T.C.
İSTANBUL KÜLTÜR ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

VEKTÖR UZAYLARINDA ARŞİMEDYAN KONİLER VE BAZI DİZİ UZAYLARININ ÇARPANLARA AYRILIŞI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Ebru ÖN
2000005831

Anabilim Dalı: **Matematik ve Bilgisayar Bilimleri**
Program: **Matematik ve Bilgisayar Bilimleri**

Tez Danışmanı: Dr. Öğr. Üyesi Uğur GÖNÜLLÜ

Ocak 2023

T.C.
İSTANBUL KÜLTÜR ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

VEKTÖR UZAYLARINDA ARŞİMEDYAN KONİLER VE BAZI DİZİ UZAYLARININ ÇARPANLARA AYRILIŞI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Ebru ÖN
2000005831

Anabilim Dalı:	Matematik ve Bilgisayar Bilimleri
Program:	Matematik ve Bilgisayar Bilimleri

Tez Danışmanı :	Dr. Öğr. Üyesi Uğur GÖNÜLLÜ
Diğer Jüri Üyeleri :	Prof. Dr. Tunç MISIRLIOĞLU
	Doç. Dr. Ezgi ERDOĞAN

Ocak 2023

Önsöz

Yüksek lisans çalışmamda tez konumu öneren, bilgi ve tecrübeleriyle yoluma ışık tutan, sorularımı büyük bir sabır ve özveriyle cevaplayan kıymetli hocam Dr. Öğr. Üyesi Uğur GÖNÜLLÜ'ye; tüm Matematik ve Bilgisayar Bilimleri bölümü hocalarıma, öğrenim hayatım boyunca üzerimde emeği olan tüm öğretmenlerime, desteklerini her zaman hissettiğim, hayallerime giden yolda sevgi ve saygıyla bana eşlik eden aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

Üniversitesi : İstanbul Kültür Üniversitesi

Enstitüsü : Lisansüstü Eğitim Enstitüsü

Anabilim Dalı : Matematik ve Bilgisayar Bilimleri

Programı : Matematik ve Bilgisayar Bilimleri

Tez Danışmanı : Dr. Öğr. Üyesi Uğur GÖNÜLLÜ

Tez Türü ve Tarihi : Yüksek Lisans - 2023

ÖZET

VEKTÖR UZAYLARINDA ARŞİMEDYAN KONİLER VE BAZI DİZİ UZAYLARININ ÇARPANLARA AYRILIŞI

Ebru ÖN

Bu tez iki ana kısımdan oluşmaktadır. İlk olarak sıra-birimli sıralı vektör uzaylarında Paulsen ve Tomforde ([24]) tarafından geliştirilen Arşimedyanlaştırma metodunun Emel'yanov tarafından keyfi sıralı vektör uzaylarına genişletilmesi çalışılmaktadır ([13]). İkinci olarak, Bennet tarafından klasik eşitsizliklere getirilen yeni bakış açısı incelenmektedir ([6]). Bu tür en ünlü sonuçlar (Hilbert, Hardy ve Copson'un sonuçları), belirli (Banach) dizi uzayları arasındaki içerme ilişkileri, $\ell^p \subseteq Y$, olarak yorumlanabilir ki içermenin normu belirli olan bir eşitsizliğin en iyi sabitidir.

Anahtar Kelimeler: Sıralı vektör uzayı, Arşimedyan , Banach dizi uzayları, $ces(p)$-uzayları

University : İstanbul Kültür University

Institute : Institute of Graduate Education

Science Programme : Mathematics and Computer Science

Programme : Mathematics and Computer Science

Supervisor : Assist.Prof.Dr. Uğur GÖNÜLLÜ

Degree Awarded and Date : M.S. - 2023

ABSTRACT

ARCHIMEDEAN CONES IN VECTOR SPACES AND FACTORIZATIONS OF SOME SEQUENCE SPACES

Ebru ÖN

This Thesis consists of two parts. First, it is studied that the Archimedeanization method which had developed by Paulsen and Tomforde ([24]) in an ordered vector space with an order unit was extended to arbitrary ordered vector space by Emel'yanov ([13]). Second, it is examined that Bennet gives a new way of looking at the classical inequalities ([6]). The most famous such results (those of Hilbert, Hardy and Copson) may be interpreted as inclusion relationships, $\ell^p \subseteq Y$, between certain (Banach) sequence spaces, the norm of the injection being the best constant of the particular inequality.

Keywords: Ordered vector space, Archimedean, Banach sequence spaces, $ces(p)$-spaces

Bölüm 1

Giriş

Eldeki bu Yüksek Lisans tez çalışmasında Emel'yanov'un [13] " Archimedean Cones in Vector Spaces" başlıklı makalesinin tamamı ve Bennet'in ([6]) "Factorizing the Classical Inequalities" adlı kitabının bir kısmı detaylı olarak incelenmiş ve çalışılmştır.

Tezin ilk kısmında Paulsen ve Tomforde ([24]) tarafından geliştirilen sıra-birimli sıralı vektör uzaylarının Arşimedyanlaştırılması metodunun Emel'yanov tarafından keyfi sıralı vektör uzaylarına genişletilmesi çalışılmaktadır ([13]). Ayrıca, bir sıralı vektör uzaylarının (V, V_+) Arşimedyan olması için gerek ve yeter koşulun $\{x_\tau\}_\tau \subseteq V$ herhangi bir alttan sınırlı azalan ağ ve bu ağın tüm alt sınırlarının topluluğu $L = \{y \in V : (\forall \tau \in \{\tau\})[y \leq x_\tau]\}$ olmak üzere

$$\inf\{x_\tau - y \mid \tau \in \{\tau\}, y \in L\} = 0$$

eşitliğinin sağlanması olduğu gösterilmiştir. Diğer bir sonuç şudur: V_+ nın hemen hemen Arşimedyan olmasının $T : U_+ \to V_+$ toplamsal fonksiyonunun bir lineer genişlemesinin varlığına denk olduğu verilmiştir. Arşimedyan uzaylarda böyle bir genişlemenin varlığı bilinmektedir (bkz. [3, Lemma 1.26] ve [27, Lemma83.1]).

Tezin ikinci kısmında belirli eşitsizliklerin nasıl çarpanlara ayırma teoremleri olarak görülebileceğini göstereceğiz ve bu yaklaşımın sonuçlarını araştıracağız. Hardy'nin ünlü eşitsizliğini ele alışımız elde ettiğimiz sonuçların bir çoğunun karakteristiği olduğundan bu giriş notları için teoremi bir metin olarak almak uygun olacaktır. Hardy eşitsizliği en kaba haliyle şunu ileri sürer:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty \tag{1.1}$$

olduğunda

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|x_k|\right)^p < \infty, \tag{1.2}$$

sağlanır, burada $p > 1$ ve $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$ bir gerçel (veya karmaşık) sayılar dizisidir.

Bu sonucu dizi uzayları arasında bir içerme teoremi olarak yorumlarız:

$$\ell^p \subseteq ces(p), \tag{1.3}$$

burada $ces(p)$, (1.2) deki eşitsizliği sağlayan tüm $\mathbf{x}$ dizilerinin kümesi olarak tanımlanır. Bu bakış açısından Hardy eşitsizliğini geliştirebileceğimiz iki aşikar yol vardır. İlk olarak (1.3) teki $ces(p)$ uzayını daha küçük bir uzayla değiştirmeyi araştırabiliriz, yani "ℓ^p hakkında daha fazla ne söylenebilir?" sorusunu sorabiliriz. İkinci olarak "$ces(p)$ hakkında daha fazla ne söylenebilir?" sorusunu sorarak ℓ^p uzayını daha büyük bir uzayla değiştirmeye çalışabiliriz (Tabii ki, yer değiştirmeler Hardy eşitsizliği mevcut kalacak şekilde yapılması beklenir. Önemsiz olan $\ell^p \subseteq \ell^p$ ve $ces(p) \subseteq ces(p)$ içermeleri ile meşgul olmak istemiyoruz!).

Muhtemelen bu iki sorunun en ilginci, ℓ^p uzaylarının analizinde üstünlük verilen, ilkidir. Yine de burada hemen hemen özel olarak ikincisiyle ilgileneceğiz.

Bu soruyu incelemek için ℓ^p uzayından $ces(p)$ uzayına tanımlı çarpanları (yani, her $\mathbf{y} \in \ell^p$ için $\mathbf{y}\cdot\mathbf{z} \in ces(p)$ özelliğini sağlayan $\mathbf{z}$ dizileri) düşünmek doğaldır. Bütün böyle çarpanların kümesi Z, aşağıdaki içermeyi gerçekler:

$$\ell^p \cdot Z \subseteq ces(p). \tag{1.4}$$

Şaşırtıcı olan Z nin çok basit terimlerle tanımlanabilmesi ve (1.4) teki içermenin bir özdeşlik olduğu ortaya çıkmaktadır.

Bu gözlemler aşağıdaki sonuca yol açar.

Teorem 1.1. $p > 1$ olsun. Bir $\mathbf{x}$ dizisinin $ces(p)$ ye ait olması için gerek ve yeter koşul

$$\mathbf{y} \in \ell^p \quad \text{ve} \quad |z_1|^{p^*} + |z_2|^{p^*} + \cdots + |z_n|^{p^*} = O(n) \tag{1.5}$$

olmak üzere

$$\mathbf{x} = \mathbf{y}\cdot\mathbf{z} \tag{1.6}$$

biçiminde bir çarpanlara ayrılışı kabul etmesidir.

(1.6) daki çarpım koordinatsal uygulanmaktadır: $x_k = y_k \cdot z_k$, $k = 1, 2, \ldots$; p^* sayısı, p sayısının eşleniğidir:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1. \tag{1.7}$$

Aşağıdaki dizi uzayını tanımlayalım:

$$g(p) := \{\mathbf{x} \colon |x_1|^p + |x_2|^p + \cdots + |x_n|^p = O(n)\}.$$

Bu durumda Teorem kısaca şu şekilde ifade edilebilir:

$$ces(p) = \ell^p \cdot g(p^*) \qquad (p > 1). \tag{1.8}$$

Her $p > 0$ için $g(p)$ tanımlıdır; $p \geq 1$ olduğunda belli olan norm altında bir Banach uzayıdır.

Teorem 1.1 aşağıdaki ilginç özelliklere sahiptir. İlk olarak özel bir durum olarak Hardy eşitsizliğini kapsar. Bunu görmek için $\mathbf{x} \in \ell^p$ olduğunu varsayalım. (1.5) de $\mathbf{y} = \mathbf{x}$ ve $\mathbf{z} = \mathbf{1} = (1, 1, \ldots)$ alınarak $\mathbf{x}$, (1.5) teki gibi çarpanlara ayrılabilir. Böylece, Teorem bize $\mathbf{x} \in ces(p)$ olduğunu söyler. İkincisi Hardy'nin teoreminin mümkün olan en iyi versiyonunu sağlar, çünkü onun sonucu olan (1.3) teki eşitsizlik (1.8) deki eşitlik ile değişir. Üçüncüsü Teorem 1.1, $ces(p)$ uzaylarının yapısına dair yeni anlayışlar sağlar ve bunlar literatürde oldukça dikkat çekicidir. Dördüncüsü teorem birçok yeni problem de ortaya koymaktadır ve bu problemlerin bazılarının çözümleri tezde incelenmiştir.

Şimdi (1.3) teki $ces(p)$ yi daha küçük bir uzayla değiştirmeye dair ilk soru için [6] referansının, Bölüm 14'ündeki çarpanlar incelendikten sonra

$$\ell^p = ces(p) \cdot Z \tag{1.9}$$

olacak şekilde Z dizi uzaylarının mevcut olmadığı görülür. Dolayısıyla, Teorem 1.1 deki gibi ikna edici bir sonuç bulunamaz. Ancak ilk soruya kısmi bir çözüm bulabilmek için oldukça doğal olan başka bir dizi uzayı sınıfı $d(p)$ tanıtılmıştır.

Hardy-Littlewood maksimal teorem, (1.3) teki $ces(p)$ yi aşağıdaki gibi değiştirebileceğimizi gösterir:

$$\ell^p \subseteq \left\{\mathbf{x} \colon \sum_{n=1}^{\infty} \sup_{m \geq n} \left(\frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} |x_k|\right)^p < \infty\right\}. \tag{1.10}$$

Şimdi Hardy eşitsizliği bir fonksiyon teoremi olarak yorumlanabilir:

$$\mathcal{C} : \ell^p \to \ell^p \qquad (p > 1), \tag{1.11}$$

burada $\mathcal{C}$, Cesàro matrisidir ($k \leq n$ ise $c_{n,k} = 1/n$, ve $k > n$ ise $c_{n,k} = 0$) ve sonucun (1.10) daki "geliştirilmiş" versiyonunun bu terimlerle nasıl göründüğünü sormak doğaldır. Açık olarak cevap

$$d\,(p) = \left\{ x\colon \sum_{n=1}^{\infty} \sup_{k \geq n} |x_k|^p < \infty \right\} \tag{1.12}$$

olmak üzere

$$\mathcal{C} : \ell^p \to d\,(p) \qquad (p > 1) \tag{1.13}$$

olur. Yine, her $p > 0$ için $d\,(p)$ tanımlıdır; $p \geq 1$ olduğunda bir Banach uzayıdır. Böylece, $g\,(p)$ ve $d\,(p)$ uzayları tanıtılmıştır, ve bunların Hardy eşitsizliğiyle nasıl bağlantılı olduğunu açıklanmıştır. Birkaç ek bağlantı daha verilecek ve $g\,(p)$, $d\,(p)$ ve $ces(p)$ arasındaki önemli ilişkiler incelenecektir.

Bölüm 2

Ön Bilgiler

V bir vektör uzayı ve $C \subseteq V$ olsun. Eğer her $x, y \in C$ ve $0 \leq \lambda \leq 1$ için $\lambda x + (1-\lambda)\, y \in C$ ise C kümesine konveks küme veya kısaca konveks denir. Aşağıdaki özellikleri sağlayan $W \subseteq V$ boş olmayan alt kümesine kama (wedge) denir:

1. $W + W \subseteq W$,
2. Her $\alpha \geq 0$ için $\alpha W \subseteq W$.

Önerme 2.1. Her kama bir konvekstir.

Kanıt. $x, y \in W$ ve $0 \leq \lambda \leq 1$ olsun. Kamanın 2. özelliğinden ve $(1-\lambda) \geq 0$ olduğundan $\lambda x, (1-\lambda)\, y \in W$ olur. Ayrıca, kamanın 1. özelliğinden $\lambda x + (1-\lambda)\, y \in W$, yani, her kama konvekstir. □

Önerme 2.2. W bir kama olmak üzere $W \cap (-W)$ bir alt uzaydır.

Kanıt. W boştan farklı olduğundan bir $x \in W$ vardır. Kama olma şartının 2. özelliğinden $\alpha = 0$ alınırsa $0x = 0 \in W$ bulunur.

Şimdi $u_1, u_2 \in W \cap (-W)$ alınsın. Kama olma şartının 1. özelliğinden $u_1 + u_2 \in W$ ve $-(u_1 + u_2) \in W$, yani $u_1 + u_2 \in -W$ olur. Buradan $u_1 + u_2 \in W \cap (-W)$ sağlanır.

Diğer taraftan, $r \in \mathbb{R}$ ve $u \in W \cap (-W)$ olsun. Bu durumda $u, -u \in W$, ve Kama olma şartının 2. özelliğinden $ru, -ru \in W$ elde edilir. Dolayısıyla, $ru \in W \cap (-W)$ olur. Sonuç olarak $W \cap (-W)$ bir alt uzaydır. □

W, V vektör uzayında bir kama olmak üzere W kaması tarafından üretilen alt uzay $\text{span}(W) = W - W$ dir. $V = W - W$ eşitliğini sağlayan W kamasına üretici denir.

V vektör uzayının aşağıdaki koşulları sağlayan boştan farklı W alt kümesine koni (cone) denir:

1. $W + W \subseteq W$,
2. Her $\alpha \geq 0$ için $\alpha W \subseteq W$,
3. $W \cap (-W) = \{0\}$.

W konisine, pozitif koni veya konveks koni de denir. W bir koni ve $x \in V$ olmak üzere olmak üzere $x+W$ gösterimine köşeli koni denir. Her koni bir kamadır fakat her kama bir koni değildir, çünkü koni olma şartının 3. özelliğini sağlamayabilir. Herhangi bir kama konveks olduğundan her koni de konvekstir. Aynı zamanda her alt uzay bir kamadır, fakat sadece aşikâr alt uzaylar bir konidir. Aralarındaki matematiksel ilişki aşağıdaki şekilde gösterilir.

$$\text{Koni} \Rightarrow \ \text{Kama} \Rightarrow \text{Konveks}$$

X boştan farklı bir küme olmak üzere X üzerinde $\geq$ kısmi sıralaması aşağıdaki gibi tanımlanır:

(i) Her $x \in X$ için $x \geq x$ (Yansıma)

(ii) $x \geq y$ ve $y \leq x$ ise $x = y$ (Ters simetri)

(iii) $x \geq y$ ve $y \geq z$ ise $x \geq z$ (Geçişme)

Bu durumda X kümesine kısmi sıralı küme denir. Öte yandan, sadece (i) ve (iii) özellikleri sağlanıyorsa $\geq$ bağıntısına ön sıralama bağıntısı denir ve X kümesine ön kısmi sıralı küme denir. A ve B bir ön-sıralı kümenin alt kümeleri olmak üzere her $b \in B$ için $b \leq a$ olacak şekilde bir $a \in A$ var ise A kümesi B kümesini majorize eder denir.

V vektör uzayı $\geq$ kısmi sıralama (ön sıralama) bağıntısına göre;

1. $x \geq y$ ise her $z \in V$ için $x + z \ \geq \ y + z$,

2. $x \geq y$ ise her $\alpha \geq 0$ için $\alpha x \geq \alpha y$.

özelliklerini sağlıyorsa V vektör uzayına sıralı vektör uzayı veya kısmi sıralı vektör uzayı (ön-sıralı vektör uzayı) denir ve $(V, \geq)$ ile gösterilir. $(V, \geq)$ sıralı vektör uzayında veya ön-sıralı vektör uzayında $x \geq 0$ şartını sağlayan pozitif vektörlerin oluşturduğu kümeye pozitif koni denir ve

$$V_+ = \{x \in V : x \geq 0\}$$

ile gösterilir. Ayrıca, bir sıralı vektör uzayında V_+ pozitif konisinin gerçekten bir koni olduğu kolayca görülebilir.

V vektör uzayı içerisinden aldığımız bir K konisine (kamasına) göre bir kısmi sıralama (ön sıralama) tanımlayabiliriz:

$$x \geq_K y \Leftrightarrow x - y \in K$$

Böylece, $(V, \geq_K)$ bir sıralı vektör uzayı (ön-sıralı vektör uzayı) olur. $(V, \geq_K)$ ikilisi yerine (V, K) ikilisi veya kısaca V kullanılacaktır. Genel olarak "$x \geq y \Leftrightarrow x - y \in K$" gösterimi kullanılır. Ayrıca, $V_+ = K$ eşitliği kolayca görülür. Her $x \in V$ için $x \leq ne$ eşitsizliğini sağlayan bir $n \in \mathbb{N}$ var ise e vektörüne V nin bir sıra-birimi denir.

Her $x, y \in V$ için

$$[x, y] := \{z \in V : x \leq z \leq y\}$$

kümesine sıra-aralık denir (eğer $x \nleq y$ ise sıra-aralık boş kümedir). $A \subseteq V$ olmak üzere her $x, y \in A$ için $[x, y] \subseteq A$ ise A kümesine tam küme ya da sıra-konveks denir. Ön-sıralı vektör uzayının herhangi bir sıra-konveks alt uzayına sıra-ideal denir. Eğer Y, $(V, \leq)$ ön-sıralı vektör uzayında bir sıra-ideal ise V/Y bölüm uzayında

$$[f] \leq_Q [g] \Leftrightarrow \exists q \in Y \ni f \leq g + q$$

şeklinde bir ön-sıralama tanımlanabilir. Ayrıca, Y sıra-idealinin sıra-konveksliğinden $[f] \leq_Q [g] \leq_Q [f]$ olması $[f] = [g]$ olmasını gerektirdiğinden $\leq_Q$ bir kısmi sıralama ve dolayısıyla V/Y bir sıralı vektör uzayıdır. V/Y bölüm uzayının pozitif konisi gerçekten bir koni olur, ve $[V_+]_Y := V_+ + Y$ kümesine eşittir.

$x_n \in V$ ve $u \in V_+$ olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$k_n(x_n - x) \in [-u, u]$$

olacak şekilde doğal sayılardan oluşan bir $k_n \uparrow \infty$ dizisi varsa $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi $x \in V$ elemanına u-düzgün yakınsar denir, ve $x_n \xrightarrow{(u)} x$ şeklinde gösterilir. Açık olarak, $x_n \xrightarrow{(u)} x$ olması için gerek ve yeter koşul aşağıdaki koşulu sağlayan bir reel sayı $\varepsilon_n \downarrow 0$ dizisinin var olmasıdır:

$$x_n - x \in [-\varepsilon_n u, \varepsilon_n u].$$

$A \subseteq V$ olmak üzere her $u \in V_+$ için u-düzgün yakınsak olan $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ dizisinin bütün limit noktaları A kümesinin elemanı ise A kümesine düzgün kapalı denir.

(V, V_+) bir sıralı vektör uzayı olmak üzere $x, u, v \in V_+$ ve $x \leq u + v$ olduğunda $0 \leq x_1 \leq u$, $0 \leq x_2 \leq v$ ve $x = x_1 + x_2$ olacak şekilde $x_1, x_2 \in V$ varsa (V, V_+) uzayının Riesz parçalanış özelliğine sahip olduğunu söyleriz.

A, V sıralı vektör uzayının bir alt kümesi olsun. Her $a \in A$ için $a \leq x$ olacak şekilde bir x vektörü var ise A kümesine üstten sınırlı ve x vektörüne A kümesinin bir üst sınırı denir. Benzer şekilde her $a \in A$ için $y \leq a$ olacak şekilde bir y vektörü var ise A kümesine alttan sınırlı ve y vektörüne A kümesinin bir alt sınırı denir. A kümesi hem üstten hem de alttan sınırlıysa sıra-sınırlı küme denir. Aşağıdaki koşulları sağlayan bir $u \in V$ vektörüne A kümesinin en küçük üst sınırı veya supremumu denir ve $u = \sup A$ olarak gösterilir:

(i) Her $a \in A$ için $a \leq u$,

(ii) v, A kümesinin herhangi bir üst sınırı ise $v \leq u$.

Benzer şekilde bir kümenin en büyük alt sınırı veya infimumu tanımlanabilir. $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ sonlu kümesinin supremumu veya infimumu var ise aşağıdaki şekilde yazılabilirler:

$$\sup A = \bigvee_{i=1}^{n} x_i, \qquad \inf A = \bigwedge_{i=1}^{n} x_i$$

İki elemanlı bir kümenin supremumu ve infimumu sırasıyla

$$\sup\{x,\, y\} = x \vee y \quad \text{ve} \quad \inf\{x,\, y\} = x \wedge y$$

şeklinde gösterilir. Bir sıralı vektör uzayında her x ve y vektörleri için $x \vee y$ ve $x \wedge y$ var ise bu sıralı vektör uzayına Reisz uzayı veya vektör örgüsü denir.

Tanım 2.3. W, V vektör uzayında bir kama olsun. Eğer $x, y \in V$ olmak üzere her $n \in \mathbb{N}$ için $x - ny \in W$ olduğunda $y \in -W$ oluyorsa (V, W) ön-sıralı vektör uzayına Arşimedyan denir ve Arşimedyan özelliğine sahip olduğunu söyleriz. Ayrıca, W kamasına da Arşimedyan denir.

Tanımda $x \in V$ yerine $x \in W$ alınabilir. Açık olarak Arşimedyan ön-sıralı vektör uzayının herhangi bir alt uzayı da Arşimedyandır.

Örnek 2.4. $\mathbb{R}^2$ uzayında aşağıdaki gibi tanımlanan sözlük sıralamasını göz önüne alalım:

$$(x_1, x_2) \leq_{lex} (y_1, y_2) \Leftrightarrow x_1 < y_1 \text{ ya da } x_1 = y_1 \text{ ve } x_2 \leq y_2.$$

Böylece $L := (\mathbb{R}^2, \leq_{lex})$ bir sıralı vektör uzay ve

$$L_+ = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \text{ ya da } x = 0 \text{ ve } y \geq 0\big\}$$

olur. Ayrıca, her $n \in \mathbb{N}$ için $n\,(0,1) \leq_{lex} (1,0)$ ve $(0,1) \notin -L_+$ olduğundan sıralı vektör uzay $(\mathbb{R}^2, \leq_{lex})$ Arşimedyan değildir. Kolayca görülebileceği üzere $(\mathbb{R}^2, \leq_{lex})$ tam sıralı, yani herhangi iki eleman karşılaştırılabilir. Dolayısıyla, $(\mathbb{R}^2, \leq_{lex})$ bir vektör örgüsüdür. Öte yandan, $(1, 0)$ vektörü sıra-birimdir.

