T.C.
İSTANBUL KÜLTÜR ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

SERBEST BANACH ÖRGÜLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Burcu AZAM
2000006038

Anabilim Dalı: Matematik ve Bilgisayar Bilimleri
Program: Matematik ve Bilgisayar Bilimleri

Tez Danışmanı: Dr. Öğr. Üyesi Uğur GÖNÜLLÜ

HAZİRAN 2022

T.C.
İSTANBUL KÜLTÜR ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

SERBEST BANACH ÖRGÜLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
Burcu AZAM
2000006038

Anabilim Dalı:	Matematik ve Bilgisayar Bilimleri
Program:	Matematik ve Bilgisayar Bilimleri

Tez Danışmanı :	Dr. Öğr. Üyesi Uğur GÖNÜLLÜ
Diğer Jüri Üyeleri :	Prof. Dr. Mert ÇAĞLAR
	Dr. Öğr. Üyesi Ezgi ERDOĞAN

HAZİRAN 2022

Önsöz

Yüksek lisans tez çalışmasının konusunu öneren, öğrencisi olmaktan her zaman gurur duyacağım danışmanım Dr. Öğr. Üyesi Uğur GÖNÜLLÜ'ye ve tüm Matematik ve Bilgisayar Bilimleri bölümü hocalarına teşekkür ederim. Çalışmamda; hayatım boyunca sarsılmaz desteğini hissettiğim annem Gülten DİLEK, Babam İbrahim DİLEK'e ; aynı zamanda meslektaşım olan çok değerli ablam Ayşe İlknur DİLEK'e ve Sevgili eşim Timuchin AZAM'a çok teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

Üniversitesi : İstanbul Kültür Üniversitesi

Enstitüsü : Lisansüstü Eğitim Enstitüsü

Anabilim Dalı : Matematik ve Bilgisayar Bilimleri

Programı : Matematik ve Bilgisayar Bilimleri

Tez Danışmanı : Dr. Öğr. Üyesi Uğur GÖNÜLLÜ

Tez Türü ve Tarihi : Yüksek Lisans - Haziran 2022

ÖZET

SERBEST BANACH ÖRGÜLERİ

Burcu AZAM

Banach örgüleri ve büzülme örgü homomorfizmleri kategorisinde serbest Banach örgülerinin varlığını tanımlar ve kanıtlarız ve onların bazı temel özelliklerini veririz.

Anahtar Kelimeler: Vektör örgüsü, Banach örgüsü, Örgü homomorfizm

University : İstanbul Kültür University

Institute : Institute of Graduate Education

Science Programme : Mathematics and Computer Science

Programme : Mathematics and Computer Science

Supervisor : Assist.Prof.Dr. Uğur GÖNÜLLÜ

Degree Awarded and Date : June 2022

ABSTRACT

FREE BANACH LATTICES

Burcu AZAM

We define and prove the existence of free Banach lattices in the category of Banach lattices and contractive lattice homomorphisms, and establish some of their fundamental properties.

Keywords: Vector lattice, Banach lattices, Lattice homomorphism

Bölüm 1

Giriş

Serbest nesneler analizde cebirdeki kadar önemli bir rol oynamamıştır, yine de bu nesne üzerinde, esas olarak beklenebilecek sonuçlarla ilgili bazı çalışmalar yapılmıştır. Örneğin, serbest Banach uzaylarının varlığı hemen hemen genel bir bilgidir, ancak bu keyfi bir I indeks kümesi için $\ell_1(I)$ biçiminde olduğu için çok ilgi çekici değildir. Ayrıca, keyfi sayıda üreteçler üzerindeki serbest vektör örgülerinin varlığı da uzun zaman önce kurulmuştur ve gerçek sürprizler barındırmamaktadır, ayrıntılar için [6] veya [8]'e bakınız. Bu çalışmada, serbest Banach örgüleri hakkında oldukça şaşırtıcı sonuçlar verilmiş ve incelenmiştir.

Eğer varsa, $\mathfrak{a}$ üreteçleri üzerindeki serbest Banach örgüsü en az bir örgü norm için $\mathfrak{a}$ üreteçleri üzerindeki serbest vektör örgüsünün tamamlanışı olması gerektiği neredeyse açıktır. Bu istenen normun gerçekte var olduğu kanıtlanabilir, ancak bunu somut ve kolayca belirlenebilir terimlerle tanımlamak o kadar kolay değildir. Gerçekten, $\mathfrak{a} = 1$ durumu dışında, bu hiçbir şekilde bir klasik Banach örgü normu değildir. Aslında, sadece $\mathfrak{a}$ sonlu olması durumunda, $\mathfrak{a}$ üreteçleri üzerindeki serbest Banach örgüsü bir AM-uzayına izomorfiktir.

