} \\ 0 & 0 & 0 & -(p^n)^2 - (q^n)^2 \\ 0 & 0 & (p^n)^2 + (q^n)^2 & 0 \end{pmatrix} \\
& +d \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + e \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Burada

$$a = \frac{\beta}{2}, b = \frac{\alpha_1}{4}, c = \frac{\alpha}{2}, d = \frac{\gamma}{2}, e = \Gamma$$

şeklindedir.

5.9. Lineer Olmayan Güçlü İkili Schrödinger Denklemin Bölünmüş Ortalama Vektör Alanı Yönteminin Uygulanması

$$\begin{aligned}
iu_t + \beta u_{xx} + [\alpha_1 |u|^2 + (\alpha_1 + 2\alpha_2) |v|^2] u + \gamma u + \Gamma v &= 0 \\
iv_t + \beta v_{xx} + [\alpha_1 |v|^2 + (\alpha_1 + 2\alpha_2) |u|^2] v + \gamma v + \Gamma u &= 0
\end{aligned}$$

olmak üzere SCNLS denkleminin başlangıç ve sınır koşulları aşağıdaki şekildedir [37].

$$\begin{aligned}
u(x, 0) &= u_0(x), \quad v(x, 0) = v_0(x) \\
u(x_L, t) &= u(x_R, t), \quad v(x_L, t) = v(x_R, t), \quad t > 0
\end{aligned}$$

Burada $u(x, t)$ ve $v(x, t)$ uzaysal koordinat x 'in karmaşık değerli fonksiyonları, $\beta, \alpha_1, \alpha_2, \gamma, \Gamma$ reel sabitlerdir.

SCNLS sistemi reel değerli denklemlerin bir sistemi olarak yazılabilir:

$$u = p + iq, \quad v = \mu + i\xi$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
p_t + \beta q_{xx} + [\alpha_1 (p^2 + q^2) + \alpha (\mu^2 + \xi^2)] q + \gamma q + \Gamma \xi &= 0 \\
-q_t + \beta p_{xx} + [\alpha_1 (p^2 + q^2) + \alpha (\mu^2 + \xi^2)] p + \gamma p + \Gamma \mu &= 0 \\
\mu_t + \beta \xi_{xx} + [\alpha_1 (\mu^2 + \xi^2) + \alpha (p^2 + q^2)] \xi + \gamma \xi + \Gamma q &= 0 \\
-\xi_t + \beta \mu_{xx} + [\alpha_1 (\mu^2 + \xi^2) + \alpha (p^2 + q^2)] \mu + \gamma \mu + \Gamma p &= 0
\end{aligned}$$

olarak yazılır. Bu denklemler, $z = (p, q, \mu, \xi)$ faz uzayında sonsuz boyutlu bir Hamiltonian sistemini temsil eder.

$$z_t = \mathbf{S}^{-1} \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta z}, \quad \mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Burada Hamiltonian aşağıdaki şekildedir:

$$H = \int_{\Omega} \left\{ W - \frac{\beta}{2} \left[\left(\frac{\partial q}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mu}{\partial x} \right)^2 \right] \right\} dx$$

$$W = \frac{\alpha_1}{4} \left[(p^2 + q^2)^2 + (\mu^2 + \xi^2)^2 \right] + \frac{\alpha}{2} (p^2 + q^2) (\mu^2 + \xi^2) + \frac{\gamma}{2} (p^2 + q^2 + \mu^2 + \xi^2) + \Gamma(\mu p + \xi q)$$

Buradan diskrit Hamiltonian

$$\begin{aligned} \bar{H} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\alpha_1}{4} \left[(p_i^2 + q_i^2)^2 + (\mu_i^2 + \xi_i^2)^2 \right] + \frac{\alpha}{2} (p_i^2 + q_i^2) (\mu_i^2 + \xi_i^2) \\ + \frac{\gamma}{2} (p_i^2 + q_i^2 + \mu_i^2 + \xi_i^2) + \Gamma(\mu_i p_i + \xi_i q_i) - \frac{\beta}{2} \left[\left(\frac{q_{i+1} - q_i}{\Delta x} \right)^2 \right. \\ \left. + \left(\frac{p_{i+1} - p_i}{\Delta x} \right)^2 + \left(\frac{\mu_{i+1} - \mu_i}{\Delta x} \right)^2 + \left(\frac{\xi_{i+1} - \xi_i}{\Delta x} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (5.52)$$