Not edelim ki eğer V, W kamasının kapalı olduğu bir τ lineer topolojiye sahip ise W Arşimedyandır (bakınız, [3, Lemma 2.3]). τ topolojisinin Hausdorff ve W nun τ ya göre içi boştan farklı olması durumunda W Arşimedyandır gerek ve yeter koşul τ ya göre kapalı olmasıdır (bakınız, [3, Lemma 2.4]). (V, V_+) sıralı vektör uzayının Arşimedyan olması her $x \in V_+$ için $\inf_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n} x = 0$ olmasına denk olduğu çok iyi bilinir. Ayrıca, Arşimedyan özelliği şu şekilde de ifade edilebilir: $x \in V_+$ ve $y \in V$ olmak üzere her $n \in \mathbb{N}$ için $0 \leq x + ny$ ise $0 \leq y$ olur. Bu gözlem aşağıdaki tanıma yol açar, ki [24, Definition 2.7] deki Arşimedyan sıra-birimin tanımından hareket edilmiştir.

Tanım 2.5. (V, V_+) bir ön-sıralı vektör uzayı ve $x \in V_+$ olsun. Herhangi bir $y \in V$ vektörü her $n \in \mathbb{N}$ için $x + ny \in V_+$ içermesini sağladığı zaman $y \in V_+$ oluyorsa x vektörüne Arşimedyan eleman denir.

$0 \in V$ vektörünün Arşimedyan olduğunu not edelim. Açık olarak, V_+ nın Arşimedyan olması için gerek ve yeter koşul her $x \in V_+$ vektörünün Arşimedyan olmasıdır. Ayrıca, x vektörü Arşimedyan ve $0 \leq z \leq x$ ise z vektörü de Arşimedyandır. Özel olarak V ön-sıralı vektör uzayı Arşimedyan sıra-birime sahipse V_+ nın bütün elemanları Arşimedyandır. $\mathrm{Arch}(V)$ bütün Arşimedyan elemanların kümesini göstersin ve tanımdam $\mathrm{Arch}(V) \subseteq V_+$ elde edilir.

İddia 2.6. $\mathrm{Arch}(V)$ bir kamadır. Özel olarak V_+ bir koni ise $\mathrm{Arch}(V)$ de bir konidir.

Kanıt. Her $0 < \alpha \in \mathbb{R}$ ve $x \in \mathrm{Arch}(V)$ için $\alpha x \in \mathrm{Arch}(V)$ olduğu açıktır. İspatı tamamlamak için $\mathrm{Arch}(V) + \mathrm{Arch}(V) \subseteq \mathrm{Arch}(V)$ olduğunu göstermek yeterlidir. $x_1, x_2 \in \mathrm{Arch}(V)$ olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_1 + x_2 + nv \in V_+$ içermesi en az bir $v \in V$ doğru olsun. Herhangi bir $m \in \mathbb{N}$ alınsın. Bu durumda her $n \in \mathbb{N}$ için $x_1 + nx_2 + nmv \in V_+$ sağlanır (çünkü $x_2, x_1 + x_2 + nmv \in V_+$) ve böylece $x_1 + n(x_2 + mv) \in V_+$ olur. x_1 Arşimedyan eleman olduğundan $x_2 + mv \in V_+$ bulunur. m doğal sayısı keyfi olduğundan her $m \in \mathbb{N}$ için $x_2 + mv \in V_+$ içermesi doğrudur. x_2 nin Arşimedyan eleman olduğu kullanılır ise $v \in V_+$ elde edilir. Dolayısıyla, $x_1 + x_2 \in \mathrm{Arch}(V)$ gösterilir. $\square$

Tanım 2.7. W, V vektör uzayında bir kama olsun. Eğer $x, y \in V$ olmak üzere her $k \in \mathbb{Z}$ için $y - kx \in W$ olduğunda $x = 0$ oluyorsa (V, W) ön-sıralı vektör uzayına hemen hemen Arşimedyan ve W kamasına da hemen hemen Arşimedyan denir.

Standart bir örnek olarak $(\mathbb{R}^2, \leq_{lex})$ sıralı vektör uzayı hemen hemen Arşimedyan değildir (Çünkü, her $k \in \mathbb{Z}$ için $(1,0) - k(0,1) = (1, -k) \geq_{lex} 0$). Açık olarak her $k \in \mathbb{Z}$ için $y - kx \in W$ koşulu sağlayan $y \in V$ vektörü $y \in W$ olmalıdır ($k = 0$ alalım). Dolayısıyla, tanımdaki $y \in V$ içermesini $y \in W$ olarak ve $k \in \mathbb{Z}$ koşulunu $k \in \mathbb{R}$ ile değiştirebiliriz yani hemen hemen Arşimedyan olma tanımı şuna denktir:

$$(\forall y \in W, x \in V)\, [[(\forall \alpha \in \mathbb{R})\, y - \alpha x \in W] \Rightarrow [x = 0]]\,.$$

Şimdi, bir (V, V_+) ön-sıralı vektör uzayı verilsin V nin bütün sonsuz küçük elemalarının kümesi aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$\begin{aligned} N_V : &= \{x \in V \mid (\exists y \in V)(n \in \mathbb{N})\, [-y \leq nx \leq y]\} \\ &= \{x \in V \mid (\exists y \in V_+)(k \in \mathbb{Z})\, [y - kx \in V_+]\} \\ &= \bigcup_{y \in V_+} \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [-\frac{1}{n}y, \frac{1}{n}y]. \end{aligned}$$

Açık olarak, V_+ kamasının hemen hemen Arşimedyan olması için gerek ve yeter koşul $N_V = \{0\}$ olmasıdır. $V_+ \cap -V_+ \subseteq N_V$ olduğundan her hemen hemen Arşimedyan ön-sıralı vektör uzay, sıralı vektör uzay olmalıdır. Dolayısıyla, koni olmayan Arşimedyan kama hemen hemen Arşimedyan olmaz. Buna karşılık her Arşimedyan sıralı vektör uzayı hemen hemen Arşimedyandır fakat bunun tersi $\dim(V) = 2$ olsa bile doğru değildir ve buna bir örnek aşağıda verilmektedir (ayrıca bakınız, Örnek 3.6). Ayrıca, bir Arşimedyan ön-sıralı vektör uzayının hemen hemen Arşimedyan olması gerekmez. Örneğin, $V \neq \{0\}$ olmak üzere $W = V$ alınırsa (V, W) bir Arşimedyan ön-sıralı vektör uzayı ama hemen hemen Arşimedyan değildir.

Örnek 2.8. Γ en az iki elemanlı bir küme olmak üzere V, Γ üzerindeki bütün sınırlı gerçel değerli fonksiyonların kümesini göstersin. V üzerinde

$$f \leq g \Leftrightarrow f = g \text{ ya da } \inf_{t\in\Gamma}\{g(t) - f(t)\} > 0$$

kısmi sıralaması tanımlandığında $(V, \leq)$ hemen hemen Arşimedyan sıralı vektör uzayı olur fakat Arşimedyan değildir. Ayrıca,

$$V_+ = \{0\} \cup \{f \in V \mid (\exists\alpha > 0)(\forall t \in \Gamma)[f(t) \geq \alpha]\}$$

olduğunu kolayca görülür. Bu herhangi bir $0 \neq f \in V_+$ için $\inf_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n} f$ in var olmamasından görülebilir. Bunu görmek için bir $x_0 \in \Gamma$ seçelim ve Γ en az iki elemanlı olduğundan $h := \chi_{\{x_0\}} \notin V_+$ ve $\frac{1}{n}f + h \in V_+$ olur. Dolayısıyla, $-h$ bir alt sınırdır ve $-h \nleq 0$, yani 0, $\{\frac{1}{n}f : n \in \mathbb{N}\}$ kümesinin infimumu olamaz. Öte yandan, $g = \inf_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n}f$ olsa $g \geq 0$ olmalı, ve $f \neq 0$ olduğundan her $t \in \Gamma$ için $\frac{1}{n}f(t) > g(t)$, yani $g(t) \leq 0$ bulunur. Buradan, $g = 0$ olmalıdır, ki bu 0 ın infimum olamamasıyla çelişir.

V vektör uzayında bir doğru $x, y \in V$ ve $y \neq 0$ olmak üzere her $t \in \mathbb{R}$ için $x + ty$ vektörlerinin kümesidir.

İddia 2.9. W, V vektör uzayında kama olsun. W kamasının hemen hemen Arşimedyan olması için gerek ve yeter koşul bir doğru içermemesidir. Ayrıca, (V, V_+) ön-sıralı vektör uzayın hemen hemen Arşimedyan olması her $x \in V_+$ için $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}[-\frac{1}{n}x, \frac{1}{n}x] = \{0\}$ eşitliğinin sağlanmasına denktir.

Bir koninin Arşimedyan olma özelliği alt koniye geçmez. Örneğin, $\mathbb{R}^2$, $K := \{(x, y) \mid x, y \geq 0\}$ konisi Arşimedyan iken $K' := K \setminus \{(x, 0) \mid x > 0\}$ alt konisi

Arşimendan değildir çünkü her $n \in \mathbb{N}$ için $(0,1)+n(1,0) \in K'$ fakat $(1,0) \notin K'$. Aşağıda ifade edileceği gibi hemen hemen Arşimedyanlık özelliği alt koniye geçer.

İddia 2.10. Hemen hemen Arşimedyan koninin herhangi bir alt konisi hemen hemen Arşimedyandır.

Tanım 2.3 ve 2.7 den bir vektör uzayında Arşimedyan (hemen hemen Arşimedyan) kamaların boştan farklı bir ailesinin kesişimi de Arşimedyandır (hemen hemen Arşimedyandır).

A, (V, V_+) ön-sıralı vektör uzayında bir sıra-ideal öyle ki $(V/A, V_+ + A)$ hemen hemen Arşimedyan ise A düzgün-kapalı olur (Önerme 3.5 (a)). $A = \{0\}$ olduğu zaman bu ifadenin tersi de doğrudur (Önerme 3.5 (b)). Dolayısıyla, V hemen hemen Arşimedyan gerek ve yeter koşul $\{0\}$ düzgün-kapalıdır. Genelde, A düzgün-kapalı bir sıra-ideal olmak üzere V/A sıralı vektör uzayının Arşimedyan olup olmama sorusunun cevabı çok açık değildir. (Vektör örgüsü durumunda Veksler [26] tarafından buna olumlu cevap verilmiştir. Ayrıca, bakınız [2, Theorem 2.23]). Bu arada herhangi bir hemen hemen Arşimedyan vektör örgüsü Arşimedyandır. Gerçekten, $y \geq 0$, x keyfi bir eleman ve her $n \in \mathbb{N}$ için $nx \leq y$ ise $nx^+ \leq y$, yani $0 \leq y - nx^+$ bulunur. Ayrıca, her $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $0 \leq y + nx^+$ her zaman doğru olduğundan her $k \in \mathbb{Z}$ için $0 \leq y + kx^+$ olur. Hemen hemen Arşimedyanlık varsayımından $x^+ = 0$, yani $x \leq 0$ elde edilir. Buna göre $(\mathbb{R}^2, \leq_{lex})$ Arşimedyan olmayan bir vektör örgüsü olduğundan hemen hemen Arşimedyan da değildir. Örnek 2.8 de $\{0\}$ ın düzgün-kapalı olmasına rağmen $V = V/\{0\}$ ın Arşimedyan olmadığı bir örnek verilmişti. Tanım 2.5 e benzer şekilde hemen hemen Arşimedyan eleman tanımı verilebilir.

Tanım 2.11. (V, V_+) bir ön-sıralı vektör uzayı ve $x \in V_+$ olsun. Herhangi bir $y \in V$ vektörü her $k \in \mathbb{Z}$ için $x + ky \in V_+$ olduğunda $y = 0$ bulunuyorsa x vektörüne hemen hemen Arşimedyan eleman denir.

a-Arch(V) bütün hemen hemen Arşimedyan elemanların kümesini göstersin ve tanımdam a-Arch$(V) \subseteq V_+$ ve aşağıdakiler elde edilir:

$$V_+ \text{ bir koni} \quad \Leftrightarrow \quad 0 \in \text{a-Arch}(V) \quad \Leftrightarrow \quad \text{a-Arch}(V) \neq \emptyset,$$

$$V_+ \text{ hemen hemen Arşimedyan} \quad \Leftrightarrow \quad V_+ = \text{a-Arch}(V)$$

ve

$$\alpha \cdot \text{a-Arch}(V) = \text{a-Arch}(V) \quad (\forall\, 0 < \alpha \in \mathbb{R}).$$

L bir vektör örgüsü ve $x \in L$ olmak üzere aşağıdaki özel vektörleri tanımlayabiliriz:

1. x in pozitif kısmı, $x^+ = x \vee 0$
2. x in negatif kısmı, $x^- = (-x) \vee 0$
3. x in modülü, $|x| = x \vee -x$.

$x, y, z \in L$ ve $a \in \mathbb{R}$ için aşağıdaki özellikler sağlanır:

1. $a \geq 0$ ise $a(x \vee y) = (ax) \vee (ay)$ ve $a(x \wedge y) = (ax) \wedge (ay)$,
2. $a \leq 0$ ise $a(x \vee y) = (ax) \wedge (ay)$ ve $a(x \wedge y) = (ax) \vee (ay)$,
3. $x + y \vee z = (x + y) \vee (x + z)$ ve $x + y \wedge z = (x + y) \wedge (x + z)$,
4. $x \vee y = (x - y)^+ + y = (y - x)^+ + x$,
5. $|ax| = |a|\,|x|$,
6. $x \vee y = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|)$ ve $x \wedge y = \frac{1}{2}(x + y - |x - y|)$,
7. $x + y = x \vee y + x \wedge y$,
8. $x = x^+ - x^-$ ve $x^+ \wedge x^- = 0$,
9. $|x| = x^+ + x^-$,
10. $|x - y| = x \vee y - x \wedge y$,
11. $|x + y| \vee |x - y| = |x| + |y|$,
12. $|x| \vee |y| = \frac{1}{2}(|x + y| + |x - y|)$ ve $|x| \wedge |y| = \frac{1}{2}\,||x + y| - |x - y||$.

Üstten sınırlı her kümenin supremumunun var olduğu bir vektör örgüsüne Dedekind tam denir.

A, L vektör örgüsünün boştan farklı bir alt kümesi olsun. $x \in A$, $y \in L$ ve $|y| \leq |x|$ olduğunda $y \in A$ oluyorsa A kümesine katı (solid) denir. Katı olan bir vektör alt uzaya vektör örgü-ideal denir. Burada, her vektör örgü-idealin bir sıra-ideal olduğunu fakat tersinin doğru olmadığını belirtelim. Bir sıra-idealin vektör örgü-ideali olması için gerek ve yeter koşul alt vektör örgüsü olmasıdır. Örneğin, koordinat sıralaması ile $\mathbb{R}^2$ uzayında $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = -x\}$ bir sıra-ideal fakat vektör alt örgü değildir.

V ve L iki sıralı vektör uzayı ve $T : L \to V$ bir lineer operatör olsun. Her $x \in L^+$ için $T(x) \geq 0$ ise T fonksiyonuna pozitif denir.

Aşağıdaki tanım daha sonra kullanılacaktır.

Tanım 2.12. (V, V_+) bir sıralı vektör uzayı olsun. $U = (U, U_+)$ bir Arşimedyan sıralı vektör uzayı ve $\phi : V \to U$ bir pozitif lineer fonksiyon (yani, $\phi(V_+) \subseteq U_+$) ve $\langle U_1, \phi_1 \rangle \to \langle U_2, \phi_2 \rangle$ morfizmleri $q_{12} : U_1 \to U_2$ pozitif lineer fonksiyonlar öyle ki $q_{12} \circ \phi_1 = \phi_2$ eşitliği sağlanmak olmak üzere objeleri $\langle U, \phi \rangle$ çiftlerinden oluşan $\mathcal{C}_{Arch}(V)$ kategorisini göz önüne alalım. Eğer $\mathcal{C}_{Arch}(V)$ kategorisi bir $\langle U_0, \phi_0 \rangle$ ilk objesine sahipse U_0 sıralı vektör uzayına, V sıralı vektör uzayının bir Arşimedyanlaştırması denir.

Bölüm 3

Sıralı Vektör Uzaylarının Arşimedyanlaştırılması

(V, V_+) bir POVS olmak üzere

$$D_V := \{x \in V \,|\, (\exists \xi \in V_+)\,(\forall n \in \mathbb{N})\, nx + \xi \in V_+\}$$

olarak tanımlansın. Kolayca, şu gözlemleri yapabiliriz:

(i) D_V bir kamadır,

(ii) $D_V \cap (-D_V) = N_V$ (dolayısıyla, D_V bir konidir gerek ve yeter koşul V_+ hemen hemen Arşimedyandır),

(iii) N_V, (V, V_+) da bir sıra-idealdir,

(iv) $D_V + N_V = D_V$ (çünkü, $D_V \subseteq D_V + N_V \subseteq D_V + D_V \subseteq D_V$),

(v) $V_+ \subseteq D_V$,

(vi) V_+ Arşimedyan ise $V_+ = D_V$,

(vii) W_1 ve W_2 iki kama öyle ki $W_1 \subseteq W_2$ ise $D_{W_1} \subseteq D_{W_2}$.

I_V ile (V, V_+) daki bütün düzgün-kapalı sıra ideallerin kesişimini gösterelim. V/N_V bölüm uzayında $V_+ + N_V = [V_+]_{N_V}$ ve $D_V + N_V = [D_V]_{N_V}$ kümelerini göz önüne alalım. V_+, D_V ve N_V birer kama olduğundan $V_+ + N_V$ ve $D_V + N_V$ kümeleri de V/N_V bölüm uzayında kamadır. Üstelik, $V_+ + N_V$ konidir. Öte yandan, Örnek 2.8

göz önüne alındığında $D_V = \{f \in V : f(t) \geq 0\,(\forall t \in \Gamma)\}$ bir konidir. Ancak, $(V, V_+) = (\mathbb{R}^2, \leq_{lex})$ düşünüldüğünde $D_V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0\}$ koni değildir (hatta D_V, Arşimedyan ama hemen hemen Arşimedyan değildir). Diğer taraftan,

$$(D_V + N_V) \cap -(D_V + N_V) = D_V \cap (-D_V) = N_V.$$

eşitliğinden $D_V + N_V$, V/N_V bölüm uzayında bir konidir. Ayrıca, $V_+ + N_V \subset D_V + N_V$ olduğundan $V_+ + N_V$ nin bir koni olduğu başka bir yoldan görülür.

Lemma 3.1. (V, V_+) bir ön-sıralı vektör uzayı olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir:

(i) (V, D_V) Arşimedyan,

(ii) $(\forall x \in D_V, y \in V)\,[[(\forall n \in \mathbb{N}) x + ny \in D_V] \Rightarrow [y \in D_V]]$,

(iii) $(\forall x \in V_+, y \in V)\,[[(\forall n \in \mathbb{N}) x + ny \in D_V] \Rightarrow [y \in D_V]]$.

Kanıt. (i) ve (ii) nin denkliği Arşimedyanlığın tanımından gelir. (ii) $\Rightarrow$ (iii) gerektirmesi $V_+ \subseteq D_V$ içermesinden kolayca görülür.

(iii) $\Rightarrow$ (ii) $x \in D_V$ ve $y \in V$ olmak üzere her $n \in \mathbb{N}$ için $x + ny \in D_V$ olsun. D_V nin tanımından en az bir $u \in V_+$ vardır öyle ki her $k \in \mathbb{N}$ için $kx + u \in V_+$ olur. $v = u + x \in V_+$ tanımlansın. Böylece, her $n \in \mathbb{N}$ için $v + ny = u + x + ny \in u + D_V \subseteq D_V$ bulunur. Şimdi, (iii) kullanılarak $y \in D_V$ elde edilir. $\square$

Aşağıdaki lemmanın ispatı yukarıdakine benzerdir.

Lemma 3.2. (V, V_+) bir ön-sıralı vektör uzayı olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir:

(i) (V, D_V) hemen hemen Arşimedyan,

(ii) $(\forall x \in D_V, y \in V)\,[[(\forall n \in \mathbb{Z}) x + ny \in D_V] \Rightarrow [y = 0]]$,

(iii) $(\forall x \in V_+, y \in V)\,[[(\forall n \in \mathbb{Z}) x + ny \in D_V] \Rightarrow [y = 0]]$.

İddia 2.10 nun bir sonucu olarak (V, D_V) hemen hemen Arşimedyan ise (V, V_+) da öyledir.

Önerme 3.3. (V, V_+) bir vektör örgüsü ise $D_V = D_V + N_V = V_+ + N_V$ olur.

Kanıt. $D_V = D_V + N_V$ eşitliği ve $V_+ + N_V \subseteq D_V + N_V$ içermesi zaten gözlemlenmişti. Herhangi bir $x \in D_V$ alalım. Bu durumda her $n \in \mathbb{N}$ için $nx + u \geq 0$ olacak şekilde bir $u \geq 0$ vardır. $u \geq -nx$ eşitsizliğinden $u = u^+ \geq (-nx)^+ = n(-x)^+ = nx^-$ yani $n(-x^-) + u \geq 0$ bulunur. Buna göre $-x^- \in D_V$ olduğu gözlemlenir. Ayrıca, $V_+ \subseteq D_V$ olduğundan $x^- \in D_V$ olur, ve böylece $x^- \in D_V \cap -D_V = N_V$ elde edilir. Dolayısıyla $x = x^+ - x^- \in V_+ + N_V$ içermesi sağlandığından ispat biter. □

Yukarıdaki ispatın bir sonucu olarak (V, V_+) bir vektör örgüsü olduğunda N_V bir alt vektör örgüsü ve dolayısıyla bir vektör örgü-ideali olduğunu not edelim (çünkü $x \in N_V$ ise $x, -x \in D_V$ olur ve yukarıdaki ispattan $x^-, x^+ = (-x)^- \in N_V$ bulunur).

Aşağıda bazı temel sonuçlar verilmiştir.

Önerme 3.4. (V, V_+) bir POVS olsun. Aşağıdakiler sağlanır:

(a) N_V, (V, D_V) de bir sıra-idealdir;

(b) $N_V \subseteq I_V$;

(c) Eğer V bir sıra-birime sahipse her $A \subseteq V$ ideali için $N_{V/A} = I_{V/A}$ dır;

(d) Eğer (V, V_+) bir vektör örgüsü ise $(V/N_V, D_V + N_V)$ bir vektör örgüsüdür. Özel olarak $(V/N_V, V_+ + N_V) = (V/N_V, D_V + N_V)$ olur.

Kanıt. (a) $u, v \in N_V$ ve $w \in V$ öyle ki (V, D_V) uzayında $u \leq w \leq v$ sağlansın. Bu durumda

$$-x \leq nu \leq x, \quad -y \leq nu \leq y \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \tag{3.1}$$

olacak şekilde $x, y \in V_+$ vardır, ve

$$0 \leq n\,(w - u) + \xi_1, \quad 0 \leq n\,(v - w) + \xi_2 \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \tag{3.2}$$

olacak şekilde $\xi_1,\ \xi_2 \in V_+$ vardır. 3.1 ve 3.2 den

$$0 \leq nw + x + \xi_1, \quad 0 \leq -nw + y + \xi_2 \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

bulunur. Bu durumda

$$-(x + \xi_1) \leq nw \leq y + \xi_2 \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

sağlanır ve dolayısıyla

$$-(x+y+\xi_1+\xi_2) \leq nw \leq (x+y+\xi_1+\xi_2) \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

elde edilir ki bu $w \in N_V$ demektir.

(b) $f \in N_V$ alalım. Bu durumda en az bir $g \in V$ için

$$-g \leq nf \leq g \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

veya denk olarak

$$-\frac{1}{n}g \leq 0 - f \leq \frac{1}{n}g \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

olduğu görülür. $A \subseteq V$ bir düzgün-kapalı sıra-ideal olsun. $a_n := 0 \in A$ dizisi g-düzgün olarak f vektörüne yakınsar. Dolayısıyla, $f \in A$ olur. A keyfi olduğundan $f \in I_V$ elde edilir.