Eldeki bu Yüksek Lisans tez çalışmasında B. de Pagter ve A. W. Wickstead'in [13] "Free and Projective Banach Lattices" başlıklı makalesinin bir kısmı detaylı olarak incelenmiş ve çalışılmıştır. Bu makaleden sonra Serbert ve Projektif Banach örgüleri fonksiyonel analizin aktif çalışma konularından olmuştur [1, 2, 3, 4, 5, 11, 17].

İkinci bölüm esas olarak çalışmada kullanılacak gösterimler ve ön bilgilerden oluşmaktadır ve üçüncü bölümde mevcut serbest vektör örgüleri teorisi özetlenmektedir. Daha sonra dördüncü bölümde serbest Banach örgülerinin tanımı ve varlığı ispatlanmaktadır ve beşinci bölümde bir kompakt Hausdorff uzay üzerindeki bir gösterilim verilmektedir. Son olarak altıncı bölümde serbest Banach örgülerinin bazı temel özellikleri incelenmektedir. Bu çalışmanın Banach örgüleri ve lineer örgü homomorfizmleri kategorisinde yer aldığını vurgulayalım. İnjektif Banach örgülerinin önemli bir teorisi vardır, ancak bu Banach örgüleri ve pozitif (veya regüler) operatörler bağlamında belirlenir. Bu nedenle, iki kavram arasında herhangi bir dualite beklemek için hiçbir neden yoktur.

Bölüm 2

Ön Bilgiler

Bu bölümde çalışmamız için gerekli olan temel kavramlar ve bazı sonuçlar verilmiştir. Bu çalışma boyunca söz edilen tüm vektör uzayları gerçel sayılar cismi üzerinde tanımlıdır.

Banach Uzayı: $(E, \|.\|)$ bir normlu uzay ve $(x_n) \subset E$ bir dizi olsun. Her $\epsilon > 0$ için bir n_0 bulunduğunda her $n, m \geq n_0$ için $\|x_n - x_m\| < \epsilon$ oluyorsa (x_n) dizisine E içinde bir Cauchy dizisi denir.

Eğer E içindeki her Cauchy dizisi, E'deki norma göre yakınsak ise E uzayına Banach uzayı denir.

Vektör Örgüsü: E bir sıralı vektör uzayı ve $\emptyset \neq A \subset E$ olsun. Her $x \in A$ için $x \leq y$ olacak şekilde bir $y \in E$ varsa y vektörüne A için bir üst sınır denir. Her $x \in A$ için $x \leq z$ ve $z \in E$ olduğunda $y \leq z$ ise y vektörüne A'nın en küçük üst sınırı veya supremumu denir ve sup$A$ ile gösterilir.

E, bir sıralı vektör uzayı olsun. Her $x, y \in E$ için $\{x, y\}$ kümesinin supremumu ve infumumu E uzayında varsa E'ye bir vektör örgü ve Riesz uzayı denir ve aşağıdaki gösterimler kullanılır:

$$x \vee y = \sup\{x, y\}$$
$$x \wedge y = \inf\{x, y\}.$$

Bu bölüm boyunca E bir vektör örgüyü gösterecektir.

Sıra Birim: her $x \in E$ için $|x| \leq \lambda e$ olacak şekilde bir $\lambda \in \mathbb{R}$ varsa $e \in E$ vektörüne sıra birim denir.

Zayıf Sıra Birim: $x \in E$ olmak üzere $y \perp x$ ve $y \in E$ olduğundan $y = 0$ ise x vektörüne zayıf sıra birim denir.

İdeal: A, E'nin boştan farklı bir alt kümesi olsun. $x, y \in E$ olmak üzere $|x| \leq |y|$ ve $y \in A$ iken $x \in A$ oluyorsa A'ya katı denir. E'nin katı olan bir vektör uzayına ideal denir.

Band: $A \subseteq E$ bir ideal olsun. $\{x_\alpha\} \subseteq A$ ve $0 \leq x_\alpha \uparrow x$ iken $x \in A$ oluyorsa, A'ya E'de band denir.