şeklindedir. Yarı ayrık Hamiltonian sistem ise

$$\begin{aligned} p_t &= -\alpha_1 q (p^2 + q^2) - \alpha q (\mu^2 + \xi^2) - \gamma q - \Gamma \xi + \beta A q \\ q_t &= \alpha_1 p (p^2 + q^2) + \alpha p (\mu^2 + \xi^2) + \gamma p + \Gamma \mu - \beta A p \\ \mu_t &= -\alpha_1 \xi (\mu^2 + \xi^2) - \alpha \xi (p^2 + q^2) - \gamma \xi - \Gamma q + \beta A \xi \\ \xi_t &= \alpha_1 \mu (\mu^2 + \xi^2) + \alpha \mu (p^2 + q^2) + \gamma \mu + \Gamma p - \beta A \mu \end{aligned}$$

şeklindedir.

6. SONUÇ

Tez çalışmasında Schrödinger denklemleri üzerine araştırma yapılmıştır. Schrödinger denklemlerinden CNLS ve SCNLS sistemleri ele alınmıştır. Araştırmalarda CNLS'e PAVF, PAVF-C, PAVF* yöntemlerinin, SCNLS'e PAVF-C ve PAVF* uygulanmadığı tespit edilmiştir. Daha önce yapılan çalışmalarda bu yöntemlerin AVF yöntemine benzer olarak enerjiyi koruduğu bunun yanısıra ele alınan örneklerde yakınsamanın daha iyi olduğu gösterilmiştir [36]. Çalışmalardan elde edilen başka bir sonuçta yöntemlerin bilgisayar ortamında farklı sürelerde ve hassaslıkta sonuçlar verdiğidir.

Bu çalışmada ise CNLS'e ilk defa PAVF, PAVF-C, PAVF* yöntemleri uygulanmış, dağılım analizi yapılmıştır. Ayrıca SCNLS'e ilk defa PAVF-C, PAVF* yöntemleri uygulanmıştır.

Bundan sonraki çalışmalarda bu sistemlerin MATLAB yardımıyla çözümlerini elde etmek istiyoruz.



7. KAYNAKLAR

- [1] D. J. Benney and A. C. Newell, *The propagation of nonlinear wave envelopes*. Journal of mathematics and Physics, 46. 1-4 133-139, 1967.
- [2] F. Dias and T. Bridges, *Weakly nonlinear wave packets and the nonlinear Schrödinger equation*. Summer School Graduate Course. Nonlinear waves in fluids. Recent Advancement and Modern Applications, International Centre for Mechanical Sciences. Udine, Italy 2004.
- [3] R. Hirota, *Exact solution of the Korteweg—de Vries equation for multiple collisions of solitons*. Physical Review Letters, 27.18: 1192, 1971.
- [4] R. Hirota, *Exact solution of the modified Korteweg-de Vries equation for multiple collisions of solitons*. Journal of the Physical Society of Japan, 33.5: 1456-1458, 1972.
- [5] R. Hirota, *Exact envelope-soliton solutions of a nonlinear wave equation*. Journal of Mathematical Physics, 14.7: 805-809, 1973.
- [6] A. Shabat and V. Zakharov, *Exact theory of two-dimensional self-focusing and one-dimensional self-modulation of waves in nonlinear media*. Soviet physics JETP, 34.1: 62, 1972.
- [7] M. J. Ablowitz, J. F. Ladik, *Nonlinear differential difference equations*. Journal of Mathematical Physics, 16.3: 598-603, 1975.
- [8] R. Hirota, *Direct methods in soliton theory*. In: Solitons, Topics in Current Physics, vol. 17. Springer, Berlin, Heidelberg, 1980.
- [9] J. A. C. Weideman and B. M. Herbst, *Split-step methods for the solution of the nonlinear Schrödinger equation*. SIAM Journal on Numerical Analysis, 23.3: 485-507, 1986.
- [10] E. A. Overman II, D. W. McLaughlin, A. R. Bishop, *Coherence and chaos in the driven damped sine-Gordon equation: measurement of the soliton spectrum*. Physica D: Nonlinear Phenomena, 19.1: 1-41, 1986.
- [11] M. K. Jain, T. Aziz, *Spline Function Approximation For Differential Equations*. Comput. Methods Appl. Mech. Eng., 26:129-143, 1981.
- [12] S. Çavuşoğlu, *Bazı Sınır Değer Problemleri ve Yaklaşım Yöntemleri*. Ocak 2017.
- [13] N.Özalp, *Nümerik Analiz-Bilimsel Hesaplama Matematiği*. Gazi Yayınları, 2012
- [14] A. M. WAZWAZ, *Solitary Waves Theory*. In: *Partial Differential Equations and Solitary Waves Theory*. Library of congress control number:2009920462, Heidelberg, 1-761, 2009
- [15] M. Zengin, C. Selam, S. Korcak, *Mekanik*, Bilim Yayıncılık. Ankara, 291s, 1999
- [16] E. Rızaoğlu, N. Sünel, *Klasik Mekanik*. Seçkin Yayıncılık, Ankara, 570s, 2006