(c) V nin bir sıra-birimini e ile gösterelim. İlk olarak $A = \{0\}$ olduğunu varsayalım. $f \in N_V$ verildiğinde en az bir $g \in V$ için

$$-g \leq nf \leq g \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

sağlanır. Ayrıca, $g \leq ce$ olacak şekilde bir $c \in \mathbb{R}$ var olduğundan

$$-e \leq nf \leq e \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

elde edilir. N_V nin düzgün kapalı olduğunu gösterelim: $f_n \xrightarrow{(u)} z$ olduğu varsayılırsa $f_n \xrightarrow{(e)} z$ olur, yani,

$$-e \leq k_n(f_n - z) \leq e \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

ve $k_n \uparrow \infty$ olacak şekilde $(k_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ vardır. Ayrıca,

$$-e \leq k_n f_n \leq e \quad (\forall n \in \mathbb{N}),$$

buradan

$$-2e \leq k_n z \leq 2e \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

eşitsizliği elde edilir. $k_n \uparrow \infty$ olduğundan $z \in N_V$ dir. Şimdi, $A \subseteq V$ herhangi bir ideal olsun. e, V nin bir sıra-birimi olduğundan $[e]$ de V/A nın bir sıra-birimdir. Böylece, yukarıda da gösterildiği gibi $N_{V/A} = I_{V/A}$ eşitliği elde edilir.

(d) (V, V_+) bir vektör örgüsü olsun. N_V nin bir vektör örgü-ideali olması $(V/N_V, V_+ + N_V)$ bölüm uzayını bir vektör örgüsü yapar. Yukarıdaki Önermeden $(V/N_V, D_V + N_V) = (V/N_V, V_+ + N_V)$ olduğu gözlemlendiğinde istenen elde edilir. $\square$

Önerme 3.5. (V, V_+) bir POVS olamak üzere aşağıdaki ifadeler doğrudur:

(a) $A \subseteq V$ bir sıra-ideal olsun. Bu durumda V/A hemen hemen Arşimedyan ise A düzgün-kapalıdır.

(b) V hemen hemen arşimedyandır $\Leftrightarrow N_V = \{0\} \Leftrightarrow I_V = \{0\}$.

(c) Eğer (V, V_+) sıra-birime sahipse $(V/N_V,\ D_V + N_V)$ bölüm uzayı Arşimedyan OVS dir.

(d) $(V/N_V,\ D_V + N_V)$ hemen hemen Arşimedyan ise $(V/N_V,\ V_+ + N_V)$ hemen hemen Arşimedyandır. Özellikle, (V, V_+) bir sıra-birime sahipse $(V/N_V,\ V_+ + N_V)$ hemen hemen Arşimedyandır.

Kanıt. (a) Bir $(y_n) \subseteq A$ dizisi $u \in V_+$ ve $x \in V$ olmak üzere $y_n \xrightarrow{(u)} x$ yakınsamasını sağlayacak şekilde alınsın. $x \in A$ olduğu gösterildiğinde A, düzgün-kapalı olur. Her $n \in \mathbb{N}$ için $n(y_n - x) \in [-u, u]$ olduğunu varsabiliriz. Böylece,

$$n\,[-x] = n\,[y_n - x] \in [-\,[u]\,,\,[u]] \quad (\forall n \in \mathbb{N})\,.$$

V/A hemen hemen Arşimedyan olduğundan $[-x] = [0]$ ve dolayısıyla $x \in A$ elde edilir.

(b) "V hemen hemen Arşimedyan $\Rightarrow \{0\}$ düzgün-kapalıdır" gerektirmesi (a) kısmından gelir.

"$\{0\}$ düzgün kapalı $\Rightarrow I_V = \{0\}$" gerektirmesi I_V nin tanımından dolayı doğrudur.

"$I_V = \{0\} \Rightarrow N_V = \{0\}$" gerektirmesi Önerme 3.4 (b) den elde edilir.

"$N_V = \{0\} \Rightarrow V$ hemen hemen Arşimedyandır" gerektirmesi Tanım 2.7 in bir sonucudur.

(c) İspat [24, Theorem 2.35] ten görülür.

(d) $V_+ + N_V$, V/N_V uzayında hemen hemen Arşimedyan $D_V + N_V$ konisinin bir alt konisi olduğundan İddia 2.10 dan istenen ispatlanır. □

Yukarıdaki Önermenin (b) ve (c) kısımlarının bir sonucu olarak şunu elde ederiz: (V, V_+) sıra-birime sahip ve hemen hemen Arşimedyan ise (V, D_V) Arşimedyandır (çünkü $N_V = \{0\}$).

Örnek 3.6. V, $\mathbb{R}$ üzerindeki tüm reel polinomların vektör uzayı $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ göstersin ve pozitif koni

$$V_+ := \{p \in V \,|(\forall t \in \mathbb{R})\, p(t) > 0\} \cup \{p\,|p(t) \equiv 0\}$$

olsun. OVS (V, V_+) sıra-birime sahip değildir, $N_V = \{0\}$, ve

$$D_V := \{p \in V\,|(\forall t \in \mathbb{R})\, p(t) \geq 0\}$$

olur. V den $x \equiv 1$ ve $y = -t^2$ elemanlarını alalım. Bu durumda

$$x - ny \in V_+ \quad (\forall n \in \mathbb{N}),$$

fakat $y \notin -V_+$ bulunur. Dolayısıyla, (V, V_+) Arşimedyan değildir, ancak $N_V = \{0\}$ dır. Açık olarak OVS $(V/N_V,\, D_V + N_V) = (V, D_V)$ Arşimedyandır.

Şunu not etmeliyiz ki aynı sıralamayla $V = \mathcal{P}[0,1]$ uzayı Arşimedyan değildir fakat sıra-birimli hemen hemen Arşimedyan ve düzgün kapalı sıra ideal $N_V = \{0\}$ dır. Ayrıca, iyi bilinir ki bu OVS, Reisz parçalanış özelliğine (Riesz decomposition property) sahiptir fakat vektör örgüsü değildir.

Önerme 3.7. (V, V_+) hemen hemen Arşimedyan OVS olsun. O zaman OVS (V, D_V) Arşimedyandır.

Kanıt. D_V konisinin Arşimedyan olmadığını kabul edelim. Bu durumda

$$(\forall r > 0)\, rx + y \in D_V \quad \text{fakat} \quad y \notin D_V$$

olacak şekilde $y \in V$ ve $x \in D_V$ vardır. $x \in D_V$ olduğundan en az bir $v \in V^+$ için

$$(\forall \alpha > 0)\ x + \alpha v \in V_+$$

sağlanır. $K = \operatorname{span}(x, v, y) \cap V_+$ olarak alınsın. Herhangi bir $C \subseteq \operatorname{span}(x, v, y)$ kümesinin $\operatorname{span}(x, v, y)$ uzayındaki Öklidyen topolojiye göre kapanışını $\mathrm{cl}(C)$ ile gösterelim. Bu durumda $x \in \mathrm{cl}(K)$ ve her $r > 0$ için $rx + y \in \mathrm{cl}(K)$ olur ve böylece $y \in \mathrm{cl}(K) \subseteq D_V$ bulunur ki bu imkansızdır. Dolayısıyla D_V Arşimedyandır. □

Sonuç 3.8. Herhangi bir hemen hemen Arşimedyan koni bir Arşimedyan koninin içine gömülebilir. Ayrıca (V, V_+) kısmi sıralı vektör uzayı olmak üzere $(V/N,\, D_V + N_V)$ sıralı vektör uzayının hemen hemen Arşimedyan olması için gerek ve yeter koşul $(V/N_V,\, V_+ + N_V)$ sıralı vektör uzayının hemen hemen Arşimedyan olmasıdır.

Kanıt. İlk kısım Önerme 3.7 nin bir sonucudur. İkinci kısım için $N = N_V$ ve $D = D_V$ gösterimleri kullanılsın.

Önerme 3.5 (d) gereklilik kısmı ispatlar.

Yeterlilik için $(V/N_V,\, V_+ + N)$ nin hemen hemen Arşimedyan olduğunu varsayalım. Bu durumda Önerme 3.7 ile $D_{V/N}$ konisi V/N uzayında Arşimedyandır.

$$\begin{aligned} D + N = [D]_N &= [\{u \in V \,|(\exists \xi \in V_+)\,(\forall n \in \mathbb{N})\; nu + \xi \in V_+\}]_N \\ &\subseteq \{[u] \in V/N \,|(\exists\, [\xi] \in V_+ + N)\,(\forall n \in \mathbb{N})\,[nu + \xi] \in V_+ + N\} \\ &= D_{V/N} \end{aligned}$$

gözleminden $D+N$ konisinin V/N uzayında hemen hemen Arşimedyan olduğu ispatlanmış olur. □

T. Nakayama'ya atfedilen aşağıdaki örnek (bakınız, [23, p.436]) V/N_V de $D_V + N_V$ konisinin genelde hemen hemen Arşimedyan bile olmayacağını göstermektedir.

Örnek 3.9. V kümesi aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$V = \left\{ a = \left(a_k^1, a_k^2\right)_k \mid \left(a_k^1,\, a_k^2\right) \in \left(\mathbb{R}^2,\, \leq_{lex}\right), \text{sonlu tane } k \text{ için } a_k^1 \neq 0 \right\}.$$

Koordinat sıralaması ve işlemlerine göre V bir vektör örgüsüdür. Aşağıdaki kümeler göz önüne alınsın:

$$A = \left\{ a \in V \mid \text{her } k \text{ için } a_k^1 = 0,\ \text{sonlu tane } k \text{ için } a_k^2 \neq 0 \right\}$$

ve

$$B = \left\{ a \in V \mid \text{her } k \text{ için } a_k^1 = 0 \right\}$$

Açıkça, $A \subseteq B$, $A \neq B$ ve $A \subseteq N_V$ sağlanır. Gerçekten, $a \in A$ ise her $k > N_a$ için $a_k^2 = 0$ olacak şekilde bir $N_a \in \mathbb{N}$ vardır. $y \in V$ aşağıdaki gibi tanımlanırsa $-y \leq na \leq y$, $(\forall n \in \mathbb{N})$ elde edilir:

$$y_k = \begin{cases} (0,1), & 1 \leq k \leq N_a \\ (0,0), & k > N_a \end{cases}.$$

Ayrıca $B = I_V$ ve $A = N_V$ eşitlikleri gerçeklenir. Gerçekten herhangi bir $a \in B$ alınırsa $u := (0, k\,|a_k^2|)_{k \in \mathbb{N}} \in V$ ve

$$a_n = \left\{ \left(0, a_1^2\right), \left(0, a_2^2\right), \ldots, \left(0, a_n^2\right), (0,0), (0,0), \ldots \right\} \in A$$

için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$-u \leq n\,(a - a_n) \leq u \quad (\forall n \in \mathbb{N})\,.$$

Böylece, $a_n \xrightarrow{(u)} a$ olur, ve $a_n \in N_V \subset I_V$ olduğundan $a \in I_V$ bulunur. Dolayısıyla $B \subset I_V$ dir. Her $k \in \mathbb{N}$ için $M_k := \{a \in V \mid a_k^1 = 0\}$ kümesi tanımlansın. Herhangi bir M_k kümesinin bir düzgün-kapalı ideal olduğu aşikardır ve böylece

$$I_V \subseteq \bigcap_{k \in \mathbb{N}} M_k = B.$$

Buradan, $B = I_V$ eşitliği gösterilmiş olur. Özellikle, $N_V \subseteq B$ elde edilir. Eğer $a \in N_V$ ise sadece sonlu tane $b_k^1 \neq 0$ olmak üzere $b = (b_k^1, b_k^2)_{k \in \mathbb{N}}$ için

$$-b \leq na \leq b \in V \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

eşitsizliği doğrudur. Öte yandan, $b_k^1 = 0$ ise her $n \in \mathbb{N}$ için $-b_k^2 \leq n a_k^2 \leq b_k^2$ eşitsizliği sağlanır ve $a_k^2 = 0$ olması gerektiğinden $b_k^2 = 0$ olduğunu varsayabiliriz. Böylece, $a = (a_k^1,\, a_k^2)_{k \in \mathbb{N}}$ elemanı her $k \in \mathbb{N}$ için $a_k^1 = 0$ ve yalnız sonlu tane k için $a_k^2 \neq 0$ koşulları sağlamalıdır. Dolayısıyla, $a \in A$ ve $A = N_V$ elde edilir. Buna göre aşağıdaki eşitlikler yazılabilir:

$$N_V = \left\{a \in V \mid (\forall k \in \mathbb{N})\, a_k^1 = 0 \text{ ve sonlu tane } k \text{ için } a_k^2 \neq 0\right\}$$

ve

$$D_V = \left\{a \in V \mid (\forall k \in \mathbb{N})\, a_k^1 \geq 0 \text{ ve sonlu tane } k \text{ için } a_k^2 < 0\right\}.$$

Buna göre $V_+ \neq D_V$ (örneğin $\{(0,-1),(0,0),\ldots\} \in D_V \backslash V_+$) olduğundan V Arşimedyan değildir. $(V/N_V,\, D_V + N_V)$ vektör örgüsü hemen hemen Arşimedyan değildir. Bunu görmek için

$$[c_n]_k = \begin{cases} (0, -\frac{1}{k}), & 1 \leq k \leq n \\ (0,0), & k > n \end{cases}$$

olmak üzere $c_n \in V$ elemanı göz önüne alınsın. Bu durumda $c_n \in N_V$, ve

$$d = \left(\left(0,\, -\frac{1}{k}\right)\right)_{k=1}^{\infty} \notin N_V \quad \text{ve} \quad v = ((0,\,1))_{k=1}^{\infty} \in V$$

olmak üzere $-v \leq n(d - c_n) \leq v$, yani, $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi d ye düzgün yakınsar. Dolayısıyla N_V, (V, V_+) da düzgün-kapalı değildir. Önerme 3.5 (a) ile $(V/N_V,\, V_+ + N_V)$ vektör örgüsünün hemen hemen Arşimedyan değildir. Ayrıca, (V, D_V) de $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi d

ye düzgün yakınsar fakat $d \notin D_V$ dir. V bir vektör örgü olduğundan Önerme 3.4 (d) ile $(V/N_V,\, V_+ + N_V) = (V/N_V,\, D_V + N_V)$ nin bir vektör örgüsü olduğu bulunur. Böylece, $(V/N_V,\, D_V + N_V)$ vektör örgüsü hemen hemen Arşimedyan değil ve dolayısıyla Arşimedyan da değildir (çünkü vektör örgülerinde hemen hemen Arşimedyan olma Arşimedyan olmaya denktir).

Sonuç 3.8 in ilk kısmı zaten herhangi bir hemen hemen Arşimedyan $(V,\, V_+)$ uzayın bir Arşimedyanlaştırmasını vermesine rağmen (tek yapılması gereken V_+ yerine V_+ yı içeren bütün Arşimedyan konilerin kesişimini almaktır) aşağıdaki Teorem, V_+ konisi üzerinde herhangi bir kısıtlama gerektirmez ve V/N nin sıfırdan farklı sonsuz küçük eleman içerdiği gösterilen Örnek 3.9 daki V gibi sıralanmış vektör uzaylarını da barındırır.

Teorem 3.10. Herhangi bir sıralanmış vektör uzayı sıra-izomorfizme göre tek türlü belirli bir Arşimedyanlaştırmaya sahiptir.

Kanıt. $V = (V,\ V_+)$ bir OVS olsun. $N_0 := \{0\}$,

$$N_1 = N_V = \big\{x \in V \mid [x]_{N_0}\,,\, V/N_0 = V \text{ nin sonsuz küçük elemanı}\big\}$$

$$N_{n+1} = \big\{x \in V \mid [x]_{N_n}\,,\, V/N_n \text{ nin sonsuz küçük elemanı}\big\}$$

ve daha genel olarak herhangi bir $\alpha > 0$ ordinali için

$$N_\alpha = N_\alpha(V) = \Big\{x \in V \mid [x]_{\cup_{\beta<\alpha} N_\beta}\,,\, V/\cup_{\beta<\alpha} N_\beta \text{ nin sonsuz küçük elemanı}\Big\}$$

olarak tanımlansınlar. N_α nın tanımından aşağıdaki içerme görülür:

$$N_{\alpha_1} \subseteq N_{\alpha_2} \quad (\forall \alpha_1 \leq \alpha_2)\,.$$

$N_{\lambda_V+1} = N_{\lambda_V}$ koşulunu sağlayan ilk ordinal λ_V olsun. OVS $\Big(V/N_{\lambda_V},\ [V_+]_{N_{\lambda_V}}\Big)$ sıfırdan farklı sonsuz küçük elemana sahip değildir ve bu nedenle hemen hemen Arşimedyandır. Önerme 3.7 ile aşağıdaki OVS Arşimedyandır,

$$\Big(V/N_{\lambda_V},\ \big[D_{V/N_{\lambda_V}}\big]_{N_{\lambda_V}}\Big) = \Big(V/N_{\lambda_V},\ D_{V/N_{\lambda_V}}\Big)\,.$$

p_V ile $V \to V/N_{\lambda_V}$ bölüm fonksiyonunu gösterilirse p_V pozitif ve lineerdir. $U = (U, U_+)$ Arşimedyan OVS ve $\phi : V \to U$ bir pozitif lineer fonksiyon olacak şekilde herhangi diğer bir ikili $\langle U,\phi\rangle$ için α keyfi bir ordinal olmak üzere her $x\in N_\alpha$ için $\phi(x)\in N_U$ elde edilir. Her Arşimedyan OVS hemen hemen Arşimedyan olduğundan $N_U=\{0\}$ ve dolayısıyla $N_{\lambda_V}\subseteq \ker(\phi)$ sağlanır. Böylece $\tilde{\phi}([x]_{N_{\lambda_V}})=\phi(x)$ biçiminde tanımlanan $\tilde{\phi}:V/N_{\lambda_V}\to U$ fonksiyonu iyi tanımlıdır ve $\tilde{\phi}\circ p_V=\phi$ eşitliğini gerçekler. Ayrıca eğer $[x]_{N_{\lambda_V}}\in D_{V/N_V}$ ise en az bir $\xi\in V_+ + N_{\lambda_V}$ için

$$n[x]_{N_{\lambda_V}}+[\xi]_{N_{\lambda_V}}\in[V_+]_{N_{\lambda_V}}\quad(\forall n\in\mathbb{N})$$

bulunur. Bu elemana ϕ uygulamak

$$n\phi(x)+\phi(\xi)\in U_+\quad(\forall n\in\mathbb{N})$$

verir ve (U,U_+) Arşimedyan olduğundan $\phi(x)\in U_+$ elde edilir. Buradan

$$\tilde{\phi}([x]_{N_{\lambda_V}})=\phi(x)\in U_+$$

ve $\tilde{\phi}$ nin pozitif lineer fonksiyon olduğu görülür. $\tilde{\phi}$ nin tek türlü belirli olduğunu göstermek için $\psi\circ p_V=\phi$ koşulunu sağlayan herhangi bir $\psi:V/N_{\lambda_V}\to U$ alalım. O zaman

$$\psi\left([y]_{N_{\lambda_V}}\right)=\psi(p_V(y))=\phi(y)=\tilde{\phi}(p_V(y))=\tilde{\phi}\left([y]_{N_{\lambda_V}}\right)\quad(\forall y\in V)$$

ve böylece $\psi=\tilde{\phi}$ elde edilir. Dolayısıyla, $\left\langle\left(V/N_{\lambda_V},D_{V/N_{\lambda_V}}\right),p_V\right\rangle$ objesi $\mathcal{C}_{Arch}(V)$ kategorisinin ilk objesidir. Dolayısıyla $\left(V/N_{\lambda_V},D_{V/N_{\lambda_V}}\right)$ OVS, (V,V_+) OVS nin Arşimedyanlaştırmasıdır. □

Teorem 3.10 nun ispatıyla bağlantılı olarak şu soru ortaya çıkar. Herhangi bir α ordinali için $N_{\alpha+1}(V)=N_\alpha(V)$ eşitliğini sağlayan ilk ordinalin α olduğu bir (V,V_+) OVS var mı?

Teorem 3.11. Herhangi bir (V,V_+) OVS için aşağıdaki koşullar denktir:

(i) V_+ Arşimedyadır,

(ii) $\{x_\tau\}_\tau\subseteq V$ herhangi bir alttan sınırlı azalan ağ ve bu ağın tüm alt sınırlarının topluluğu $L=\{y\in V:(\forall\tau\in\{\tau\})[y\leq x_\tau]\}$ olsun. O zaman aşağıdaki eşitlik sağlanır:

$$\inf\{x_\tau-y\mid\tau\in\{\tau\},y\in L\}=0.$$

Kanıt. (i) $\Rightarrow$ (ii): V_+ Arşimedyan olsun. Alttan $d \in V$ ile sınırlı bir azalan $\{x_\tau\}_\tau \subseteq V$ ağı alalım. $z \in V$ elemanının her τ ve her $y \in L$ için $z \leq x_\tau - y$ eşitsizliğini sağlandığını varsayalım. Her τ için $0 \leq x_\tau - y$ olduğundan gerektirmeyi ispatlamak için $z \leq 0$ olduğunu göstermeliyiz.

Her τ ve her $y \in L$ için $y + z \leq x_\tau$ olduğundan her $y \in L$ için $y + z \in L$ olur. Böylece tümevarım ile

$$y + nz \in L \quad (\forall y \in L)(\forall n \in \mathbb{N})$$

bulunur. Özel olarak, en az bir $\tau_0 \in \{\tau\}$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $d + nz \leq x_{\tau_0}$, ve dolayısıyla $nz \leq x_{\tau_0} - d$ sağlanır. Bununla birlikte V_+ nın Arşimedyan özelliğini kullanılarak istenildiği gibi $z \leq 0$ elde edilir.

(ii) $\Rightarrow$ (i): $x \in V_+$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $ny \leq x$ olsun. $y \leq 0$ olduğunu göstermeliyiz.

$$L := \left\{ w \in V : (\forall n \geq 1) \ w \leq \frac{1}{n}x \right\}$$

olarak tanımlansın. Açıktır ki $y \in L$ dir. $u \in L$ verildiğinde her $n \geq 1$ için $0 \leq \frac{1}{n}x - u$ sağlanır. Hipotez azalan $\frac{1}{n}x \downarrow\geq y$ dizisine uygulanırsa aşağıdaki infimum vardır ve

$$\inf_{n \geq 1, u \in L} \left(\frac{2}{n}x - u \right) = \inf_{n \geq 1, u \in L} \left(\frac{1}{n}x - u \right) = 0$$

bulunur. Buradan

$$\inf_{n \geq 1, u \in L} \left[\left(\frac{2}{n}x - u \right) - y \right] = -y + \inf_{n \geq 1, u \in L} \left(\frac{2}{n}x - u \right) = -y$$

olur. Öte yandan, her $n \geq 1$ için

$$0 \leq \left(\frac{1}{n}x - u \right) + \left(\frac{1}{n}x - y \right) = \left(\frac{2}{n}x - u \right) - y$$

olduğundan

$$0 \leq \inf_{n \geq 1, u \in L} \left[\left(\frac{2}{n}x - u \right) - y \right] = -y$$

elde edilir. Bu durumda, $y \leq 0$ ve dolayısıyla V_+ Arşimedyandır. $\square$

Teorem 3.12. Herhangi bir (V, V_+) OVS için aşağıdaki ifadeler denktir:

(i) V_+ hemen hemen Arşimedyadır.

(ii) Herhangi bir (U, U_+) OVS ve toplamsal fonksiyon $T : U_+ \to V_+$ için T toplamsal fonksiyonunun U dan V ye bir lineer genişlemesi vardır.

(iii) Herhangi bir toplamsal fonksiyon $T : \mathbb{R}_+ \to V_+$ için T toplamsal fonksiyonunun $\mathbb{R}$ den V ye bir lineer genişlemesi vardır.

Kanıt. (i) $\Rightarrow$ (ii): Bu gerektirme, Sonuç 3.8 ve (V, V_+) OVS in Arşimedyan olması durumunda çok iyi bilinen bir genişleme sonucunda (örneğin bakınız, [3, Lemma 1.26]), hemen elde edilebilir. Fakat bunun direkt bir ispatını vereceğiz.

U da $U_+ - U_+$ nın cebirsel tamamlayacısı U_0 üzerinde T nin bir genişlemesi keyfi bir lineer operatör olarak seçilebildiğinden $U_+ \xrightarrow{T} V_+$ toplamsal fonksiyonunun bir $(U_+ - U_+) \xrightarrow{\bar{T}} V$ lineer operatörüne genişlemesini elde etmemiz yeterlidir.

Her bir $y \in (U_+ - U_+)$ için $y = y_1 - y_2$ olacak şekilde y_1, $y_2 \in U_+$ seçelim ve

$$\bar{T}y := T(y_1) - T(y_2)$$

olarak tanımlansın. $\bar{T}$ nın iyi tanımlı ve toplamsal olduğunu göstermek alışıla gelmiş şekilde yapılabilir. $(U_+ - U_+) \xrightarrow{\bar{T}} V$ nın toplamsalığı $\bar{T}$ nın $\mathbb{Q}$-homojen olmasını gerektirir. İspatı tamamlamak için $\bar{T}$ nın U_+ üzerinde $\mathbb{R}_+$-homojen olduğunu göstermek yeterlidir ki U_+ üzerinde T ile aynılar. Böylece, yalnız $T : U_+ \to V_+$ nın $\mathbb{R}_+$-homojen olduğunu göstermeye ihtiyacımız vardır. Aşağıdaki basit sonucu kullanacağız:

$$\begin{aligned} &[x,\, y \in [q, p]] \Rightarrow [x - q,\, y - q \in [0,\, p - q]] \\ \Rightarrow\ &[x - y = (x - q) - (y - q) \in [-(p - q),\, p - q]]. \end{aligned} \tag{3.3}$$

$\mathbb{Q}_+ \ni r_n \uparrow a \in \mathbb{R}$, $\mathbb{Q}_+ \ni r'_n \downarrow a$, $u \in U_+$ olsun. Bu durumda

$$r_n T(u) = T(r_n u) \leq T(au) \leq T(r'_n u) = r'_n T(u)$$

olur. Bunun yanı sıra

$$r_n T(u) \leq aT(u) \leq r'_n T(u),$$

yani,

$$T(au), aT(u) \in [r_n T(u), r'_n T(u)] \tag{3.4}$$

bulunur. 3.4 e 3.3 uygulanırsa

$$T(au) - aT(u) \in [-(r'_n - r_n) Tu, (r'_n - r_n) Tu] \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

gözlemlenir. V_+ hemen hemen Arşimedyan ve $r'_n - r_n \downarrow 0$ olduğundan istenildiği gibi $T(au) - aT(u) = 0$ elde edilir.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Aşikardır.

(iii) $\Rightarrow$ (i): $x \in V_+$ ve $y \in V$ öyle ki

$$-\frac{1}{n}x \leq y \leq \frac{1}{n}x \quad (\forall n \geq 1) \tag{3.5}$$

olsun. $\mathbb{Q}$-lineer fakat $\mathbb{R}$-lineer olmayan bir $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonunu alalım ve $T : \mathbb{R}_+ \to V$ toplamsal fonksiyonu şu şekilde tanımlansın:

$$T(a) = ax + f(a)y \quad (a \in \mathbb{R}_+).$$

Bu durumda T fonksiyonu $\mathbb{R}_+$ dan V_+ içine tanımlıdır. Gerçekten, $T(0) = 0$ ve eğer $0 \leq a$ ise yeterince büyük n_0 için $0 \leq a - \frac{|f(a)|}{n_0}$ sağlanır. 3.5 ten her $n \geq 1$ için

$$-\frac{|f(a)|}{n}x \leq \pm f(a)y \leq \frac{|f(a)|}{n}x$$

bulunur. Özellikle, $-\dfrac{|f(a)|}{n_0}x \leq f(a)y$, ve bu nedenle

$$0 \leq \left(a - \frac{|f(a)|}{n_0}\right)x \leq ax + f(a)y = T(a)$$

sonucuna ulaşılır. T nin tüm $\mathbb{R}$ ye bir $\bar{T}$ lineer genişlemesi alınsın. Buna göre $\bar{T}$ (dolayısıyla T) $\mathbb{R}_+$ üzerinde $\mathbb{R}_+$-homojen olmalı ki bu yalnızca $y = 0$ olmasıyla mümkündür. $\square$

Bölüm 4

$d(\mathbf{a}, p)$ ve $g(\mathbf{a}, p)$ Uzayları

Bu bölümde iki yeni dizi uzayı sınıfı tanıtılır ve bunların ℓ^p-uzaylarıyla olan ilişkisi araştırılır. Teorem 4.2 de verilen ilişki bu yazı boyunca kullanılacaktır.

$a = (a_1, a_2, \ldots)$ terimleri negatif olmayan bir dizi ve $a_1 > 0$ olsun. Bu durumda kısmi toplamlar

$$A_n = a_1 + \cdots + a_n \tag{4.1}$$

sıfır olamaz. $p > 0$ için aşağıdaki uzayları tanımlayalım:

$$d(\mathbf{a}, p) = \left\{ \mathbf{x} \colon \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sup_{k \geq n} |x_k|^p < \infty \right\} \tag{4.2}$$

ve

$$g(\mathbf{a}, p) = \left\{ \mathbf{x} \colon \sum_{k=1}^{n} |x_k|^p = O(A_n) \right\}. \tag{4.3}$$

Eğer $p \geq 1$ ise bu uzaylar aşağıdaki normlarla donatıldığında BK-uzaylarıdır (yani Banach dizi uzaylarıdır ve $\mathbf{x} \mapsto x_k$ izdüşümleri süreklidir):

$$\|\mathbf{x}\|_{d(\mathbf{a},p)} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sup_{k \geq n} |x_k|^p \right)^{1/p} \tag{4.4}$$

ve

$$\|\mathbf{x}\|_{g(\mathbf{a},p)} = \sup_n \left(\frac{1}{A_n} \sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \right)^{1/p}. \tag{4.5}$$

$g(\mathbf{a}, p)$ nin "büyük" bir uzay olduğu gözlemlenir çünkü sınırsız diziler içerir ($\sum a_k = \infty$ olduğunda) ve $d(\mathbf{a}, p)$ nin de "küçük" bir uzay olduğu gözlemlenir. Teorem 4.2 den de görüleceği gibi ikisi arasında mükemmel bir denge vardır. $\mathbf{a} = \mathbf{1} = (1, 1, \ldots)$

olduğunda $d(\mathbf{a},p)$ ve $g(\mathbf{a},p)$ uzayları bölüm 1 de karşılaşılan uzaylara indirgenir. Burada sağlanan genelliğe bölüm 6 da ve başka kısımlarda ihtiyaç olacaktır. Bölüm 6 da "oranlı Hölder eşitsizliğinin" çarpanlara ayrılışı tartışılacaktır.

Aşağıdaki iyi bilen sonuç kısmi toplamlar lemması olarak bilinir.

Lemma 4.1. $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ ve $\mathbf{w}$ negatif terimli olmayan diziler ve $\mathbf{w}$ azalan olsun. Eğer

$$\sum_{k=1}^{n} u_k \le \sum_{k=1}^{n} v_k \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

ise aşağıdaki sağlanır:

$$\sum_{k=1}^{n} u_k w_k \le \sum_{k=1}^{n} v_k w_k \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Kanıt. İki defa kısmi toplam yapılır. □

Eğer $\mathbf{x}$ sınırlı bir dizi ise $\hat{\mathbf{x}}$, *en küçük azalan üst sınır* şu şekilde tanımlanır:

$$\hat{x}_n = \sup_{k \ge n} |x_k|. \tag{4.6}$$

Açıktır ki, $\hat{\mathbf{x}} \in \ell^p$ olması $\mathbf{x} \in d(p)$ olmasına denktir, ve $\|\mathbf{x}\|_{d(p)} = \|\hat{\mathbf{x}}\|_p$ sağlanır.

Teorem 4.2. Eğer $0 < p \le \infty$ ise

$$d(\mathbf{a},p) \cdot g(\mathbf{a},p) = \ell^p \tag{4.7}$$

çarpanlara ayrılışı sağlanır. Tam olarak, herhangi bir $\mathbf{x}$ dizisi verildiğinde aşağıdaki eşitlik doğrudur:

$$\inf \left\{ \|\mathbf{y}\|_{d(\mathbf{a},p)} \|\mathbf{z}\|_{g(\mathbf{a},p)} : \mathbf{y} \cdot \mathbf{z} = \mathbf{x} \right\} = \|\mathbf{x}\|_p . \tag{4.8}$$

Kanıt. Homojenlikten dolayı teoremi $p = 1$ durumunda ispatlamak yeterlidir ($p = \infty$ durumu açık olduğundan burada göz önüne alınmamıştır).

O halde $\mathbf{x}$ dizisi $\mathbf{y} \in d(\mathbf{a},1)$ ve $\mathbf{z} \in g(\mathbf{a},1)$ olmak üzere $\mathbf{x} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{z}$ çarpanlara ayrılışına sahip olsun. Bu durumda,

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{k=1}^{\infty} |y_k\, z_k| \le \sum_{k=1}^{\infty} \hat{y}_k |z_k|$$

eşitsizliği sağlanır. Ayrıca, Tanım (4.5) den şu sonuç çıkar:

$$\sum_{k=1}^{n} |z_k| \leq \|\mathbf{z}\|_{g(\mathbf{a},1)} \sum_{k=1}^{n} a_k \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

ve sonra kısmi toplamlar lemmasından

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \hat{y}_k |z_k| &\leq \|\mathbf{z}\|_{g(\mathbf{a},1)} \sum_{k=1}^{\infty} \hat{y}_k \, a_k \\ &= \|\mathbf{z}\|_{g(\mathbf{a},1)} \|\mathbf{y}\|_{d(\mathbf{a},1)} \end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla, $d(\mathbf{a},1) \cdot g(\mathbf{a},1) \subseteq \ell^1$ içermesi ve

$$\|\mathbf{x}\|_1 \leq \inf \left\{ \|\mathbf{y}\|_{d(\mathbf{a},1)} \|\mathbf{z}\|_{g(\mathbf{a},1)} : \mathbf{y} \cdot \mathbf{z} = \mathbf{x} \right\}$$

elde edilir.

Tersini ispatlamak için $\mathbf{x} \in \ell_1$ olduğunu varsayalım ve doğal sayıların aşağıdaki gibi tanımlanmış $\{I_1, I_2, \ldots\}$ parçalanışını (sonlu veya sonsuz olabilir) alalım:

$$I_n := \{t \in \mathbb{Z} \colon i_{n-1} < t \leq i_n\}$$

burada $i_n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ ve şu şekilde tanımlanır. İlk olarak $i_0 = 0$ alır ve i_n ler ardışık bir şekilde tanımlanır: i_n sonlu bir sayı ve

$$S_{(n+1,t)} := \frac{|x_{i_n+1}| + \cdots + |x_t|}{a_{i_n+1} + \cdots + a_t}, \qquad (i_n < t) \tag{4.9}$$

olsun. Eğer $\sup\{S_{(n+1,t)} \colon i_n < t\}$ supremumuna ulaşılmazsa

$$i_{n+1} := \infty$$

olarak alınsın. Eğer $\sup\{S_{(n+1,t)} \colon i_n < t\}$ supremumuna ulaşılırsa

$$i_{n+1} := \sup\{k \in \mathbb{N} \colon S_{(n+1,k)} = \sup\{S_{(n+1,t)} \colon i_n < t\}\}$$

olarak tanımlanır, yani i_{n+1}, (4.9) daki oranların supremumuna ulaşıtığı en son indekstir. Herhangi bir adımda $i_{n+1} = \infty$ olursa tanımlama işlemi bitirilir. Ayrıca, bu tanımlamada açıklanması gereken bazı noktalar vardır. İlk olarak a_{i_n+1} sıfır olmadığından (4.9) teki oranlar iyi tanımlıdır. Gerçekten, $n = 0$ için bu tanımlamadan dolayı doğrudur ($a_1 \neq 0$) ve $n = 1, 2, \ldots$ olduğunda da doğrudur. Çünkü, $S_{(n,i_n)} >$

$S_{(n,i_n+1)}$ eşitsizliği sağlanması gerekir, aksi halde i_n i tanımlayan oranların maksimumuna ulaştığı en son indeks, i_n olamazdı. İkincisi, $\mathbf{x} \in \ell^1$ olduğundan (4.9) daki oranlar dizisi (n sabit, $t > i_n$) sınırlıdır, yani her $n \in \mathbb{N}$ için $\{S_{(n+1,t)} \colon i_n < t\}$ kümesi sınırlıdır. Dolayısıyla, parçalanışın esas özellikleri şunlardır:

$$\sup_{t \in I_n} \frac{|x_{i_{n-1}+1}| + \cdots + |x_t|}{a_{i_{n-1}+1} + \cdots + a_t} = \frac{\sum_{k \in I_n} |x_k|}{\sum_{k \in I_n} a_k} = S_{(n,i_n)} \tag{4.10}$$

ve

$$S_{(n,i_n)} = \frac{\sum_{k \in I_n} |x_k|}{\sum_{k \in I_n} a_k} \geq \frac{\sum_{k \in I_{n+1}} |x_k|}{\sum_{k \in I_{n+1}} a_k} = S_{(n+1,i_{n+1})}. \tag{4.11}$$

Özellikle (4.11) şuna denktir:

$$\frac{\sum_{k \in I_n} |x_k|}{\sum_{k \in I_n} a_k} \geq \frac{\sum_{k \in I_n \cup I_{n+1}} |x_k|}{\sum_{k \in I_n \cup I_{n+1}} a_k},$$

ve bu da i_n in tanımından kaynaklanmaktadır ($\sup\{S_{(n+1,t)} \colon i_n < t\}$ supremumuna ulaşılırsa (4.11) daki eşitsizlik kesin olur).

$j \in I_n$ için $y_j := S_{(n,i_n)}$ olacak şekilde bir $\mathbf{y}$ dizisi tanımlanırsa (4.11) e göre $\mathbf{y}$ azalan dizidir ve

$$\begin{aligned}
\|y\|_{d(\mathbf{a},1)} &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n \\
&= \sum_{n} \sum_{k \in I_n} a_k y_k \\
&= \sum_{n} \sum_{k \in I_n} |x_k| \\
&= \|\mathbf{x}\|_1
\end{aligned}$$

eşitliği sağlanır. Şimdi, $\mathbf{z}$ dizisi $j \in I_n$ için $z_j := \frac{x_j}{S_{(n,i_n)}}$ ($0/0 = 0$ kuralıyla) biçiminde tanımlanırsa $\mathbf{x} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{z}$ görülür. Ayrıca, $k \in I_n$ için

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{k} |z_j| &= \sum_{j \in \bigcup_{k=1}^{n-1} I_k} |z_j| + |z_{i_{n-1}+1}| + \cdots + |z_k| \\
&= \sum_{j \in \bigcup_{k=1}^{n-1} I_k} a_j + \left(|x_{i_{n-1}+1}| + \cdots + |x_k|\right) \frac{\sum_{j \in I_n} a_j}{\sum_{j \in I_n} |x_j|}
\end{aligned}$$

eşitliği sağlanır. Böylece, (4.10) dan

$$\sum_{j=1}^{k} |z_j| \leq \sum_{j \in \bigcup_{k=1}^{n-1} I_k} a_j + a_{i_{n-1}+1} + \cdots + a_k = \sum_{j=1}^{k} a_j$$

sonucu çıkar ki bu bize $\mathbf{z} \in g(\mathbf{a},1)$ ve $\|\mathbf{z}\|_{g(\mathbf{a},1)} \leq 1$ olduğunu söyler. Dolayısıyla, $\ell^1 \subseteq d(\mathbf{a},1) \cdot g(\mathbf{a},1)$ ve

$$\inf\left\{\|\mathbf{y}\|_{d(\mathbf{a},1)} \|\mathbf{z}\|_{g(\mathbf{a},1)} : \mathbf{y} \cdot \mathbf{z} = \mathbf{x}\right\} \leq \|\mathbf{x}\|_1 .$$

elde edilir ve bu da ispatı tamamlar. □

Not 4.3. Teoremin ispatı Teorem 4.2 deki infimuma ulaşıldığını gösterir böylece (4.8) daki "inf", "min" ile değiştirilebilir. Aşağıdaki sonuçların bir kaçında eşitlik durumu tartışıldığında bu gözlem yararlı olacaktır.

İyi bilinen

$$\ell^p \cdot \ell^q = \ell^s \qquad \left(\frac{1}{s} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) \tag{4.12}$$

sonuncunun ispatına benzer olan aşağıdaki çarpım formülleri verilebilir.

Teorem 4.4. $0 < p, q \leq \infty$ ve $\frac{1}{s} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ olmak üzere

$$d(\mathbf{a},p) \cdot d(\mathbf{a},q) = d(\mathbf{a},s) \tag{4.13}$$

ve

$$g(\mathbf{a},p) \cdot g(\mathbf{a},q) = g(\mathbf{a},s) \tag{4.14}$$

sağlanır.

Bölüm 5

Hardy Eşitsizliği

Bu bölümde çarpanlara ayrılış teoremi olarak Hardy eşitsizliğini geliştireceğiz ve bu amaçla aşağıdaki gösterimi sunuyoruz:

$$\|\mathbf{x}\|_{ces(p)} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |x_k| \right)^p \right)^{1/p}. \tag{5.1}$$

Aşağıdaki gibi çarpanlarına ayrılmış olan $\mathbf{x}$ dizileriyle ilgileneceğiz;

$$\mathbf{y} \in \ell^p \quad \text{ve} \quad \mathbf{z} \in g\left(p^*\right) \tag{5.2}$$

olmak üzere

$$\mathbf{x} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{z}. \tag{5.3}$$

Bu tür diziler için

$$|\mathbf{x}|_p = \inf\{\|\mathbf{y}\|_p \|\mathbf{z}\|_{g(p^*)} \mid \mathbf{y} \in \ell^p, \mathbf{z} \in g\left(p^*\right) \text{ öyle ki } \mathbf{x} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{z}\} \tag{5.4}$$

gösterimini tanımlayalım.

Lemma 5.1. $p > 1$ olmak üzere $\zeta\left(p\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ olsun. $n = 1, 2, \ldots$ ise

$$\frac{1}{p-1} < n^{p-1} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^p} \leq \zeta\left(p\right) \tag{5.5}$$

eşitsizlikleri gerçeklenir. (5.5) teki sabitlerin her ikisi de mümkün olanların en iyisidir yalnızca $n = 1$ olduğunda sağ tarafta eşitlik olur.

Kanıt. Sol taraf integral testinden gelir:

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^p} > \sum_{k=n}^{\infty} \int_{k}^{k+1} \frac{dt}{t^p} = \frac{1}{(p-1)\, n^{p-1}}. \tag{5.6}$$

Benzer şekilde, $\frac{1}{(p-1)(n-1)^{p-1}}$ sabiti seriyi üstten sınırlar. Buradan $\frac{1}{p-1}$ sabitinin (5.5) teki mümkün olanların en iyisi olduğu görülür. Sağ eşitisizliğe dönersek

$$\begin{aligned} n^{p-1} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^p} &= n^{p-1} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=jn}^{(j+1)n-1} \frac{1}{k^p} \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=jn}^{(j+1)n-1} \left(\frac{n}{k}\right)^p. \end{aligned}$$

Her bir ortalamayı ortalamadaki maksimum değer ile değiştirmek aşağıdaki eşitsizliği verir.

$$n^{p-1} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^p} \leq \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{n}{jn}\right)^p = \zeta(p)\,.$$

Ortalamalar maksimumları ile çakışmadıkça son eşitsizlik kesin küçük olur ve bu yalnızca $n = 1$ olduğunda gerçekleşir. □

Not 5.2. $\left(n^{p-1} \sum_{k \geq n} \frac{1}{k^p}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisinin kesin azalan olduğu görülebilir. Ayrıca, bu duruma eşlik eden bir sonuç daha vardır: $\left(n^{p-1} \sum_{k > n} \frac{1}{k^p}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi kesin artandır. İkisi birlikte ele alındığında ζ fonksiyonunun kuyrukları için oldukça kesin ve düzgün kestirimler bulunur:

$$\frac{1}{n\left[n^{p-1} - (n-1)^{p-1}\right]} < \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^p} < \frac{(n+1)^{p-1}}{n^p\left[(n+1)^{p-1} - n^{p-1}\right]}$$

Lemma 5.3. $p > 1$ olmak üzere aşağıdaki eşitsizliği sağlayan pozitif terimli azalan **w** dizisi vardır:

$$(w_1 + \cdots + w_n)^{p-1} < (np^*)^p \left(w_n^{p-1} - w_{n+1}^{p-1}\right) \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{5.7}$$

Kanıt. $w_n = \binom{n-1-\frac{1}{p}}{n-1}$ alınsın. Bu durumda

$$w_{n+1} = \frac{n - \frac{1}{p}}{n} w_n \quad \text{ve} \quad w_1 + \cdots + w_n = \binom{n - \frac{1}{p}}{n-1} = \frac{n - \frac{1}{p}}{1 - \frac{1}{p}} w_n$$

bulunur. Ayrıca, aritmetik-geometrik ortalama eşitsizliğinden ([17, Theorem 9])

$$\left(1 + \frac{1}{np^*}\right)\left(1 - \frac{1}{np}\right)^{p-1} < 1$$

elde edilir. Buradan (5.7) kolayca görülür. □

Lemma 5.3, Knopp'a atfedilir. Burada onun ispatı çok az değiştirilmiştir ([20], sayfa 207, ile karşılaştır). Onun sonucu göründüğünden daha incelikli; özellikle $(p^*)^p$ sabiti kesindir. Üstelik, onun $\mathbf{w}$ seçimi oldukça ustacadır; daha sıradan $w_n = n^{-1/p}$ seçimi çalışmaz. Knopp'unkinin katları olmayan (5.7) yi sağlayan başka dizilere sahip olmak ilginç olurdu.

Teorem 5.4. $p > 1$ olsun. Bir $\mathbf{x}$ dizisi $ces\,(p)$ ye aittir ancak ve ancak (5.2) ve (5.3) teki gibi bir çarpanlara ayrılışı vardır. Ayrıca aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$(p-1)^{-1/p}|\mathbf{x}|_p \leq \|\mathbf{x}\|_{ces(p)} \leq p^*|\mathbf{x}|_p. \tag{5.8}$$

(5.8) deki sabitlerin her ikisi de mümkün olanların en iyisidir ve $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ olmadıkça sağdaki eşitsizlik kesindir.

Kanıt. Eğer $\mathbf{x} = \mathbf{0} = (0, 0, \ldots)$ ise teorem açıktır. Bu nedenle $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ alalım.

(Gereklilik). Eğer $\mathbf{x} \in ces\,(p)$ ise

$$b_n = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^p} \left(\sum_{j=1}^{k} |x_j| \right)^{p-1} \tag{5.9}$$

alınsın ve $(n = 1, 2, \ldots)$ için b_n nin sonlu olduğunu not edelim. Gerçekten, Hölder eşitsizliğine göre,

$$\begin{aligned} b_n &= \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} |x_j| \right)^{p-1} \\ &\leq \left(\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^p} \right)^{1/p} \left(\sum_{k=n}^{\infty} \left(\frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} |x_j| \right)^p \right)^{1/p^*} \\ &\leq \zeta(p)^{1/p} \, \|\mathbf{x}\|_{ces(p)}^{p-1} \end{aligned}$$

bulunur. Ayrıca $\mathbf{b}$, pozitif terimli azalan bir dizisidir. Buna göre,

$$y_n := (|x_n|\, b_n)^{1/p} \operatorname{sgn}(x_n) \tag{5.10}$$

ve

$$z_n := |x_n|^{1/p^*} b_n^{-1/p} \tag{5.11}$$

alınırsa $\mathbf{x}$ i çarpanlara ayırabiliriz:

$$\mathbf{x} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{z}. \tag{5.12}$$

(5.9) ve (5.10) dan

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}|y_n|^p &= \sum_{n=1}^{\infty}|x_n|\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{k^p}\left(\sum_{j=1}^{k}|x_j|\right)^{p-1}\\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}|x_j|\right)^p\end{aligned}$$

elde edilir, yani, $\mathbf{y}\in\ell^p$ ve

$$\|y\|_p = \|x\|_{ces(p)} \tag{5.13}$$

bulunur.

Öte yandan, Hölder eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}\left(\sum_{k=1}^{m}|z_k|^{p^*}\right)^p &= \left(\sum_{k=1}^{m}|x_k|^{1/p^*}|x_k|^{1/p}\,b_k^{-1/(p-1)}\right)^p\\ &\le \left(\sum_{k=1}^{m}|x_k|\right)^{p-1}\sum_{k=1}^{m}|x_k|b_k^{-p^*}\end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç olarak $m=1,2,\dots$ için (5.9) ve (5.11) hatırlanarak

$$\begin{aligned}\sum_{n=m}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\infty}|z_k|^{p^*}\right)^p &\le \sum_{n=m}^{\infty}\frac{1}{n^p}\left(\sum_{k=1}^{n}|x_n|\right)^{p-1}\sum_{k=1}^{m}|x_k|\,b_k^{-p^*}\\ &= b_m\sum_{k=1}^{m}|x_k|\,b_k^{-p^*}\\ &\le \sum_{k=1}^{m}|x_k|\,b_k^{-\frac{1}{p-1}}\\ &= \sum_{k=1}^{m}|z_k|^{p^*}\end{aligned}$$

elde edilip

$$\left(\sum_{n=m}^{\infty}\frac{1}{n^p}\right)\left(\sum_{k=1}^{m}|z_k|^{p^*}\right)^{p-1}\le 1$$

eşitsizliği sağlanır ve dolayısıyla Lemma 5.1 den

$$\left(\sum_{k=1}^{m}|z_k|^{p^*}\right)^{p-1}\le (p-1)\,m^{p-1}$$

bulunur. Böylece $\mathbf{z}\in g\left(p^*\right)$ ve aşağıdaki eşitsizlik görülür:

$$\|z\|_{g(p^*)}\le (p-1)^{1/p}. \tag{5.14}$$

(5.12), (5.13) ve (5.14) den (5.8) in sol tarafı elde edilir.