- [17] T. W.B. Kibble, F. H. Berkshire, (Çeviri Editörü) K. Çolakoğlu, *Klasik Mekanik*. Palme Yayıncılık, Ankara, 361s, 1999
- [18] Y. F. Chang, M. Tabor, J. Weiss, *Analytic Structure of the Henon-Heiles Hamiltonian in Integrable and Nonintegrable Regimes*. J.Math. Phys., 23(4): 531-538, 1981
- [19] M. N. Özer, *Related Integrable Hamilton Systems, Doktora Tezi*. The University of Leeds, England, 158s, 1994
- [20] Ş. Civelek, *The Lifts of Lagrange and Hamilton Equations to the Extended Vector Bundles*. Mathematical Computational Applications, 1.1: 21-28, Manisa, Türkiye, 1996
- [21] M. De Leon, J. A. Oubina, P. R. Rodrigues, M. R. Salgado, E. Merino, *Hamiltonian Systems on k-Cosymplectic Manifolds*. Project PB940106 and Project XUGA13101A94, Spain, 2001
- [22] M. Tekkoyun, *Genişletilmiş Kahler Manifoldlara Euler-Lagrange ve Hamilton Denklemlerin Yüksek Mertebeden Lift'leri, Doktora Tezi*. Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir, 71s, 2002
- [23] M. Zabzine, *Hamiltonian Perspective on Generalized Complex Structure*. <http://arxiv.org/abs/hep-th/0502137>. (15.02.2005), 2005
- [24] K. R. Meyer, G. R. Hall, D. Offin, *Introduction to Hamiltonian Dynamical Systems and the N-Body Problem*. Second Edition, Applied Mathematical Sciences Volume 90.
- [25] E. Hairer, *Energy-preserving variant of collocation methods*. J. Numer. Anal. Ind. Appl. Math., 5, 73-84, 2010.
- [26] D. Cohen and E. Hairer, *Linear energy-preserving integrators for poisson systems*. BIT Numerical Mathematics, 51, 91-101, 2011.
- [27] E. Cellodini, R. I. McLachlan, B. Owren and G. R. W. Quispel, *Structure of B-series for Some Classes of Geometric Integrators*. Found. Comput. Math., 10, 673-693, 2010.
- [28] R.I. Machlahlan and Q.R.W. Quispel, *Geometric integration using discrete gradients*, 357, 1021–1046, 1999.
- [29] O. Gonzales, *Time integration and discrete Hamiltonian systems*, J Nonlinear Sci, 449–467
- [30] W. Cai, H. Li, Y. Wang, *Partitioned AVF methods*. arXiv preprint arXiv:1708.08059, School of Mathematical Sciences, Peking University, Beijing, 100871, China 2017.
- [31] C. P. Oliver, *A numerical study of the spectrum of the nonlinear Schrödinger equation*, MS. Thesis, Stellenbosch University, 20008.
- [32] A. Aydın and B. Karasözen, *Symplectic and Multi-symplectic methods for coupled nonlinear Schrödinger equations with periodic solutions*, Computer Physics Communications, 177, 566-583, 2007.

- [33] M.S. Ismail and T.R. Taha, *Numerical simulation of coupled nonlinear Schrödinger equation*, Math. Comput. Simulation, 56, 547-562, 2001.
- [34] Y. Xu and C.-W. Shu, *Local discontinuous Galerkin methods for nonlinear Schrödinger equations*, Journal of Computational Physics, 205, 72-97, 2005.
- [35] C. Akkoyunlu, *Lineer Olmayan Schrödinger Denkleminin Enerji Korumalı Yöntemlerle Çözümü ve Model İndirgeme Yönteminin Uygulanması*, Temmuz 2013.
- [36] C. Akkoyunlu, *Energy preserving integration of the strongly coupled non-linear Schrödinger equation*, AIP Conference Proceedings 1653, 020008 (2015).
- [37] C. Akkoyunlu, *Partitioned Average Vector Field Method for Nonlinear Schrödinger Equation*, The Equadiff Conference, Leiden2019, July, 2019.