(Yeterlilik). $\mathbf{x}$ dizisi (5.2) ve (5.3) deki gibi bir çarpanlara ayrılışa sahip olsun ve $\mathbf{w}$ dizisi (5.7) yi sağlasın. Tanım gereği,

$$\sum_{j=1}^{n} |z_j|^{p^*} \leq \|\mathbf{z}\|_{g(p^*)}^{p^*} \sum_{j=1}^{n} 1$$

ve böylece kısmi toplamlar lemmasından şu bulunur:

$$\sum_{j=1}^{n} |z_j|^{p^*} w_j \leq \|\mathbf{z}\|_{g(p^*)}^{p^*} \sum_{j=1}^{n} w_j. \tag{5.15}$$

Hölder eşitsizliği uygulandığında,

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|\right)^p &= \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|\, w_k^{-1/p^*}\, |z_k|\, w_k^{1/p^*}\right)^p \\ &\leq \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^p w_k^{-(p-1)}\right)\left(\sum_{j=1}^{n} |z_j|^{p^*} w_j\right)^{p-1} \end{aligned} \tag{5.16}$$

görülür. (5.15) ve (5.16) dan şu sonuç çıkar:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} |x_k|\right)^p \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}\left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^p w_k^{-(p-1)}\right) \|\mathbf{z}\|_{g(p^*)}^{p} \left(\sum_{j=1}^{n} w_j\right)^{p-1}.$$

Lemma 5.3 ü uygularsak

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}\|_{ces(p)}^{p} &\leq \left(p^*\|\mathbf{z}\|_{g(p^*)}\right)^p \sum_{n=1}^{\infty}\left(w_n^{p-1} - w_{n+1}^{p-1}\right)\sum_{k=1}^{n} |y_k|^p w_k^{-(p-1)} \\ &\leq \left(p^*\|\mathbf{z}\|_{g(p^*)}\right)^p \sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^p \end{aligned} \tag{5.17}$$

eşitsizliği sağlanır. Buradan şu gösterilir:

$$\|\mathbf{x}\|_{ces(p)} \leq p^*|\mathbf{x}|_p,$$

ve bu da (5.8) in ispatını tamamlar.

(5.8) deki sabitlerin mümkün olan en iyi sabitler olduğunu aşağıdaki gibi görebiliriz: Sol taraf için $\mathbf{x} = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$ alınsın (burada, n. terim 1 dir). Lemma 5.1 i uygulayarak ve $n \to \infty$ limitini alarak sol taraf görülür. Sağ taraf, Hardy eşitsizliğini gerektirir (aşağıdaki sonuca bakınız) ve p^*, Hardy'nin sonucundaki mümkün olan en iyi sabittir.

(5.2) ve (5.3) formundaki her $\mathbf{x}$ için (5.4) teki infimuma tam olarak ulaşılır. Bunu görmek amacıyla $n = 1, 2, \dots$ için $\left\|\mathbf{y}^{(n)}\right\|_p = 1$, $\left\|\mathbf{z}^{(n)}\right\|_{g(p^*)} \leq |\mathbf{x}|_p (1 + 1/n)$ ve $\mathbf{y}^{(n)} \cdot \mathbf{z}^{(n)} = \mathbf{x}$ olacak şekilde $\mathbf{y}^{(n)} \in \ell^p$ ve $\mathbf{z}^{(n)} \in g(p^*)$ seçelim. $\mathbf{y}^{(n)}$ lerin koordinatsal yakınsak bir $\mathbf{y}^{(n_k)}$ alt dizisi vardır. Buna göre $j = 1, 2, \dots$ için $y_j := \lim_{k\to\infty} y_j^{(n_k)}$ alınırsa açık olarak $\mathbf{y} \in \ell^p$, aslında $\|\mathbf{y}\|_p \leq 1$ olur. Benzer şekilde, $\mathbf{z}^{(n_k)}$ lerin $\mathbf{z}$ ye koordinatsal yakınsak bir alt dizisi vardır. Dolayısıyla, $\|\mathbf{z}\|_{g(p^*)} = |\mathbf{x}|_p$ ve $\mathbf{y} \cdot \mathbf{z} = \mathbf{x}$ olmalıdır böylece (5.8) deki infimuma gerçekten ulaşılır.

Az önce yapılan gözlem, $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ olmakdıkça (5.8) in sağ tarafının kesin eşitsizlik olduğunu göstererek Teorem 5.4 ün ispatını bitirmemizi sağlar. Bu, yukarıda seçilen $\mathbf{y}$ ve $\mathbf{z}$ ile yeterliliğin ispatı tekrarlanarak ve (5.7) nedeniyle (5.17) deki eşitsizliğin kesin olduğunu gözlemlenerek yapılır. □

Sonuç 5.5. (Hardy Eşitsizliği) $p > 1$ olmak üzere $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ olmadıkça aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |x_k| \right)^p < (p^*)^p \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p. \tag{5.18}$$

Kanıt. (5.8) in sağ tarafında $\mathbf{y} = \mathbf{x}$ ve $\mathbf{z} = \mathbf{1}$ alınırsa istenen sağlanır. □

Bölüm 6

Hölder Eşitsizliği

$0 < p, q \leq \infty$ olacak şekilde p ve q seçilsin ve s de aşağıdaki şekilde tanımlansın:

$$\frac{1}{s} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}. \tag{6.1}$$

Bir $\mathbf{x}$ dizisinin ℓ^s de olması $\mathbf{y} \in \ell^p$ ve $\mathbf{z} \in \ell^q$ olmak üzere $\mathbf{x} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{z}$ şeklinde çarpanlarına ayrılmasına denktir. Bu gerçek Hölder eşitsizliğinin ve tersinin en iyi bilinen sonucudur.

Bu bölümde $\mathbf{z}$ nin $\sum_{k=1}^{n} |z_k|^q$ kısmi toplamlarının belirli bir oranda büyümesi durumunda benzer bir çarpanlara ayrılış problemi çözülür. Bu problemin şık bir çözümü vardır fakat ispat çok açık değil ve hatta formülasyonu da bazı zorluklar sunmaktadır. Aşağıda verilen yaklaşım mümkün olan en iyi sabitleri bulmamıza yol açar. Alternatif bir çözüm [7] nin III. Kısmının 3. bölümünde bulunabilir. Orada parametrelerin farklı problemleri üzerinde çalışıldı; kanıtlarda gelişmiş fikirler kullanıldı ve bu, sabitler için düşük kestirimlere neden oldu. İki çözümün ayrıntılı karşılaştırılması bölüm sonunda yapılacaktır.

Aşağıdaki gibi çarpanlara ayrılışa sahip $\mathbf{x}$ dizileriyle ilgileneceğiz:

$$\mathbf{z} \in g(\mathbf{a}, q), \ \mathbf{y} \in \ell^p \tag{6.2}$$

olmak üzere

$$\mathbf{x} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{z}. \tag{6.3}$$

Böyle diziler için

$$|\mathbf{x}|_{p;\mathbf{a},q} := \inf\{\|\mathbf{y}\|_p \, \|\mathbf{z}\|_{g(\mathbf{a},q)} \mid \mathbf{y} \in \ell^p, \mathbf{z} \in g(\mathbf{a}, q) \text{ öyle ki } \mathbf{x} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{z}\}. \tag{6.4}$$

Gösterimi tanımlansın.

Teorem 6.1. Bir $\mathbf{x}$ dizisinin (6.2) ve (6.3) teki gibi bir çarpanlara ayrılışı vardır ancak ve ancak

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\sum_{k=n}^{\infty} \frac{|x_k|}{A_k} \right)^{p/s} < \infty \tag{6.5}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada s, (6.1) deki gibi verilmektedir. Ayrıca,

$$|\mathbf{x}|_{p;\mathbf{a},q} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\sum_{k=n}^{\infty} \frac{|x_k|^s}{A_k} \right)^{p/s} \right)^{1/p} \leq \left(\frac{p}{s}\right)^{1/s} |\mathbf{x}|_{p;\mathbf{a},q} \tag{6.6}$$

eşitsizlikleri gerçeklenir. Buradaki sabitlerin her ikisi de en iyidir; gerçekten $\mathbf{x}$ in en fazla bir tane terimi sıfırdan farklı olduğunda sol taraf eşitlik ve $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ olduğunda sağ taraf kesin eşitsizlik olur.

Kanıt. (Gereklilik). İlk olarak $\mathbf{x}$ in sonlu tane sıfırdan farklı terimi olduğunu varsayalım. Bu durumda her $n > N$ için $x_n = 0$ olacak şekilde bir N sayısı vardır ve

$$L := \sum_{n=1}^{N} a_n \left(\sum_{k=n}^{N} \frac{|x_k|^s}{A_k} \right)^{p/s}$$

olarak tanımlansın. Eğer $\mathbf{x}$ yukarıdaki gibi bir çarpanlara ayrılışa sahipse ([7, Lemma 2], sayfa 387) nin ters çevrilmiş versiyonuyla şu görülür:

$$\begin{aligned} L &\leq \frac{p}{s} \sum_{n=1}^{N} a_n \sum_{k=n}^{N} \frac{|x_k|^s}{A_k} \left(\sum_{j=k}^{N} \frac{|x_j|^s}{A_j} \right)^{\frac{p}{s}-1} \\ &= \frac{p}{s} \sum_{k=1}^{N} |y_k|^s \cdot |z_k|^s \left(\sum_{j=k}^{N} \frac{|x_j|^s}{A_j} \right)^{p/q} \end{aligned} \tag{6.7}$$

Hölder eşitsizliğini ve kısmi toplamlar lemmasını uygulayarak

$$\begin{aligned} L &\leq \frac{p}{s} \left(\sum_{k=1}^{N} |y_k|^p \right)^{s/p} \left(\sum_{k=1}^{N} |z_k|^q \left(\sum_{j=k}^{N} \frac{|x_j|^s}{A_j} \right)^{p/s} \right)^{s/q} \\ &\leq \frac{p}{s} \|\mathbf{y}\|_p^s \|\mathbf{z}\|_{g(\mathbf{a},q)}^s \left(\sum_{k=1}^{N} a_k \left(\sum_{j=k}^{N} \frac{|x_j|^s}{A_j} \right)^{p/s} \right)^{s/q} \end{aligned}$$

ve buradan

$$L \leq \frac{p}{s} \|\mathbf{y}\|_p^s \|\mathbf{z}\|_{g(\mathbf{a},q)}^s L^{s/q}$$

bulunur. Ayrıca, L sonlu olduğundan

$$L^{1/p} \leq \left(\frac{p}{s}\right)^{1/s} \|\mathbf{y}\|_p \|\mathbf{z}\|_{g(\mathbf{a},q)} \tag{6.8}$$

sonucunu çıkarırız. (6.2) ve (6.3) ü sağlayan tüm çarpanlara ayrılışlar üzerinden infimum alarak (6.6) nın sağ tarafını elde ederiz. İspatı bitirmek için (6.8) de $N \to \infty$ limiti alınır.

(Yeterlilik). Eğer (6.5) sağlanırsa

$$b_n = \left(\frac{1}{A_n}\sum_{j=1}^{n} a_j \left(\sum_{k=j}^{\infty} \frac{|x_k|^s}{A_k}\right)^{p/q}\right)^{1/p} \tag{6.9}$$

olmak üzere

$$y_n = b_n |x_n|^{s/p} \operatorname{sgn}(x_n) \tag{6.10}$$

ve

$$z_n = \frac{|x_n|^{s/q}}{b_n} \tag{6.11}$$

olarak tanımlandığında $\mathbf{x}$ i aşağıdaki gibi çarpanlara ayırabiliriz:

$$\mathbf{x} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{z}. \tag{6.12}$$

Şimdi, (6.10), (6.9) ve (6.1) den şu sonuç çıkar:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^p &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n|^s}{A_n} \sum_{j=1}^{n} a_j \left(\sum_{k=j}^{\infty} \frac{|x_k|^s}{A_k}\right)^{p/q} \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} a_j \left(\sum_{n=j}^{\infty} \frac{|x_n|^s}{A_n}\right)^{p/s}. \end{aligned} \tag{6.13}$$

Öte yandan (6.9) ve (6.11) dan

$$z_n^q = \frac{|x_n|^s}{\left(\frac{1}{A_n}\sum_{j=1}^{n} a_j \left(\sum_{k=j}^{\infty} \frac{|x_k|^s}{A_k}\right)^{p/q}\right)^{q/p}}$$

bulunur. Payda, j. noktada $\frac{a_j}{A_n}$ ölçüsüne sahip n noktalı $\{1, 2, \ldots, n\}$ olasılıklar uzayı üzerindeki $\sum\limits_{k=j}^{\infty} \frac{|x_k|^s}{A_k}$ fonksiyonunun $L^{p/q}$-normu olarak yorumlanabilir. Bu normu daha küçük harmonik ortalama ([17, Theorem 16]) ile değiştirerek

$$z_n^q \leq \frac{|x_n|^s}{A_n} \sum_{j=1}^{n} a_j \left(\sum_{k=j}^{\infty} \frac{|x_k|^s}{A_k}\right)^{-1}$$

sonucuna varırız. Sonuç olarak, $m = 1, 2, \ldots$ için

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{m} z_n^q &\leq \sum_{n=1}^{m} \frac{|x_n|^s}{A_n} \sum_{j=1}^{n} a_j \left(\sum_{k=j}^{\infty} \frac{|x_k|^s}{A_k} \right)^{-1} \\
&= \sum_{n=1}^{m} a_j \sum_{n=j}^{m} \frac{|x_n|^s}{A_n} \left(\sum_{k=j}^{\infty} \frac{|x_k|^s}{A_k} \right)^{-1} \\
&\leq \sum_{j=1}^{m} a_j
\end{aligned}$$

öyle ki

$$\|\mathbf{z}\|_{g(\mathbf{a},q)} \leq 1 \tag{6.14}$$

bulunur. (6.12), (6.13) ve (6.14) den (6.6) nin sol tarafı sağlanır.

(6.6) nın solundaki sabit mümkün olan sabitlerin en iyisidir. Çünkü, $\mathbf{x}$ sıfırdan farklı sadece bir terime sahip olduğunda eşitlik sağlanır. Sağdaki sabit de mümkün olan sabitlerin zayıf anlamda en iyisidir. Kesinlik olarak $\left(\frac{p}{s}\right)^{1/s}$ değerinden daha küçük bir değer yoktur ki $\mathbf{a}$ nın her seçimi için (6.6) yı sağlansın. Bu şöyle görülebilir: Örneğin $\mathbf{a} = \mathbf{1}$ olduğunda $k = 1, \ldots, N$ için $x_k = k^{-1/p}$ ve diğer durumlarda $x_k = 0$ alınarak $\mathbf{y}$=$\mathbf{x}$ ve $\mathbf{z}$=$\mathbf{1}$ olarak seçildiğinde $N \to \infty$ limiti alınır. Öte yandan, $\mathbf{a} = (1, 0, 0, \ldots)$ olduğunda Teorem 6.1, Hölder eşitsizliğine indirgenir ve uygun sabit 1 dir. Belirtilmiş her $\mathbf{a}$ için (6.6) nın sağındaki en iyi sabiti belirleme probleminin çetin olduğu görülür.

Teoremin son cümlesi Teorem 5.4 ün ispatından gelir. Yalnız, (6.4)'teki infimumun aslında minimum olduğu ve (6.7) eşitsizliğin $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ olmadıkça kesin olduğu görülür. (6.6) nın solundaki eşitlik durumlarının tam olarak teoremde belirtildiği gibi olması bir sanıdır. $\square$

Hölder eşitsizliği ile doğal olarak bağlantılı olan başka bir çarpanlara ayrılış problemi vardır. Problem şudur: $\mathbf{y} \in \ell^p$ ve $\mathbf{z}$ nin kuyrukları, $(\sum_{k=n}^{\infty} |z_k|^q)$, öngörülen oranda azalan olmak üzere $\mathbf{y} \cdot \mathbf{z}$ çarpımları olarak ifade edilen $\mathbf{x}$ dizilerini belirlemektir. Azalma, negatif olmayan terimlerden oluşan $\sum a_k$ yakınsak serisinin sabitlenmesi bakımından belirtilmektedir. Buna göre $\alpha_n = \sum_{k=n}^{\infty} a_k$, $(n = 1, 2, \ldots)$ alınır ve

$$\gamma(\mathbf{a}, q) = \left\{ \mathbf{z} : \sum_{k=n}^{\infty} |z_k|^q = O(\alpha_n) \right\}$$

tanımlanır.

Sonuç 6.2. Bir $\mathbf{x}$ dizisinin $\mathbf{y} \in \ell^p$ ve $\mathbf{z} \in \gamma(\mathbf{a}, q)$ olmak üzere $\mathbf{x} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{z}$ çarpanlara ayrılışına sahip olması ancak ve ancak aşağıdaki koşulun sağlanması ile mümkündür:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{|x_k|^s}{\alpha_k} \right)^{p/s} < \infty \tag{6.15}$$

Kanıt. Teorem 6.1 in ispatına benzer bir doğrudan ispat verilebilir. Yine de (6.6) dan (6.15) i çıkarmak daha kolaydır. Bu, ilk olarak $\mathbf{x}$ dizisinin sonlu tane sıfırdan farklı terime sahip olduğu varsayılarak ($k > N$ ise $x_k = 0$) ve $x_1, \ldots, x_N$; $y_1, \ldots, y_N$; $z_1, \ldots, z_N$; $a_1, \ldots, a_N$ dizilerinin her biri ters sırada yazılarak yapılır. Genel durum $N \to \infty$ limiti alınarak elde edilir. □

(6.15) için (6.6) ile aynı sabitlere sahip ve bu sabitler mümkün olanların en iyisi olduğu bir versiyon vardır. Teorem (6.1) in eşitlik durumuyla ilgili son cümlesi geçerli değildir.

Bu bölümün sonuçları, [7] deki kısm III ün 3. bölümündekilerle karşılaştırılmalıdır. Orada da Hölder çarpanlara ayrılış problemimiz çözüldü ancak kullanılan yöntemler biraz dolaylıdır ve onlar ilgili sabitler için kesin tahminler sağlayamazlar. Örneğin, [7] deki Theorem 4, $\mathbf{y} \in \ell^p$ ve $\mathbf{z} \in g(\mathbf{a}, q)$ olmak üzere $\mathbf{x}$ dizisinin $\mathbf{x} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{z}$ biçiminde çarpanlara ayrılabileceğini tam olarak

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^s \left(\frac{1}{A_n} \sum_{k=1}^{n} |x_k|^s \right)^{p/q} < \infty \tag{6.16}$$

sağlandığında gerçekleneceğini gösterir. İspatın analizi şunu ortaya koyar:

$$\left(\frac{s}{p}\right)^{1/p} |x|_{p;\mathbf{a},q} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^s \left(\frac{1}{A_n} \sum_{k=1}^{n} |x_k|^s \right)^{p/q} \right)^{1/p} \leq \left(\frac{p}{s}\right)^{1/p} \left(\frac{q}{s}\right)^{1/q} |x|_{p;\mathbf{a},q}. \tag{6.17}$$

(6.5) ve (6.16) nın eş değer koşullar olduğu elde edilir. Fakat bu eş değerliğin basit ve doğrudan kanıtını veremeyiz. Özellikle iki taraflı ilgili eşitsizliklerdeki en iyi sabitleri bilmiyoruz. Bölüm 11 de

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\sum_{k=n}^{\infty} \frac{|x_k|^s}{A_k} \right)^{p/s} \leq \frac{p}{s} \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^s \left(\frac{1}{A_n} \sum_{k=1}^{n} |x_k|^s \right)^{p/q} \tag{6.18}$$

ve p/s sabitinin mümkün olan en iyi sabit olduğu gösterilecektir. Böylece (6.6) nın sol tarafı (6.17) nin sol tarafından daha güçlüdür. Kanıtımız, ne yazık ki yalnızca $p \leq q$ olduğunda çalışır.

Bölüm 7

Copson Uzayı

Bu bölümde $0 < p < \infty$ olmak üzere aşağıdaki gibi tanımlanan $cop\,(p)$ uzayları incelenecektir:

$$cop\,(p) = \left\{ \mathbf{x} \colon \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=n}^{\infty} \frac{|x_k|}{k} \right)^p < \infty \right\}. \tag{7.1}$$

$p \geq 1$ için

$$\|\mathbf{x}\|_{cop(p)} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=n}^{\infty} \frac{|x_k|}{k} \right)^p \right)^{1/p} \tag{7.2}$$

biçiminde tanımlanan $\|\cdot\|_{cop(p)}$-normu altında bu uzaylar BK-uzaylarıdır. Aşağıdaki eşitsizliği ispatlayan Capson'un [11] şerefine bu terminolijiyi kullanırız:

$$\|\mathbf{x}\|_{cop(p)} \geq p\|\mathbf{x}\|_p \quad (0 < p \leq 1) \tag{7.3}$$

ve dolayısıyla

$$cop\,(p) \subseteq \ell^p \quad (0 < p \leq 1) \tag{7.4}$$

içermesi görülür. $p \geq 1$ olduğunda, bu eşitsizliklerin tersine çevrildiği tamamlayıcı bir sonuç vardır:

$$\ell^p \subseteq cop\,(p)\,; \quad \|\mathbf{x}\|_{cop(p)} \leq p\|\mathbf{x}\|_p. \tag{7.5}$$

(7.5) in sol tarafı en azından $p = 2$ olduğunda Hardy [14] tarafından keşfedilmiştir. Yine de tüm $p > 0$ değerleri için (7.1) ve (7.2) gösterimlerini kullanacağız.

Buradaki amacımız $cop\,(p)$ uzaylarını karakterize ederek (7.3)-(7.5) in geliştirilmiş versiyonlarını elde etmektir. İlk olarak $p > 1$ durumunu ele alacağız çünkü bu durum $0 < p \leq 1$ durumundan daha kolaydır.

Teorem 7.1. $p > 1$ olsun. $\mathbf{x}$ dizisi $cop(p)$ uzayına aittir ancak ve ancak (5.3) ve (5.2) deki gibi bir çarpanlara ayrılışa sahiptir. Bu durumda

$$|\mathbf{x}|_p \leq \|\mathbf{x}\|_{cop(p)} \leq p|\mathbf{x}|_p \tag{7.6}$$

sağlanır. (7.6) daki sabitlerin her ikisi de mümkün olanların en iyisidir. $\mathbf{x}$, sıfır olmayan en fazla bir terime sahipse sol tarafta eşitlik vardır ve sadece $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ olduğunda sağ tarafta eşitlik vardır.

Kanıt. Teorem 6.1 de $\mathbf{a} = \mathbf{1}$ ve $q = p^*$ alındığında ispat tamamlanır. □

Teorem 6.1 ve 7.1 birlikte düşünüldüğünde

$$cop(p) = ces(p), \quad (p > 1) \tag{7.7}$$

eşitliği görülür. Altta yatan eşitsizliklerin, (5.18) ve (7.5), yer değiştirme yoluyla eşdeğer olması gerçeğine rağmen bu sonuç bir şekilde şaşırtıcıdır. Nitekim, (5.18) ve (7.5) sadece $\ell^p \subseteq ces\,(p)$ ve $\ell^p \subseteq cop\,(p)$ içermelerini verir; denklikleri (7.7) den çıkar ancak tersi doğru değildir.

Copson eşitsizliğinin (6.7) deki versiyonu Teorem 6.1 den gelirken Hardy'ninkinin gelmemesi ilginçtir. Hardy'nin sonucunun basit bir versiyonu elde etmek için bile (6.6) veya (6.15) te $\mathbf{a}$ için hangi seçimin yapılacağını görmek zordur.

Teorem 7.2. $0 < p < 1$ olsun. Bir $\mathbf{x}$ dizisi $cop(p)$ ye aittir ancak ve ancak aşağıdaki çarpanlara ayrılışı kabul eder:

$$\mathbf{x} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{z} \tag{7.8}$$

burada $\mathbf{y} \in \ell^1$ ve $\mathbf{z}$, bir $w \in \ell^{p/(1-p)}$ dizisinin harmonik ortalamalarının dizisidir. Tam olarak

$$\|\mathbf{x}\|_{cop(p)} = \inf \|\mathbf{y}\|_1 \|\mathbf{w}\|_{\frac{p}{1-p}} \tag{7.9}$$

infimum, $\mathbf{x} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{z}$ ve

$$z_n = \frac{n}{\frac{1}{w_1} + \cdots + \frac{1}{w_n}} \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{7.10}$$

olacak şekilde $\mathbf{y} \in \ell^1$, $\mathbf{w} \in \ell^{p/(1-p)}$ elemanları üzerinden alınır.

Kanıt. Eğer $\mathbf{x} \in cop(p)$ ise aşağıdaki ayarlamalar yapıldığında istenen çarpanlara ayrılış sağlanır:

$$y_n = \frac{x_n}{n} \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=j}^{\infty} \frac{|x_k|}{k} \right)^{p-1} \tag{7.11}$$

ve

$$z_n = \frac{n}{\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=j}^{\infty} \frac{|x_k|}{k} \right)^{p-1}}. \tag{7.12}$$

Buradan $\mathbf{y} \in \ell^1$ bulunur. Gerçekten,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{y}\|_1 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n|}{n} \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=j}^{\infty} \frac{|x_k|}{k} \right)^{p-1} \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{n=j}^{\infty} \frac{|x_n|}{n} \right)^{p} \\ &= \|\mathbf{x}\|_{cop(p)}^{p}. \end{aligned} \tag{7.13}$$

Diğer taraftan,

$$w_n = \left(\sum_{k=n}^{\infty} \frac{|x_k|}{k} \right)^{1-p} \tag{7.14}$$

olarak tanımlandığında

$$z_n = \frac{n}{\frac{1}{w_1} + \cdots + \frac{1}{w_n}} \tag{7.15}$$

ve $\mathbf{w} \in \ell^{\frac{p}{1-p}}$ olur çünkü

$$\|\mathbf{w}\|_{\frac{p}{1-p}} = \|\mathbf{x}\|_{cop(p)}^{1-p}. \tag{7.16}$$

(7.11)-(7.16) dan şu sonucu çıkarırız:

$$\inf\{\|\mathbf{y}\|_1 \|\mathbf{w}\|_{\frac{p}{1-p}} : \mathbf{x} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{z}\} \leq \|\mathbf{x}\|_{cop(p)}. \tag{7.17}$$

Tersine, $\mathbf{x}$, teoreminde tanımlanan tipte bir çarpanlara ayrılışa sahipse

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=n}^{\infty}\frac{|x_k|}{k}\right)^p &= \sum_{n=1}^{\infty}|w_n|^p\left(\frac{1}{|w_n|}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{|x_k|}{k}\right)^p \\ &\leq \|\mathbf{w}\|^p_{\frac{p}{1-p}}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{|w_n|}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{|x_k|}{k}\right)^p \\ &= \|\mathbf{w}\|^p_{\frac{p}{p-1}}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|x_k|}{k}\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{|w_n|}\right)^p \\ &\leq \|\mathbf{w}\|^p_{\frac{p}{p-1}}\left(\sum_{k=1}^{\infty}|y_k|\right)^p \qquad (7.18)\end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır buradan

$$\|\mathbf{x}\|_{cop(p)} \leq \inf\{\|\mathbf{y}\|_1\|\mathbf{w}\|_{\frac{p}{1-p}} : \mathbf{x} = \mathbf{y}\cdot\mathbf{z}\} \qquad (7.19)$$

görülür. Böylece, (7.17) ve (7.19), (7.9) u verir. □

$\mathbf{y}$ ve $\mathbf{z}$, (7.11) ve (7.12) de olduğu gibi seçildiğinde (7.9) deki infimuma ulaşılır. Aslında seçim tek türlüdür (skaler katların modulüne göre) çünkü

$$w_n^{\frac{p}{1-p}} \text{ ve } \frac{1}{w_n}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{|x_k|}{k}$$

dizileri orantılı olmadığı müddetçe (7.18) deki eşitsizlik kesindir. Bu $\mathbf{w}$ dizini (7.14) deki dizinin bir skaler katı olmaya zorlar.

Teorem 7.2 önceki sonuçlarımızdan farklıdır çünkü geliştirilmek istenen klasik eşitsizlikleri kolayca gerektirmez. Bununla birlikte Copson'un sonucunun (7.4) deki basit versiyonunu çıkarabiliriz. Bunu yapmak için Carlemon'ın [9] aşağıdaki çarpıcı eşitsizliğini hatırlayalım:

$$\sum_{n=1}^{\infty}|x_1\cdots x_n|^{1/n} \leq e\sum_{n=1}^{\infty}|x_n| \qquad (7.20)$$

ki bu geometrik ortalama "operatörünün",

$$GM(\mathbf{x}) = \left(|x_1|, |x_1x_2|^{1/2}, \ldots\right) \qquad (7.21)$$

ℓ^1 uzayını kendi içine resmettiğini ve normunun e den küçük eşit olduğunu söyler. (7.20) deki x_k yı $|x_k|^p$ ile değiştirerek GM nin ℓ^p yi ℓ^p ye götürdüğünü ve normunun

$e^{1/p}$ den küçük olduğunu görürüz $(0 < p < \infty)$, ve harmonik ortalama operatörün HM de aynısını yapar. (4.12) 'ü hatırlayarak Teorem 7.17 den

$$\begin{aligned} cop\,(p) &= \ell^1 \cdot HM\left(\ell^{\frac{p}{1-p}}\right) \\ &\subseteq \ell^1 \cdot \ell^{\frac{p}{1-p}} \\ &= \ell^p \end{aligned}$$

elde edilir ki bu (7.4) tür. Bununla birlikte bu içerme ile ilişkili $e^{1/p}$ sabiti en iyi değildir ve Copson eşitsizliğinin keskin versiyonunu (7.3) elde etmek için ℓ^p üzerindeki HM operatörünün normunu belirlemek zorundayız. Bu $p < 0$ için bir ℓ^p-eşitsizliği olarak görülebilir. Bölüm 9 da basit bir dualite argümanı ile bu çözülmüştür. $0 < p < 1$ durumunda dualite sonucu ilk olarak bölüm 8 de tartışılmıştır.

Bölüm 8

İki Teknik

$p \geq 1$ olmak üzere ℓ^p uzayları teorisindeki iki önemli sonucun (Schur testi ve Hellinger-Toeplitz dualite teoremi), $p < 1$ olduğunda da nasıl uygulanabileceği incelenecektir. İhtiyaç duyulan değişiklikler rutin türdendir ve daha önce fark edilmemiş olmaları biraz şaşırtıcıdır. Orijinal sonuçların kendisi Hölder eşitsizliğinin basit uygulamalarıdır (yaratıcı olsa da) ve her ikisi de Hölder'in temel formülünün muazzam gücünü göstermeye hizmet etmektedir.

Önerme 8.1. (Schur) $1 < p < \infty$ ve A, terimleri negatif olmayan bir matris olsun. Eğer

$$\sup_n \sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k} = R < \infty$$

ve

$$\sup_k \sum_{n=1}^{\infty} a_{n,k} = C < \infty$$

ise A, ℓ^p yi ℓ^p içine götürür ve $\|A\|_{p,p} \leq R^{1/p^*} C^{1/p}$ eşitsizliği sağlanır.

Önerme 8.2. (Hellinger-Toeplitz) $1 \leq p, q \leq \infty$ olsun. A, ℓ^p yi ℓ^q içine götürür, gerek ve yeter şart A^t (transpoz matris), ℓ^{q^*} yi ℓ^{p^*} içine götürür. Bu durumda $\|A\|_{p,q} = \|A^t\|_{q^*,p^*}$ olur.

"$p > 1$" den "$p < 1$" e geçiş yaptığımızda eşitsizliklerin yön değiştirmesini bekleriz (bakınız [17] §9.13). Bu nedenle $\|A\|_{p,q}$ yerine aşağıdaki gibi verilen alt sınır L'yi göz önüne alırız:

$$\|A\mathbf{x}\|_q \geq L\|\mathbf{x}\|_p. \tag{8.1}$$

Eşitsizlik (8.1), negatif olmayan tüm $\mathbf{x}$ dizileri için geçerlidir ve $L = L(A, p, q)$ nin mümkün olan en büyüğünü ararız. İlgimizi negatif olmayan terimlere sahip A matrislerine ve $\mathbf{x}$ dizilerine kısıtlayacağız yani sadece temel eşitsizlikleri dikkate alacağız.

Önce $q = p$ alarak Schur testini ele alırız. Bu kısıtlama gerekli değildir, sonucumuzun ağırlıklı versiyonları da mümkündür ancak biz sadece ihtiyaç duyduklarımızı ifade ve ispat edeceğiz.

Önerme 8.3. $0 < p < 1$ ve A, terimleri negatif olmayan bir matris olsun. Eğer

$$\sup_n \sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k} = R > 0 \tag{8.2}$$

ve

$$\inf_k \sum_{n=1}^{\infty} a_{n,k} = C \tag{8.3}$$

ise aşağıdaki eşitsizlikle birlikte (8.1) gerçeklenir:

$$L \geq R^{1/p^*} C^{1/p}. \tag{8.4}$$

Kanıt. Hölder eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k} x_k^p &= \sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k}^{1-p} (a_{n,k} x_k)^p \\
&\leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k} \right)^{1-p} \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k} x_k \right)^p \\
&\leq R^{1-p} \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k} x_k \right)^p \qquad (8.5)
\end{aligned}$$

bulunur ve buradan

$$\begin{aligned}
R^{1-p} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k} x_k \right)^p &\geq \sum_{k=1}^{\infty} x_k^p \sum_{n=1}^{\infty} a_{n,k} \\
&\geq C \sum_{k=1}^{\infty} x_k^p
\end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır ki bu da (8.4) e eşdeğerdir. □

Aşağıdaki Hellinger-Toeplitz'in benzer bir sonucudur.

Önerme 8.4. $0 < p, q < 1$ ve A, terimleri negatif olmayan bir matris olsun. Bu durumda, negatif olmayan her $\mathbf{x}$ için

$$\|A\mathbf{x}\|_q \geq L\|\mathbf{x}\|_p \tag{8.6}$$

sağlanır gerek ve yeter koşul negatif olmayan her $\mathbf{y}$ için

$$\left\|A^t\mathbf{y}\right\|_{p^*} \geq L\left\|\mathbf{y}\right\|_{q^*} \tag{8.7}$$

gerçeklenir. Eğer (8.6), $\mathbf{x}=\mathbf{0}$ dışında kesin ise (8.7) de $\mathbf{y}=\mathbf{0}$ dışında kesindir; tersin sağlanması gerekmez.

Kanıt. Aşağıda tüm dizilerin negatif olmayan terimlere sahip olduğu varsayılmaktadır. İlk olarak şunu gözlemleyelim: $0 < t < 1$ veya $t < 0$ ise

$$\|\mathbf{u}\|_t = \inf\left\{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle : \|\mathbf{v}\|_{t^*} \geq 1\right\} \tag{8.8}$$

burada $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} u_k v_k$ olarak tanımlanır.

$\mathbf{u}$ nun terimlerinin tümü pozitif ise özdeşlik, Hölder eşitsizliği ve tersinin yanlızca tekrar ifade edilmesidir. Bu durumda $k = 1, 2, \ldots$ için $\tilde{v}_k = u_k^{t-1}$ olmak üzere infimumuma $\mathbf{v} = \tilde{\mathbf{v}}/\|\tilde{\mathbf{v}}\|_{t^*}$ noktasında ulaşılır. Öte yandan, en az bir $u_k = 0$ ise $t < 0$ olduğunda özdeşlik açıktır çünkü (7.12) nin her iki tarafı da sıfırdır. Ancak $0 < t < 1$ olduğunda infimuma ulaşılamaz. Özdeşlik

$$v_k = \begin{cases} u_k^{t-1}, & u_k > 0 \\ \left(\frac{\varepsilon}{2^k}\right)^{1/t^*}, & u_k = 0 \end{cases}$$

tanımlanarak ve $\varepsilon \searrow 0$ alınarak ispatlanır.

(8.8) i iki kez uyguladığımızda şu görülür:

$$\begin{aligned} \inf_{\|\mathbf{x}\|_p \geq 1} \|A\mathbf{x}\|_q &= \inf_{\|\mathbf{x}\|_p \geq 1} \inf_{\|\mathbf{y}\|_{q^*} \geq 1} \langle A\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle \\ &= \inf_{\|\mathbf{y}\|_{q^*} \geq 1} \inf_{\|\mathbf{x}\|_p \geq 1} \left\langle \mathbf{x}, A^t\mathbf{y}\right\rangle \\ &= \inf_{\|\mathbf{y}\|_{q^*} \geq 1} \left\|A^t\mathbf{y}\right\|_{p^*} \end{aligned}$$

ve (8.6) ve (8.7) nin denkliği açıktır. Önermenin son cümlesi, (8.8) deki infimuma ulaşılmasıyla ilgili yapılan açıklamalardan çıkar. $\square$

Önerme 8.3 ve 8.4 Hausdorff matrisleri sınıfına uygulanayabilir. Hausdorff matrisi, $h_{n,k}$ $(n, k = 0, 1, \ldots)$, aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$h_{n,k} = \begin{cases} \binom{n}{k}\Delta^{n-k}\mu_k, & k \leq n \\ 0, & k > n \end{cases} \tag{8.9}$$

burada $\boldsymbol{\mu} = (\mu_0, \mu_1, ...)$ bir gerçek sayılar dizisi öyle ki $\mu_0 = 1$ ve Δ fark operatörüdür:

$$\Delta\mu_k = \mu_k - \mu_{k+1}. \tag{8.10}$$

Hausdorff matrislerinin teorisi [16] ve [28] de açıklanmıştır.

Yalnızca negatif olmayan terimlere sahip matrislerle ilgileneceğiz. Bu nedenle $\boldsymbol{\mu}$ bir tamamen monoton dizi, yani

$$\Delta^n\mu_k \geq 0 \qquad (n, k = 0, 1, \ldots) \tag{8.11}$$

sağlanacak şekilde alınır. Hausdoff'un temel teoremine ([18]) göre (8.11), tam olarak $\boldsymbol{\mu}$ bir moment dizi olduğunda gerçeklenir:

$$\mu_k = \int_0^1 \theta^k \, d\mu(\theta) \qquad (k = 0, 1, \ldots) \tag{8.12}$$

burada $d\mu(\theta)$, $[0, 1]$ üzerinde bir Borel olasılık ölçüsüdür. Böylece (8.9), eşdeğer bir biçimde aşağıdaki gibi yeniden yazılabilir:

$$h_{n,k} = \begin{cases} \binom{n}{k} \int_0^1 \theta^k \, (1-\theta)^{n-k} \, d\mu(\theta), & k \leq n \\ 0, & k > n \end{cases} \tag{8.13}$$

$d\mu(\theta)$, Lebesque ölçüsü olarak alınırsa C, Cesàro matrisi elde edilir. Böylece aşağıdaki Teorem 8.5 Copson eşitsizliğinin (7.3), bir genişlemesidir. Diğer seçimler; $\mu(\theta) = 1-(1-\theta)^\alpha$ için (C, α), α mertebeli Cesàro matrisi, $\Gamma(\alpha)d\mu(\theta) = |\log\theta|^{\alpha-1}\, d\theta$ için α mertebeli Hölder matrisi ve $d\mu(\theta)$, $\theta = \alpha$ noktasındaki değer için (E, α) Euler matrisi elde edilir. Bu matris sınıfları için alt sınır problemi (8.1) tamamen çözülmüş olur.

Teorem 8.5. $0 < p \leq 1$ ve (H, μ) Hausdorff matrisi (8.13) olsun. Bu durumda negatif olmayan terimlere sahip her $\mathbf{x}$ dizisi için

$$\left\|H^t\mathbf{x}\right\|_p \geq \left(\int_0^1 \theta^{\frac{1-p}{p}} \, d\mu(\theta)\right) \|\mathbf{x}\|_p \tag{8.14}$$

gerçeklenir. Sabit mümkün olanın en iyisidir ve (8.14) te eşitlik yalnızca $\mathbf{x}$=$\mathbf{0}$ veya $p = 1$ veya $H = I$ olduğunda sağlanır.

Kanıt. Teorem ilk olarak Euler matrisi için ispatlanır ve daha sonra standart bir ortalama tekniği ile genel durum çıkarılır.

Eğer $H = E_\alpha$ ise H^t nin satır toplamları hep $1/\alpha$ ya eşittir ve sütun toplamları 1 dir. Önerme 8.3 ü uygulayarak $L \geq \alpha^{\frac{1-p}{p}}$ ki bu 8.14 tür. Genel durum Minkowski eşitsizliği uygulanarak gelir:

$$\begin{aligned}
\left\|H^t\mathbf{x}\right\|_p &= \left\|\int_0^1 (E,\alpha)^t\, \mathbf{x}\, d\mu(\alpha)\right\|_p \\
&\geq \int_0^1 \left\|(E,\alpha)^t\, \mathbf{x}\right\|_p d\mu(\alpha) \\
&\geq \left(\int_0^1 \alpha^{\frac{1-p}{p}}\, d\mu(\alpha)\right) \|\mathbf{x}\|_p. \qquad (8.15)
\end{aligned}$$

Daha sonra (8.14) teki sabitin mümkün olan en iyi sabit olduğunu göstereceğiz. $p = 1$ olduğu zaman bu açıktır çünkü eşitsizlik bir özdeşliğe indirgenir. Ancak genel durum daha zordur ve farklı şekilde ilerlemeliyiz.

$\rho > 1/p$ ve $n \geq p$ olacak şekilde n tamsayısı ve ρ seçilsin. H^t matrisini aşağıda tanımlanan $\mathbf{x}$ dizisine uygulayalım:

$$x_k = \begin{cases} 0, & k < n \\ \binom{k-\rho}{k-n} / \binom{k}{n}, & k \geq n. \end{cases} \qquad (8.16)$$

$k \to \infty$ iken $x_k = \dfrac{(k-\rho)\cdots(n+1-\rho)}{k\cdots(n+1)} \sim k^{-\rho}$ olduğundan $\mathbf{x} \in \ell^p$ bulunur.

Daha sonra, eğer $m \geq n$ ise,

$$\left(H^t\mathbf{x}\right)_m = x_m \int_0^1 \theta^{\rho-1}\, d\mu(\theta) \qquad (8.17)$$

olur. Bunu görmek için şunu not edelim:

$$\begin{aligned}
\frac{\theta^{\rho-1}}{\theta_m} &= (1-(1-\theta))^{\rho-m-1} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+m-\rho}{k} (1-\theta)^k \\
&= \sum_{k=m}^{\infty} \binom{k-\rho}{k-m} (1-\theta)^{k-m} \\
&= \sum_{k=m}^{\infty} \frac{\binom{k}{m}\binom{k-\rho}{k-n}\binom{m}{n}}{\binom{k}{n}\binom{m-\rho}{m-n}} (1-\theta)^{k-m},
\end{aligned}$$

buradan şu sonuç çıkar:

$$\sum_{k=m}^{\infty}\binom{k}{m}\theta^{m}(1-\theta)^{k-m}\frac{\binom{k-\rho}{k-n}}{\binom{k}{n}}=\theta^{p-1}\frac{\binom{m-\rho}{m-n}}{\binom{m}{n}}. \tag{8.18}$$

(8.18) i $d\mu(\theta)$ ya göre integre ettiğimizde (8.17) elde edilir. (8.17) den şu çıkarılır:

$$\begin{aligned}\left\|H^{t}\mathbf{x}\right\|_{p}^{p}&=\sum_{m=0}^{n-1}\left(\sum_{k=m}^{\infty}h_{k,m}x_{k}\right)^{p}+\sum_{m=n}^{\infty}\left(H^{t}\mathbf{x}\right)_{m}^{p}\\&\leq n\sup_{k,m}\left|h_{k,m}\right|^{p}\left\|\mathbf{x}\right\|_{1}^{p}+\left(\int_{0}^{1}\theta^{p-1}\,d\mu(\theta)\right)^{p}\left\|\mathbf{x}\right\|_{p}^{p}.\end{aligned}$$

Ayrıca, $\rho\to 1/p$ limiti $\left\|\mathbf{x}\right\|_{p}\to\infty$ ve

$$\frac{\left\|H^{t}\mathbf{x}\right\|}{\left\|\mathbf{x}\right\|_{p}}\leq\int_{0}^{1}\theta^{\frac{1-p}{p}}\,d\mu(\theta)$$

olmasını getirir. Buradan 8.14 teki sabitin kesin olduğu görülür.

Son olarak, (8.14) teki eşitlik durumlarına bakacağız. $p=1$ durumu yukarıda yapıldığından yalnızca $0<p<1$ durumunu ele alacağız.

(7.20) de μ nün ölçüsünün 1 olduğu bir S kümesinde

$$\sum_{k=n}^{\infty}\binom{k}{n}\alpha^{n}\left(1-\alpha\right)^{k-n}x_{k}=f(n)g(\alpha) \tag{8.19}$$

biçiminde olmadıkça kesin bir eşitsizlik vardır. S sonsuzsa (8.19) dan $n=1,2,\ldots$ ve sonsuz tane α için

$$\alpha^{n}f\left(0\right)\sum_{k=n}^{\infty}\binom{k}{n}(1-\alpha)^{k-n}x_{k}=f(n)\sum_{k=0}^{\infty}\left(1-\alpha\right)^{k}x_{k} \tag{8.20}$$

elde ederiz. Bu (8.20) deki tüm kuvvet serilerinin özdeş katsayılara sahip olmasını gerektirir ve böylece $\mathbf{x}=\mathbf{0}$ olur. Eğer S sonluysa $S=\{\alpha_{1},\ldots\alpha_{N}\}$ ve $\mu\left(\alpha_{j}\right)=\nu_{j}$ olarak alınırsa $H=\nu_{1}\left(E,\alpha_{1}\right)+\cdots+\nu_{N}\left(E,\alpha_{N}\right)$ bulunur. (8.5) te $A=H^{t}$ olmak üzere en az bir $\mathbf{c}$ için

$$a_{n,k}x_{k}=c_{n}a_{n,k} \tag{8.21}$$

olmadıkça eşitsizlik kesindir. (8.21) den $A=I$ veya $\mathbf{x}=\mathbf{0}$ sonucu çıkar. $\square$

Teorem 8.5, Hölder ve Euler matrislerine uygulandığında $(H,\alpha)^{t}$ nın alt sınırının p^{α} ve $(E,\alpha)^{+}$ nin alt sınırının $\alpha^{-1/p^{*}}$ olduğunu görülür. Ayrıca, $(H,\alpha)\left(H,\beta\right)=(H,\alpha+\beta)$ ve $(E,\alpha)\left(E,\beta\right)=(E,\alpha\beta)$ formülleri kullanıldığında yukarıdaki sonuçlar aşağıdaki genel hadiseyi gösterir.

Sonuç 8.6. $(H,\mu)^t$ ve $(H,\nu)^t$ iki tranpoze Hausdorff matris ise çarpımlarının alt sınırı ($0 < p \leq 1$ için ℓ^p üzerinde) alt sınırlarının çarpımıdır.

Kanıt. Herhangi A, B matris çifti için $L\,(A,B) \geq L\,(A)\,L\,(B)$ olduğu açıktır. Aşağıdaki eşitsizliği göstereceğiz:

$$L\left((H,\mu)^t(H,\nu)^t\right) \leq \int_0^1 \alpha^{\frac{1-p}{p}}\,d\mu(\alpha) \int_0^1 \beta^{\frac{1-p}{p}}\,d\nu(\beta), \tag{8.22}$$

ve böylece (8.14) den istenen sonuç gelir. (8.22) yi kanıtlamak için (8.18) deki θ yı $\alpha\beta$ ile değiştirelim:

$$\left((E,\alpha)^t(E,\beta)^t\mathbf{x}\right)_m = \left((E,\theta)^t\mathbf{x}\right)_m = (\alpha\beta)^{p-1}x_m$$

burada $\mathbf{x}$ dizisi (8.16) ile verilir. Burada $d\mu(\alpha)d\nu(\beta)$ integrali alınırsa

$$\left((H,\mu)^t(H,\nu)^t\mathbf{x}\right)_m = x_m \int_0^1 \alpha^{p-1}\,d\mu(\alpha) \int_0^1 \beta^{p-1}\,d\nu(\beta)$$

bulunur. $\rho \to 1/p$ alındığında tıpkı Teorem 8.5 in ispatında olduğu gibi (8.22) nin sağlandığı görülebilir. □

Teorem 8.5, $0 < p \leq 1$ için Hardy'nin iyi bilinen eşitsizliğinin bir benzeridir [15]. Buradaki sonuç ile Hardy'ninki arasındaki temel fark kanıttaki sabitin mümkün olanın en iyisi olmasındadır. $0 < p \leq 1$ olduğunda Hardy'nin argümanları geçerli görünmemektedir; bunun yerine Euler matrislerinin özyapısını kullanırız. Temel gerçek [21, Teorem 1] şudur:

$$y_k = \binom{k-\rho}{k} \qquad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

şeklinde tanımlanan $\mathbf{y}$ dizisinin $(E,\theta)^t$ nin θ^{p-1} öz değerine karşılık gelen bir öz vektör olmasıdır. Bu gözlem $p \geq 1$ olduğunda doğrudan uygulanır ve Hardy'nin sonucunun çok basit bir kanıtını verir. Ayrıca $p \geq 1$ için Sonuç 8.6 nın benzeri olan [8, Teorem 9] nin kanıtını basitleştirmek için de kullanılır. Ne yazık ki $p \leq 1$ (ve $\rho > 1/p$) olduğunda, $\mathbf{y}$ dizisi bazı negatif terimlere sahip olur ve bu nedenle (8.1) deki alt sınır problemini analiz etmek için kullanılamaz. Bu kusur $\mathbf{y}$ yi (7.21) deki $\mathbf{x}$ dizisiyle değiştirmemize yol açar. Muhakkak $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ den karmaşıktır ve $(E,\theta)^t$ nın bir öz vektörü değildir. Yine de negatif olmayan terimlere sahiptir ve m nin yeterince büyük olması şartıyla aşağıdaki denklemi sağlar:

$$(A\mathbf{x})_m = \lambda x_m \tag{8.23}$$

burada $A = (E,\theta)^t$ (ya da $A = (H,\mu)^t$) ve $\lambda = \theta^{\rho-1}$. (8.23) ü sağlayan $\mathbf{x}$ dizisini A matrisinin bir "nihai öz vektörü" olarak adlandırabiliriz. Bu kavram, Teorem 8.5 ve Sonuç 8.6 nın ötesinde uygulamalara sahiptir.

Sonuç 8.7. $p > 0$ ve (8.13) teki (H,μ) Hausdorff matrisi ise

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{h_{n,k}}{|x_k|}\right)^{-p} \leq \left(\int_0^1 \theta^{1/p}\, d\mu(\theta)\right)^{-p}\sum_{k=0}^{\infty}|x_k|^p \tag{8.24}$$

eşitsizliği sağlanır. Sabit mümkün olanın en iyisidir ve $\mathbf{x=0}$ veya $H = I$ olmadıkça (8.24) deki eşitsizlik kesindir.

Kanıt. Eğer $\mathbf{y}$, negatif olmayan terimli bir dizisiyse, Teorem 8.5'e göre

$$\left\|H^t\mathbf{y}\right\|_{\frac{p}{p+1}} \geq \int_0^1 \theta^{1/p}\, d\mu(\theta)\|\mathbf{y}\|_{\frac{p}{p+1}}$$

bulunur. Önerme 8.4 ü uygulayarak şu sonucu çıkarırız:

$$\|H\mathbf{y}\|_{-p} \geq \int_0^1 \theta^{1/p}\, d\mu(\theta)\|\mathbf{y}\|_{-p},$$

ve $k = 0,1,2,\ldots$ için y_k yi $1/|x_k|$ ile değiştirirsek bu (7.31) e indirgenir. Buradan istenen sonuç elde edilir. $\square$

Bölüm 9

Örnekler

Burada bölüm 8 deki bazı sonuçlar örneklerle açıklanacaktır. Beesack-Heining [4], Knopp [20] ve Cochran-Lee [10] çalışmalarında ortaya çıkan bazı sorular cevaplanmıştır.

[4] te Beesack ve Heining, ağırlıklı L^p uzayından ağırlıklı L^q uzayına tanımlı "Hardy" operatörünü inceler. Yalnızca integral operatörleriyle ilgilenmelerine karşın onların sonuçları matrislere de uyarlanabilir ve sıradan bir değişiken dönüşümü (bkz [7] de sayfa 153) sonrası [7] nin II. Kısmındaki Teorem 4 ile bazı örtüşmeler vardır. [7] yazımı sırasında [4] fark edilmemiştir.

Beesack ve Heinig esas olarak $0 < q \leq p < 1$ ve $q \leq p < 0$ durumlarıyla ilgilenmiştir ve Hardy operatörünü (veya tranpozunun) alttan sınırlı yapan ağırlıkları belirlemeye çalışmışlardır. Dört sonuç verilmiştir, ancak bunlar $x \to 1/x$ değişken dönüşümüyle ikiye indirgenebilir. Dolayısıyla, Teorem 1 in (a) ve (b) bölümleri eşdeğerdir ve Teorem 2 nin (a) ve (b) kısımları da eşdeğerdir. Ayrıca, Önerme 8.4 ü uygularsak, şunu görürüz: $1\,(a)$ ve $2\,(b)$ eşdeğerdir ve $1\,(b)$ ve $2\,(a)$ da eşdeğerdir. Böylece eşitsizliklerin dördü tek bir sonucu ortaya çıkarır.

Beesack ve Heining çalışmalarının ortaya çıkardığı esas problem, dört sonuçlarında da ortak olan monotonluk hipotezinin kaldırılabilir olup olmamasıdır. İlk olarak Teorem 2 (a) da ve ardından diğer üç sonuçlarında bu durum [7] in II. Kısmındaki Teorem 4 $(i) \Leftrightarrow (ii)$ nin bir sonucudur. Bu teorem $0 < q \leq p < 1$ (ve benzer şekilde $q \leq p < 0$) olduğunda L^p den L^q ya tanımlı alttan sınırlı Hardy operatörü (ve benzer şekilde transpozu) için ağırlıkların tam bir açıklamasını verir.

Beesack ve Heining'in çalışmasıyla ortaya çıkan çözemediğimiz bir diğer açık kalmış problem $0 < p < q < 1$ (ve benzer şekilde $p < q < 0$) olduğunda ağırlıkları karakterize etmektir. Not edilmelidir ki verilen gerek koşul (örneğin Teorem 2(b)) artık yeter değildir. Bu en kolay şekilde [7] nin II. Kısmındaki Teorem 5(iv) maddesinde $p = q/(1+q)$, $\alpha = 1/q$ ve $\beta = 1/p^*$ alınarak görülür.

Sonraki altı sonucumuz, Teorem 8.5 in sonuçlarıdır. $d\mu(\theta)$ ölçüsü için yerine koyma metotları uygulanarak farklı sonuçlar elde edilebilir. Daha önceki sonuçlarla ilişkilerini tartışmak için aşağıdaki altı sonucu seçtik. Sabitlerin tümü mümkün olanın en iyisidir ve $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ oldukça eşitsizlikler (9.2 hariç) kesindir.

İlk sonucumuz Knopp tarafından çözümlenmemiş bir soruyu yanıtlıyor. Knopp, (9.1) in $K(\alpha, p)$ biçimindeki sabitle sağlandığını gösterdi ([20], Kısım II, Teorem I de $t = -1/p$) ve $K(\alpha, p)$, (9.1) deki değerden daha küçük alınamaz. Benzer sonuçlar aşağıdaki Sonuç 9.5 e uygulanabilir.

Sonuç 9.1. $\alpha, p > 0$ ise aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n+\alpha}{n}\right)^p \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{n+\alpha-1-k}{n-k}}{|x_k|}\right)^{-p} \leq \left(\frac{\Gamma\left(\alpha + \frac{1}{p} + 1\right)}{\Gamma(\alpha+1)\,\Gamma\left(\frac{1}{p}+1\right)}\right)^p \sum_{k=0}^{\infty} |x_k|^p. \tag{9.1}$$

Kanıt. Sonuç 8.7 de $H = (C, \alpha)$ alındığında ispat biter. □

Bir sonraki sonucumuz Knopp'a atfedilir ([20], Teorem IV te $t = 1/p$ ve $a_k = |x_k|^p$). Bu, ℓ^p üzerinde tanımlı harmonik ortalama operatörünün normunun $\frac{p+1}{p}$ ye eşit olduğunu gösterir.

Sonuç 9.2. Eğer $p > 0$ ise aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{\frac{1}{|x_1|} + \cdots + \frac{1}{|x_n|}}\right)^p \leq \left(\frac{p+1}{p}\right)^p \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p.$$

Kanıt. Sonuç 9.1 de $\alpha = 1$ alınsın ve toplamın indeksi 1 den başlayacak şekilde ayarlansın. □

Bir sonraki sonucumuz $\alpha = 1$ olduğunda Copson eşitsizliğinin (7.3) bir genişlemesidir. Knopp'un çalışmalarında Sonuç 9.3 ün olmaması ilginçtir. Çalışmalarında ℓ^p nin üç farklı türündeki eşitsizliklerini inceler: $p > 1$, $p < 0$ ve $p = 0$. Ancak $0 < p \leq 1$ durumunu göz önüne almamıştır.

Sonuç 9.3. Eğer $\alpha > 0$ ve $0 < p < 1$ ise aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=n}^{\infty}\frac{\binom{k+\alpha-1-n}{k-n}|x_k|}{\binom{k+\alpha}{k}}\right)^p \geq \frac{\Gamma(\alpha+1)\,\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{p}+\alpha\right)}\sum_{k=0}^{\infty}|x_k|^p.$$

Kanıt. Teorem 8.5 de $H = (C, \alpha)$ alınsın. □

Aşağıdaki sonuç keyfi (olasılık) ölçüleri için Carleman eşitsizliğinin geçerli olduğunu gösterir. $d\mu(\theta)$, Lebesque ölçüsü olduğunda klasik sonuca indirgenir.

Sonuç 9.4. Eğer (H, μ) Hausdorff matrisi (8.13) ise $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ veya $H = I$ olmadıkça

$$\sum_{n=0}^{\infty}\prod_{k=0}^{n}|x_k|^{h_{n,k}} < e^{\int_0^1 |\log\theta|\, d\mu(\theta)}\sum_{k=0}^{\infty}|x_k| \tag{9.2}$$

sağlanır. Sabit mümkün olanların en iyisidir.

Kanıt. Standart bir argüman aracılığıyla eşitsizlik (9.2), Sonuç 8.7 den gelir. (8.24) de x_k yı $|x_k|^{1/p}$ ile değiştirip $p \to \infty$ limiti alınsın. [17, Teorem 187] sayesinde (9.2) deki sabit ortaya çıkar. İspatın geri kalanı buradan gelir. □

Sonuç 9.5. Eğer $\alpha > 0$ ise

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\prod_{k=0}^{n}|x_k|^{\binom{n+\alpha-1-k}{n-k}}\right)^{1/\binom{n+\alpha}{n}} \leq e^{\psi(\alpha+1)-\psi(1)}\sum_{n=0}^{\infty}|x_n| \tag{9.3}$$

sağlanır, burada $\psi(\alpha) = \frac{d}{d\alpha}\log\Gamma(\alpha)$ Legendre psi fonksiyonudur.

Kanıt. Sonuç 9.4 te $H = (C, \alpha)$ alınsın. (9.2) deki integral birden fazla yolla belirlenebilir. Örneğin;

$$\begin{aligned}\int_0^1 \alpha(1-\theta)^{\alpha-1}|\log\theta|\, d\theta &= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha}{k(k+\alpha)}\\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+\alpha}\right)\\ &= \int_0^1 \frac{1-t^\alpha}{1-t}\,dt\\ &= \psi(\alpha+1)-\psi(1)\end{aligned}$$

elde edilir. α pozitif bir tam sayı ise (9.3) deki sabit $e^{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{\alpha}}$ dir; özellikle $\alpha = 1$ eşitsizlik olduğunda Carleman eşitsizliğine indirgenir. □

Şimdi yukarıda bahsedilen altı sonucun sonuncusuna geldik. Sonuç 9.5 e çok benzerdir fakat sabitlerin basitliği nedeniyle çok daha hoştur. Alternatif bir ispat [7] nin 162. ve 163. sayfalarında verilmiştir.

Sonuç 9.6. Eğer $\alpha > 0$ ise aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\prod_{k=0}^{n}|x_k|^{\binom{k+\alpha-1}{k}}\right)^{1/\binom{n+\alpha}{n}} \leq e^{\frac{1}{\alpha}}\sum_{k=0}^{\infty}|x_k|.$$

Kanıt. Sonuç 9.4 te $d\mu(\theta) = \alpha\theta^{\alpha-1}d\theta$ alınsın. □

Şimdi Carleman eşitsizliğinin diğer iki çesitinden bahsedeceğiz. Cochron ve Lee ([10, Teorem 2]) gösterir ki $\alpha \geq 1$, $\beta > 0$ ve $0 \leq x_n \leq 1$ ise

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\beta}\left(\prod_{k=1}^{n} x_k^{k^{\alpha-1}}\right)^{\alpha/n^{\alpha}} \leq e^{\frac{\beta+1}{\alpha}}\sum_{n=1}^{\infty} n^{\beta}x_n \tag{9.4}$$

gerçeklenir. Kanıtları, zeta fonksiyonunun kuyruğunun ilginç bir kestirimini kapsamaktadır ki (5.2) deki eşitsizlikten ne daha güçlü ne de daha zayıftır. $\alpha = 1$ ve $\beta = 0$ alınması Carleman eşitsizliğini verir. Bu durumda ek hipotez $0 \leq x_n \leq 1$ gereksizdir. Ancak genel hipotezden vazgeçilemez çünkü (9.4), x'lerde homojen değildir. Bu kusur aşağıdaki şık eşitsizliği ispatlayan Love ([22, Teorem 1]) tarafından giderilmiştir:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\beta}\left(\prod_{k=1}^{n}|x_k|^{k^{\alpha}-(k-1)^{\alpha}}\right)^{1/n^{\alpha}} \leq e^{\frac{\beta+1}{\alpha}}\sum_{n=1}^{\infty} n^{\beta}\,|x_n|. \tag{9.5}$$

Carleman teoreminin ([9] §9.12) standart ispatıyla motive olan Cochron ve Lee sonuçlarının temelini oluşturan bir ℓ^p-eşitsizliğinin olup olmadığını sormaktadır ([10], sayfa 12). Aslında bunun, hatta daha güçlü bir eşitsizlik olan (9.5) için bile sağlandığı gözlemlenir. Öncelikle n^{β} çarpanının gereksiz olduğunu not edelim; diğer bir deyişle (9.5) ispatlandığında sadece $\beta = 0$ durumuyla ilgilenmek yeterlidir. İspat, [9, Lemma 2] ninkine benzerdir ki (9.4) teki aynı indirgemeyi yapmak için Cochran ve Lee tarafından kulanılmıştır.

İstenen ℓ^p-eşitisizliği aşağıdaki gibidir:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\sum_{k=1}^{n}\left(k^{\alpha}-(k-1)^{\alpha}\right)|x_k|\right)^{p} \leq \left(\frac{\alpha p}{\alpha p-1}\right)^{p}\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^{p} \tag{9.6}$$

$\alpha, p \geq 1$ ve $\alpha p > 1$ olduğunda bu geçerlidir. x_k yerine $|x_k|^{1/p}$ yazıldığında ve $p \to \infty$ limiti alındığında $\beta = 0$ için (9.5) bulunur.

Tekrar $\alpha, p \geq 1$ ve $\alpha p > 1$ olduğunda geçerli olan başka bir ℓ^p-eşitsizliği vardır. Bu da (9.4) ün doğal bir genişlemesine yol açar. Yalnızca ℓ^p sonucunu belirteceğiz.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1^{\alpha-1} + \cdots + n^{\alpha-1}} \sum_{k=1}^{n} k^{\alpha-1} |x_k| \right)^p \leq \left(\frac{\alpha p}{\alpha p - 1} \right)^p \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p . \tag{9.7}$$

Bunu oluşturmak (9.6) dan daha zor ve zahmetlidir. Ancak şunu belirtelim ki Love'un çalışmaları çok ilginç bir soruyu gündeme getirir. Love, (9.5) in tüm pozitif α lar için (ve $\beta \geq 0$) geçerli olduğunu gösterdi. Bu, $p \geq 1$, $\alpha p > 1$ ve $0 < \alpha < 1$ olduğunda da (9.6) ve (9.7) nin geçerli olması gerektiğini gösterir. Burada söz konusu olan $\left(\frac{\alpha p}{\alpha p - 1}\right)^p$ sabittir; $\alpha > 0$, $p \geq 1$, $\alpha p > 1$ olduğunda da bazı sabitlerle eşitsizliğin sağlandığını göstermek mümkündür ki eşitsizlik sadece bu aralıkta sağlanır.

Bölüm 10

ℓ^p nin Anlamı

Şimdi $0 < p < 1$ için Copson eşitsizliğini ele alacağız. Önceki analizimiz (Teorem 7.2) şunu gösterdi:

$$cop\,(p) = \ell^1 \cdot HM\left(\ell^{\frac{p}{p-1}}\right), \tag{10.1}$$

ve bu Knopp'un sonucu olan Corollary 9.2 aracılığıyla, Copson teoreminin kesin bir versiyonunu vermek için yeterlidir. Bununla birlikte, ikinci elemanın açık olarak belirtilmediği (10.1) çarpanlara ayrılışı Teorem 5.4 ve 7.1 dekilerden daha iyi değildir. Bu kısımda her iki çarpanının bilinebilir olduğu $cop(p)$ nin bir tanımını vererek bu eksikliği gidermeye çalışacağız. (Şunu belirtmek gerekir ki $HM\left(\ell^{\frac{p}{p-1}}\right)$ bir linear uzay değildir, dahası (7.10) daki denklemleri çözmek $HM\left(\ell^{\frac{p}{p-1}}\right)$ nin anlamlı bir tanımlanmasına yol açacağı görünmüyor.)

Harmonik ortalama operatörünün görüntü kümesini belirlemek yerine onun katı örtüsünü, $\ell^\infty \cdot HM\left(\ell^{\frac{p}{p-1}}\right)$ kümesini karakterize edeceğiz. Bu amacımız için yeterlidir, çünkü ($\ell^1 = \ell^1 \cdot \ell^\infty$) kullanılarak (10.1) çarpanlara ayrılışı

$$cop(p) = \ell^1 \cdot \left(\ell^\infty \cdot HM\left(\ell^{\frac{p}{p-1}}\right)\right) \tag{10.2}$$

şekilde yeniden yazılabilir.

Aslında yöntem o kadar basittir ki, Hardy, Littlewood ve Polya ([17], Bölüm I) deki $\mathcal{M}_r$ ortalamalarının ℓ^p uzayları üzerindeki davranışlarını tamamen belirleyebiliriz. $\mathcal{M}_r(\mathbf{x})$ şu şekilde tanımlanır:

$$\left(\mathcal{M}_r(\mathbf{x})\right)_n = \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} |x_k|^r\right)^{1/r} \tag{10.3}$$

öyle ki $\mathcal{M}_1(\mathbf{x})$, $\mathcal{M}_{-1}(\mathbf{x})$ ve $\mathcal{M}_0(\mathbf{x})$ (burada $(\mathcal{M}_0(\mathbf{x}))_n := \lim_{r\to 0^+}(\mathcal{M}_r(\mathbf{x}))_n$ olarak tanımlanır) sırasıyla $\mathbf{x}$ dizisinin aritmetik, harmonik ve geometrik ortalamalarıdır. Ayrıca [17, 2.1.4] göz önüne alınsın: $r < 0$ ve $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nin her biri sıfırsa $(\mathcal{M}_r(\mathbf{x}))_n$ de sıfır olarak yorumlanır.

Önerme 10.1. r bir gerçel sayı ve $p > 0$ olsun. $\mathcal{M}_r$ fonksiyonu ℓ^p den ℓ^p ye tanımlı, gerek ve yeter şart, $r < p$ olmasıdır. Ayrıca, aşağıdaki eşitlik sağlanır:

$$\|\mathcal{M}_r\|_{p,p} = \begin{cases} \left(\frac{p}{p-r}\right)^{\frac{1}{r}}, & r \neq 0 \\ e^{\frac{1}{p}}, & r = 0. \end{cases}$$

Kanıt. Aşağıdaki eşitsizliği göz önünde bulunduralım.

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|y_k|^r\right)^{p/r}\right)^{1/p} \leq \|\mathcal{M}_r\|_{p,p}\left(\sum_{k=1}^{\infty}|y_k|^p\right)^{1/p}.$$

$r > 0$ olduğunda $x_k = |y_k|^r$ alınsın ve $\ell^{p/r}$ uzayına Hardy eşitsizliğini (5.18) uygulayalım. $r < 0$ olduğunda Knopp'un eşitsizliği, Sonuç 9.2 yi uygulayalım. Son olarak $r = 0$ olduğunda, Carleman'ın eşitsizliğini (7.20) uygulayalım. □

Şimdi ℓ^p üzerinde tanımlı $\mathcal{M}_r$ ortalamasının görüntü kümesinin katı örtüsünü tanımlayacağız. Bu, Copson eşitsizliği ile ilgili işleyişimizi tamamlamamıza imkan sağlayacaktır.

Teorem 10.2. $p > 0$ ve r bir gerçel sayı öyle ki $r < p$ olsun. Bu durumda

$$\ell^{\infty} \cdot \mathcal{M}_r(\ell^p) = d(p) \tag{10.4}$$

gerçeklenir. Ayrıca,

$$\frac{1}{\|\mathcal{M}_r\|_{p,p}}\|\mathbf{x}\|_{d(p)} \leq \inf\left\{\|\mathbf{y}\|_{\infty}\|\mathbf{z}\|_p : \mathbf{x} = \mathbf{y}\cdot\mathcal{M}_r(\mathbf{z})\right\} \leq \|\mathbf{x}\|_{d(p)} \tag{10.5}$$

eşitsizliği sağlanır. Sabitlerin her ikisi de mümkün olanların en iyisidir. Sol taraftaki eşitsizlik $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ olmadıkça kesindir. Sağ tarafta eşitlik olması için gerek ve yeter koşul $\mathbf{x}$ in sonlu desteğe (finite support) sahip olması ve sıfırdan farklı olan terimlerinin en büyüğünün en sonda görünmesidir.

Kanıt. $\mathbf{x} \in d(p)$ olduğunu varsayalım. $\mathbf{z} = \hat{\mathbf{x}}$ (bkz Tanım (4.6)) alarak $\mathbf{x}$ dizisi (10.4) teki gibi bir çarpanlara ayrılışa sahip olur. Açık olarak, $\mathbf{z} \in \ell^p$ ve

$$\|\mathbf{z}\|_p = \|\mathbf{x}\|_{d(p)} \tag{10.6}$$

olur. Ayrıca, $\mathbf{z}$ azalan, negatif olmayan bir dizidir, böylece

$$z_n = \min\{z_1, \ldots, z_n\} = (\mathcal{M}_{-\infty}(\mathbf{z}))_n,$$

ve [17, Teorem 16] dan $\mathbf{z}_n \leq (\mathcal{M}_r(\mathbf{z}))_\mathbf{n}$ çıkar. $|x_n| \leq z_n$ olduğundan

$$\|\mathbf{y}\|_\infty \leq 1 \tag{10.7}$$

ve

$$x_n = y_n(\mathcal{M}_r(\mathbf{z}))_n \tag{10.8}$$

olacak şekilde $\mathbf{y} \in \ell^\infty$ seçebiliriz. (10.6)-(10.8) den (10.5) in sağ tarafı gelir.

(10.5) in sol tarafını ispatlamadan önce bazı açıklamalar verelim. Öncelikle gösterimimiz yalnızca $r \neq 0$ ise anlamlıdır; $r = 0$ durumu uygun değişikliklerle yapılabilir. İkinci olarak $\mathbf{z} \in \mathcal{M}_r(\ell^p)$ ise Önerme 10.1 den $\mathbf{z} \in \ell^p$, ve dolayısıyla $\mathbf{z} \in c_0$ ve azalan yeniden düzenlenmesi, $\mathbf{z}^*$, hakkında konuşabiliriz.

Şimdi $\mathbf{x}$, (10.5) teki gibi bir çarpanlara ayrılışa sahip olsun. Eğer $\mathbf{z} \neq \mathbf{z}^*$ ise en az bir k için $|z_k| < |z_{k+1}|$ olur. $\mathbf{z}$ de z_k ve z_{k+1} terimlerini yer değiştirdiğimizde elde ettiğimiz dizi $\mathbf{w}$ olsun. $n < k$ ve $n > k$ olduğunda $\mathbf{w}$ nın $(\mathcal{M}_r(\mathbf{w}))_n$ ortalamaları $\mathbf{z}$ ninkilerle örtüşür. Fakat $n = k$ olduğunda

$$\begin{aligned}
(\mathcal{M}_r(\mathbf{w}))_n &= \left(\frac{|z_1|^r + \cdots + |z_{k-1}|^r + |z_{k+1}|^r}{k}\right)^{1/r} \\
&> \left(\frac{|z_1|^r + \cdots + |z_k|^r}{k}\right)^{1/r} \\
&= (\mathcal{M}_r(\mathbf{z}))_n
\end{aligned}$$

bulunnur. Buradan, azalan sırada verilmiş bir $\{|z_1|, |z_2|, \ldots\}$ kümesi için

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{m \geq n} \left(\frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} |z_k|^r\right)^{p/r}$$

toplamı maksimumuna ulaşır.

Sonuç olarak,

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{x}\|_{d(p)}^p &= \sum_{n=1}^{\infty} \sup_{m\geq n} |y_m|^p \left(\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} |z_k|^r\right)^{p/r} \\
&\leq \|\mathbf{y}\|_\infty^p \sum_{n=1}^{\infty} \sup_{m\geq n} \left(\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} |z_k|^r\right)^{p/r} \\
&\leq \|\mathbf{y}\|_\infty^p \sum_{n=1}^{\infty} \sup_{m\geq n} \left(\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} |z_k^*|^r\right)^{p/r} \\
&\leq \|\mathbf{y}\|_\infty^p \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} |z_k^*|^r\right)^{p/r} \\
&\leq \|\mathbf{y}\|_\infty^p \|\mathcal{M}_r\|_{p,p}^p \|\mathbf{z}^*\|_p^p
\end{aligned}$$

bulunur. p. dereceden kökler almak ve $\|\mathbf{z}^*\|_p = \|\mathbf{z}\|_p$ olduğunu gözlemlemek (10.5) in sol tarafını verir. □

Şimdi, Copson eşitsizliğine ilişkin incelememizi tamamlayabiliriz. Copson'ın sonucunun iki tane çarpanlara ayrılışı olduğunu not etmek ilginçtir. (İlki (1.8), ikincisi de (1.9) a karşılık gelir.)

Teorem 10.3. Eğer $0 < p < 1$ ise

$$cop\,(p) = \ell^1 \cdot d\left(\frac{p}{1-p}\right) \tag{10.9}$$

sağlanır. Ayrıca

$$\|\mathbf{x}\|_{cop(p)} \leq \inf\left\{\|\mathbf{y}\|_1 \|\mathbf{z}\|_{d\left(\frac{p}{1-p}\right)} : \mathbf{y}\cdot\mathbf{z} = \mathbf{x}\right\} \leq \frac{1}{p}\|\mathbf{x}\|_{cop(p)} \tag{10.10}$$

eşitsizliği gerçeklenir. Sabitlerin her ikisi de mümkün olanların en iyisidir. $\mathbf{x}$ sıfırdan farklı en fazla bir tane terime sahip olmadıkça sol tarafta kesin eşitsizlik vardır. Sağ taraf, $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ olmadıkça kesindir.

Kanıt. Teorem 10.2 ve 7.2 e göre,

$$\inf\left\{\|\mathbf{y}\|_1 \|\mathbf{z}\|_{d\left(\frac{p}{p-1}\right)} : \mathbf{y}\cdot\mathbf{z} = \mathbf{x}\right\} \tag{10.11}$$

$$\geq \inf\left\{\|\mathbf{y}\|_1 \|\mathbf{v}\|_\infty \|\mathbf{w}\|_{d\left(\frac{p}{1-p}\right)} : \mathbf{y}\cdot\mathbf{v}\cdot HM\,(\mathbf{w}) = \mathbf{x}\right\} \tag{10.12}$$

$$= \inf\left\{\|\mathbf{y}\|_1 \|\mathbf{w}\|_{d\left(\frac{p}{1-p}\right)} : \mathbf{y}\cdot HM\,(\mathbf{w}) = \mathbf{x}\right\}$$

$$= \|\mathbf{x}\|_{cop(p)}$$

gelir. Böylece (10.10) un sol tarafı sağlanır. Sağ tarafı ispatlamak için (10.11) deki terimi $\|HM\|^{-1}_{\frac{p}{1-p},\frac{p}{1-p}} = p$ ile çarpılır, (10.12) eşitisizliği ters çevrilir, ve daha önce olduğu gibi aynı argüman takip edilir. $\square$

Teorem 10.4. Eğer $0 < p < 1$ ise

$$\ell^p = cop\,(p) \cdot g\left(\frac{p}{1-p}\right) \tag{10.13}$$

gerçeklenir. Ayrıca,

$$p\|\mathbf{x}\|_p \leq \inf\left\{\|\mathbf{y}\|_{cop(p)}\|\mathbf{z}\|_{g\left(\frac{p}{1-p}\right)} : \mathbf{y}\cdot\mathbf{z} = \mathbf{x}\right\} \leq \|\mathbf{x}\|_p \tag{10.14}$$

eşitsizliği sağlanır. Sabitlerin her ikiside mümkün olanların en iyisidir. Sol taraf, $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ olmadıkça kesindir. $\mathbf{x}$ sıfırdan farklı en fazla bir tane terime sahip olmadıkça sağ tarafta kesin eşitsizlik vardır.

Kanıt. (4.12) yi uygulayarak ve ardından Teorem 4.2 ve 10.3 ten

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{x}\|_p &= \inf\left\{\|\mathbf{u}\|_1\|\mathbf{v}\|_{\frac{p}{1-p}} : \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{x}\right\} \\
&= \inf\left\{\|\mathbf{u}\|_1\|\mathbf{w}\|_{d\left(\frac{p}{1-p}\right)}\|\mathbf{z}\|_{g\left(\frac{p}{1-p}\right)} : \mathbf{u}\cdot\mathbf{w}\cdot\mathbf{z} = \mathbf{x}\right\} \\
&\geq \inf\left\{\|\mathbf{y}\|_{cop(p)}\|\mathbf{z}\|_{g\left(\frac{p}{1-p}\right)} : \mathbf{y}\cdot\mathbf{z} = \mathbf{x}\right\}
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan (10.14) ün sağ tarafı gelir. Sol tarafı da benzer yöntemle ispatlanır. $\square$

Sonuç 10.5. (Copson) Eğer $0 < p < 1$ ise $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ olmadıkça

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=n}^{\infty}\frac{|x_k|}{k}\right)^p > p^p\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|$$

sağlanır. Sabitler mümkün olanın en iyisidir.

Kanıt. Bu, Hölder eşitisizliği aracılığıyla (10.10) dan veya $\mathbf{y} = \mathbf{x}$ ve $\mathbf{z} = \mathbf{1}$ alınarak (10.14) ten gelir. $\square$

Bölüm 11

$ces(p)$ ve $cop(p)$ Uzaylarının Karşılaştırılması

$1 < p < \infty$ için Teorem 5.4 ve 7.1 den $ces(p)$ ve $cop(p)$ uzayları çakışırlar. Buradaki amacımız aşağıdaki eşitsizlikleri sağlayan en iyi $\alpha(p)$ ve $\beta(p)$ sabitlerini aramaktır:

$$\|\mathbf{x}\|_{ces(p)} \leq \alpha(p) \|\mathbf{x}\|_{\mathrm{co}\,p(p)} \tag{11.1}$$

ve

$$\|\mathbf{x}\|_{cop(p)} \leq \beta(p) \|\mathbf{x}\|_{ces(p)}. \tag{11.2}$$

Bölüm 3 te özetlenen metot ile $ces(p) = cop(p)$ özdeşliğinin doğrudan ispatlanabileceğini not edelim.

S tek taraflı kaydırma matrisi (unilateral shift matrix) olarak alındığında

$$C = C\big(C^t\big)^{-1}C^t = \big(C - S^t\big)\, C^t$$

ve Hardy eşitisizliğinden (5.18) şu sonuca varılır:

$$\|C\mathbf{x}\|_p \leq (p^* + 1) \left\|C^t\mathbf{x}\right\|_p. \tag{11.3}$$

Benzer şekilde

$$C^t = C^t C^{-1} C = \big(C^t - 1\big)\, SC$$

ve tekrar Hardy eşitsizliğinden

$$\left\|C^t\mathbf{x}\right\|_p \leq (p + 1) \|C\mathbf{x}\|_p \tag{11.4}$$

eşitsizliği bulunur. (11.3) ve (11.4) ten $\alpha(p) \leq p^* + 1$ ve $\beta(p) \leq p + 1$ elde edilir.

Elbette bu değerler en uygun olanları değildir. $\alpha(p)$ ve $\beta(p)$ yi belirlemek için oldukça farklı bir yaklaşım belirlemek zorunda kalacağız. Yine de ilk olarak (11.3) ve (11.4) ün aşağıdaki gibi ilginç bir soruya yol açtığını belirtelim.

Problem 11.1. $1 < p < \infty$ ve $p \neq 2$ olmak üzere $\|C - I\|_{p,p}$ tam olarak nedir?

$\boldsymbol{\mu}$, $[0, 1]$ üzerinde bir işaretli ölçü olmak üzere $C - I$, bir $(H, \boldsymbol{\mu})$ Hausdorff matrisidir. B.E. Rhoades, bu tür matrislerin normlarının

$$\|H\|_{p,p} = \sup_{y \in \mathbb{R}} \left| \int_0^1 t^{-\frac{1}{p}+iy} d\mu(t) \right| \tag{11.5}$$

biçiminde verildiğini önerdi (bkz [25]). $p = 2$ olduğunda sanının geçerli olduğunu gösterdi ([25, Theorem 5]) ve $\boldsymbol{\mu}$ nün bir olasılık ölçüsü olması durumunda $1 \leq p \leq \infty$ için sanının geçerli olduğu bilinmektedir [15]. Bununla birlikte (11.5) in genel olarak $C - I$ göz önüne alındığında doğru olmadığını göstereceğiz.

Bu matris için sanılan norm

$$\sup_{y \in \mathbb{R}} \left| \int_0^1 t^{-\frac{1}{p}+iy} dt - 1 \right| = \begin{cases} \frac{1}{p-1}, & 1 < p \leq 2 \\ 1, & 2 \leq p \leq \infty \end{cases}$$

olur ve hiç olmazsa, $2 < p \leq \infty$ olduğunda bu değer çok küçüktür. Bunu görmek için sadece ℓ^p den ℓ^p ye tanımlı herhangi bir matrisin normunun her bir satırının ℓ^{p^*} normunu aştığını hatırlamak yeterlidir. $C - I$ için n yateri kadar büyük ise $(n+1)^{p^*} - n^{p^*} \leq p^*(n+1)^{p^*-1} < n$ olduğundan

$$\|n. \text{ satır}\|_p = \frac{\left(n + n^{p^*}\right)^{1/p^*}}{n+1} > 1$$

sağlanır. $1 \leq p < 2$ durumu içinde Rhoades'in sanısının yanlış olduğunu göstermek için benzer örnekler kurulabilir. Bu nedenle yalnızca $p = 2$ için sanı doğrudur.

Şimdi bu bölümün ana sonucunu vereceğiz. Bu sonuç $p \geq 2$ için $\alpha(p)$ yı ve $1 \leq p \leq 2$ için $\beta(p)$ yi belirlememizi sağlar ve Bölüm 6 da açık bırakılan bir soruyu çözer. Terimleri negatif olmayan bir $\mathbf{x}$ dizisinin kısmi toplamlar dizisi $X_n = x_1 + \cdots + x_n$ ile gösterilsin ve $X_0 = 0$ olarak tanımlansn.

Lemma 11.2. Eğer $1 \leq p \leq 2$ ise

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\sum_{k=n}^{\infty} \frac{x_k}{A_k} \right)^p \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n^p - X_{n-1}^p}{A_n^{p-1}}$$

gerçeklenir. Ayrıca, $0 < p \leq 1$ veya $p \geq 2$ ise eşitsizlik tersine çevrilir.

Kanıt. $\phi : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ bir konkav fonksiyon olsun. $t > 0$ ve $n = 1, 2, 3, \ldots$ olmak üzere

$$t + \sum_{k=1}^{n-1} x_k = \sum_{k=1}^{n} a_k \left(\frac{t}{A_n} + \sum_{j=k}^{n-1} \frac{x_j}{A_j} \right)$$

özdeşliğini kullanarak Jensen eşitisizliğinden şu sonuç çıkar:

$$\phi\left(\frac{t + X_{n-1}}{A_n} \right) \geq \frac{1}{A_n} \sum_{k=1}^{n} a_k \phi \left(\frac{t}{A_n} + \sum_{j=k}^{n-1} \frac{x_j}{A_j} \right).$$

$1 \leq p \leq 2$ için $\phi(t) = t^{p-1}$ olarak alınırsa

$$\left(\frac{t + X_{n-1}}{A_n} \right)^{p-1} \geq \frac{1}{A_n} \sum_{k=1}^{n} a_k \left(\frac{t}{A_n} + \sum_{j=k}^{n-1} \frac{x_j}{A_j} \right)^{p-1}$$

bulunur ve her iki tarafı $t = 0$ dan $t = x_n$ e integralini alırsak

$$\frac{X_n^p - X_{n-1}^p}{A_n^{p-1}} \geq \sum_{k=1}^{n} a_k \left[\left(\sum_{j=k}^{n} \frac{x_j}{A_j} \right)^p - \left(\sum_{j=k}^{n-1} \frac{x_j}{A_j} \right)^p \right]$$

olduğu görülür. $n = 1, 2, \ldots$ üzerinden toplam alındığında

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n^p - X_{n-1}^p}{A_n^{p-1}} &\geq \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sum_{n=k}^{\infty} \left[\left(\sum_{j=k}^{n} \frac{x_j}{A_j} \right)^p - \left(\sum_{j=k}^{n-1} \frac{x_j}{A_j} \right)^p \right] \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \left(\sum_{j=k}^{\infty} \frac{x_j}{A_j} \right)^p \end{aligned}$$

ifadesi çıkar. $0 \leq p \leq 1$ veya $p \geq 2$ olduğunda $t \mapsto t^{p-1}$ fonksiyonu konvekstir ve yukarıdaki tüm eşitsizlikler tersine çevrilir. □

Lemma 11.2, Bölüm 6 da açık bırakılan bir sonuç olan eşitsizlik (6.18) i kanıtlamamızı sağlar. Lemmayı $p \geq 1$ için bilinen $X_n^p - X_{n-1}^p \leq p x_n X_n^{p-1}$ kestirimine uygularsak

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\sum_{k=n}^{\infty} \frac{x_k}{A_k} \right)^p \leq p \sum_{n=1}^{\infty} x_n \left(\frac{X_n}{A_n} \right)^{p-1} \qquad (1 \leq p \leq 2)$$

elde edilir.

Eğer $0 < p \leq q$ olacak şekilde p ve q sayıları verilirse s yi (6.1) deki gibi tanımlarız ve $1 \leq p/s \leq 2$ olur. Yukarıda x_k yerine x_k^s ve p yerine p/s yazılırsa (6.18) i elde ederiz. Benzer şekilde $p \geq q$ sağlandığında eşitsizlik işaretinin ters çevrilmesi ve sabitin 1 ile değiştirilmesi koşuluyla 6.18 geçerli kalır.

Teorem 11.3. $p \geq 2$ ise

$$\|\mathbf{x}\|_{ces(p)} \leq \zeta(p)^{1/p} \|\mathbf{x}\|_{cop(p)} \tag{11.6}$$

olur. $1 < p < 2$ ise

$$\|\mathbf{x}\|_{cop(p)} \leq (p-1)^{1/p} \|\mathbf{x}\|_{ces(p)} \tag{11.7}$$

sağlanır. Sabitlerin her ikisi de mümkün olanların en iyisidir. $x_2 = x_3 = \cdots = 0$ olmadıkça (11.6) daki eşitsizlik kesindir, ve $\mathbf{x}{=}\mathbf{0}$ olmadıkça (11.7) deki eşitsizlik kesindir.

Kanıt. Kısmi toplamlar formülü

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}\|_{ces(p)}^p &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x_n}{n}\right)^p \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(X_n^p - X_{n-1}^p\right) \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^p} \end{aligned}$$

eşitliğini verir. Lemma 5.1 i uygulayarak şu sonucu çıkarırız:

$$(p-1)^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n^p - X_{n-1}^p}{n^{p-1}} \leq \|\mathbf{x}\|_{ces(p)}^p \leq \zeta\left(p\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n^p - X_n^{p-1}}{n^{p-1}}. \tag{11.8}$$

Lemma 11.2 de $\mathbf{a} = \mathbf{1}$ alındığında hem (11.6) hem de (11.7) görülür.

$\mathbf{x} = (x_1, 0, \ldots)$ olduğuda (11.6) da eşitlik vardır. Dolayısıyla en iyi sabit $\zeta(p)^{1/p}$ dir. Ayrıca, Lemma 5.1 den (11.8) in sağ tarafı çıkar ve böylece $\mathbf{x}$ yukarıdaki forma sahip olmadığı sürece (11.6) daki eşitsizlik kesindir.

Benzer bir argüman ile $\mathbf{x}{=}\mathbf{0}$ olmadıkça (11.7) deki eşitsizlik kesindir. $(p-1)^{1/p}$ sabitinin mümkün olan en iyi değer olduğunu görmek için $\mathbf{x} = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$ (n. konum 1) alınır, Lemma 5.1 uygulanır ve $n \to \infty$ limiti alınır. □

Problem 11.4. $1 < p < 2$ olduğunda (11.6) daki ve $p > 2$ olduğunda (11.7) deki en iyi sabit nedir? Eşitlik durumları nelerdir? ($\beta\left(p\right) \geq p-1$ olduğu gösterilebilir ve $p \geq 2$ olduğunda bunun doğru değer olduğu akla uygundur.)

Teorem 11.3 hakkında iki yorum eklenebilir. İlki $\alpha(2), \alpha(3), \ldots$ değerlerini bulmak için dikkat çekici basit bir yöntem verir; Tam teoremdeki ifadeyi öneren (ancak kanıt değil) buydu. Benzer bir argüman $\beta(3), \beta(4), \ldots$ için de sunulabilir. İkinci yorum Teorem 11.3 ile "ℓ^p deki kısmi toplamlar" tekniğini (bkz. [5, Bölüm 2]) ilişkilendirir. Problem 11.4, bu tekniğin küçük bir genişlemesine ihtiyaç duyar gibi görünüyor, ne yazıktır ki böyle bir genişlemeyi sağlatamayacağız.

p bir tamsayı olduğunda (11.6) nın ispatı: $\mathbf{x}$ negatif olmayan terimler içeren bir dizi ise $M = \max\{k_1, \ldots, k_p\}$ ve $m = \min\{k_1, \ldots, k_p\}$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^p &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}\sum_{k_1=1}^{n}\cdots\sum_{k_p=1}^{n} x_{k_1}\ldots x_{k_p} \\
&= \sum_{k_1=1}^{\infty}\cdots\sum_{k_p=1}^{\infty} x_{k_1}\ldots x_{k_p}\sum_{n=M}^{\infty}\frac{1}{n^p} \\
&\le \zeta(p)\sum_{k_1=1}^{\infty}\cdots\sum_{k_p=1}^{\infty} x_{k_1}\ldots x_{k_p}\frac{1}{M^{p-1}} \\
&\le \zeta(p)\sum_{k_1=1}^{\infty}\cdots\sum_{k_p=1}^{\infty} x_{k_1}\ldots x_{k_p}\frac{m}{k_1\ldots k_p} \quad \text{(Lemma 5.1 den)} \\
&= \zeta(p)\sum_{k_1=1}^{\infty}\cdots\sum_{k_p=1}^{\infty}\frac{x_{k_1}}{k_1}\cdots\frac{x_{k_p}}{k_p}\sum_{n=1}^{m} 1 \\
&= \zeta(p)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=n}^{\infty}\frac{x_k}{k}\right)^p
\end{aligned}$$

sağlanır.

Eşitsizlik (11.7) aşağıdaki gibi yeniden formüle edilebilir.

Sonuç 11.5. $1 < p \le 2$ ve $\mathbf{y}$, azalan bir sıfır dizisi olsun. Bu durumda $\mathbf{y}=\mathbf{0}$ olmadıkça

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} y_k - y_{n+1}\right)^p > \frac{1}{p-1}\sum_{k=1}^{\infty} y_k^p \tag{11.9}$$

sağlanır. Sabit mümkün olanların en iyisidir.

Kanıt. (11.7) de $y_n = \sum_{k=n}^{\infty}\frac{|x_k|}{k}$ olarak alınsın. □

(11.9) eşitsizliğini [5] ve [8] de çalışılmış türlerden biri olarak kabul ederiz. Bu makalelerdeki ilgi matrisler için alt sınır bulmaktır:

$$\|A\mathbf{y}\|_p \ge \lambda\|\mathbf{y}\|_p \tag{11.10}$$

burada **y** negatif olmayan azalan herhangi bir dizidir. (Bu, (8.1) deki ile aynı problem değildir; onun çözümü çok farklı fikirleri kullanır.) A nın negatif olmayan terimlere sahip olması durumunda [5, Teorem 2] de λ için mümkün olan en iyi değer verilmiştir:

$$\lambda = \inf_{m\geq 1} \left(\frac{1}{m} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{m} a_{n,k} \right)^p \right)^{1/p}. \tag{11.11}$$

Sonuç 11.5 aşağıdaki A matrisi için alt sınırı $(p-1)^{-1/p}$ olarak verir:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 & & \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -1 & \\ . & . & . & . & . \end{pmatrix}$$

ve Lemma 5.1 in sayesinde bu değer, (11.11) i uygulayarak elde edilenle aynı olurdu.

A matrisinin bazı terimleri negatif olduğundan (11.11) uygulanamaz. Ancak A nın satırlarının kısmi satırları negatif değildir ve bu (11.11) in ispatındaki önemli içeriklerden biriydi. Altta yatan tekniğin (ℓ^p deki kısmi toplamlar) (11.9) u kapsayacak şekilde genişletilip genişletilemeyeceği bilinmiyor. Sonuç 11.5 her durumda ilgi çekicidir çünkü her iki işaretli terimlere sahip matrisler için (11.10) daki gibi ilk aşikar olmayan altsınırı verir.

Kaynakça

[1] Programma van de jaarlijkse prijsvragen, Nieuw Arch voor Wiskunde (1) 19 70-76 (1971)

[2] Aliprantis C.D., Burkinshaw O.: Positive Operators. Springer, Dordrecht (2006).

[3] Aliprantis C.D., Tourky R.: Cones and Duality. Graduate Studies in Mathematics 84, American Mathematical Society, Providence (2007).

[4] Beesack P.R., Heinig H.: Hardy's inequalities with indices less than 1. Proc. Amer. Math. Soc. 83 (1981), 532-536.

[5] Bennett, G.: Lower bounds for matrices. Linear Algebra and Appl. 82, 81-98 (1986)

[6] Bennett, G.: Factorizing the classical inequalities. Mem. Am. Math. Soc. 120(576), viii+130 pp (1996)

[7] Bennett, G.: Some elementary inequalities. Quart Jour. Math. (Oxford) 38 (1987), 401-425; 39 (1988), 385-400; 42 (1991), 149-174.

[8] Bennett, G.: Lower bounds for matrices, II. Canad. Jour. Math. 44 (1992), 54-74.

[9] Carleman T.: Sur les functions quasi-analytiques. Fifth Scand. Math. Congress (1923), 181-196.

[10] Cochran J.A., Lee C.S.: Inequalities related to Hardy's and Heinig's. Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 96 (1) (1984), 1-7.

[11] Copson F.T.: Note on series of positive terms. Jour. Loud. Math. Soc. 2 (1927), 9-12 and 3 (1928), 49-51.

[12] Emel'yanov E.Yu.: Infinitesimals in ordered vector spaces. Vladikavkaz. Mat. Zh. 15(1) (2013) 19-24.

[13] Emel'yanov E.Yu.: Archimedean cones in vector spaces. J. Convex Anal. 24(1) (2017) 169-183.

[14] Hardy G.H.: Notes on some points in the integral calculus. LI, Mess, of Math. 48 (1919), 107-112.

[15] Hardy G.H.: An inequality for Hausdorff means. Jour. Lond. Math. Soc. 18 (1943), 46-50.

[16] Hardy G.H.: Divergent series. Oxford University Press, 1949.

[17] Hardy G.H., Littlewood, J.E., Polya G.: Inequalities. 2nd edition, Cambridge University Press, 1967.

[18] Hausdorff F.: Summationsmethoden und Momentfolgen, I, Math. Z. 9 (1921), 75-109.

[19] Jagers A.A.: A note on Cesàro sequence spaces, Nieuw Arch, voor Wiskunde (3) 22, 113-124 (1974)

[20] Knopp K.: Uber Reihen mit positiven Gliedern. Jour. Lond. Math. Soc. 3 (1928), 205-211 and 5 (1930), 13-21.

[21] Leibowitz G.: Discrete Hausdorff transformations. Proc. Amer. Math. Soc. 38 (3) (1973), 541-544.

[22] Love E.R.: Inequalities related to Carleman's inequality. Inequalities (Birmingham, 1987), 135-141, Lecture Notes in Pure and Appl. Math. 129, Dekker, New York, 1991.

[23] Luxemburg W.A.J. , Zaanen A.C.: Riesz Spaces I. North-Holland, Amsterdam (1971).

[24] Paulsen V.I., Tomforde M.:Vector spaces with an order unit. Indiana Univ. Math. J. 58(3) (2009) 1319-1359.

[25] Rhoades B.E.: Generalized Hausdorff matrices bounded on ℓ^p and c. Acta Sci. Math. 43 (1981), 333-345.

[26] Veksler A.I.: Archimedean principle in homomorphic images of l-groups and of vector lattices. Izv. Vysš. Učebn. Zaved. Mat. 54(4) (1966) 33-38.

[27] Zaanen A.C.: Riesz Spaces II. North-Holland, Amsterdam (1983).

[28] Zeller K., Beekman W.: Theorie der Limitierungsverfahren, Ergebnisse der Math. 15, Springer, Berlin, 1970.