$D \subseteq E$ alt küme olmak üzere D'nin diki aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$D^d = \{y \in E : x \perp y \, (\forall x \in D)\} .$$

$B \subseteq E$ bir band olmak üzere $E = B \oplus B^d$ ise B ye projeksiyon band denir.

Örgü Norm: E üzerine tanımlı $\|.\|$ norma $x, y \in E$ için $|x| \leq |y|$ olduğunda $\|x\| \leq \|y\|$ oluyorsa örgü norm denir. Örgü normlu bir vektör örgüye normlu vektör örgü denir. Tam bir normlu vektör örgüye Banach örgü denir.

Arşimedyan: $x \in E$ ve $x \geq 0$ olmak üzere

$$\inf \left\{ \frac{1}{n} x : n \in \mathbb{N} \right\} = 0$$

ise E vektör örgüsüne Arşimedyan vektör örgü denir. Örneğin, Banach örgüleri her zaman Arşimedyandır.

Dedekind Tam Vektör Örgü: Boştan farklı üstten sınırlı her alt kümesi bir supremuma (ya da boştan farklı alttan sınırlı her alt kümesi bir infumuma) sahip olan vektör örgüye Dedekind Tam vektör örgü denir.

σ-Dedekind Tam Vektör Örgü: Üstten sınırlı sayılabilir her alt kümesi bir supremuma sahip olan vektör örgüye σ-Dedekind Tam vektör örgü denir.

Alt örgü: Bir E vektör örgüsünün alt uzayı sonlu supremum ve infimuma göre kapalı ise vektör alt örgü veya alt örgü olarak isimlendirilir.

Atom: $x \in E$ ve $x > 0$ olmak üzere $0 \leq y_1, y_2 \leq x$ ve $y_1 \wedge y_2 = 0$ olduğunda $y_1 = 0$ veya $y_2 = 0$ oluyorsa x vektörüne atom denir. E bir arşimedyan vektör örgü ise x in atom olması şuna denktir: $0 \leq y \leq x$ ise en az bir $\lambda \in \mathbb{R}$ için $y = \lambda x$ sağlanır.

E ve F iki vektör örgü ve $T : E \to F$ bir lineer dönüşüm olsun. Her $x, y \in E$ için

$T(x \vee y) = Tx \vee Ty$ eşitliği sağlanırsa T ye bir örgü homomorfizmi denir. Ayrıca, T örgü homorfizmi bijektif ise bir örgü izomorfizmi olarak adlandırılır.

Şimdi, fonksiyonlar ve fonksiyon uzayları ile ilgili kullanacağımız gösterimleri vereceğiz. A ve X boş olmayan kümeler olmak üzere her zamanki gibi X^A ile A'dan X'e tüm fonksiyonların kümesi gösterilir. Eğer $\emptyset \neq B \subseteq A$ ise $r_B : X^A \to X^B$ kısıtlama fonksiyonu her $\xi \in X^A$ için $r_B\xi = \xi_{|B}$ şeklinde tanımlanır. Açıkça, r_B sürjektif (örten) fonksiyondur. Bazı durumlarda $r_B(\xi)$ yerine ξ_B yazacağız.

X^A üzerindeki tüm gerçel değerli fonksiyonların uzayı $\mathbb{R}^{X^A}$, noktasal işlemler altındaki bir vektör örgüdür. Yine, B'yi A'nın boş olmayan bir alt kümesi olduğunu göz önünde bulundurarak $j_B : \mathbb{R}^{X^B} \to \mathbb{R}^{X^A}$ fonksiyonu her $\xi \in X^A$ ve $f \in \mathbb{R}^{X^B}$ için $(j_B f)(\xi) = f(\xi_B)$ biçiminde tanımlanır. Kolaylıkla, j_B fonksiyonunun bir injektif örgü homomorfizmi olduğu görülür. j_B nin görüntü kümesi için verilen aşağıdaki ifade kolayca sağlanır.

Lemma 2.1. A, B ve X boş olmayan kümeler olmak üzere $B \subseteq A$ ve $f \in \mathbb{R}^{X^A}$ ise aşağıdakiler denktir:

(1) $f \in j_B(\mathbb{R}^{X^B})$.

(2) $\xi, \eta \in X^A$ ve $\xi_B = \eta_B$ ise $f(\xi) = f(\eta)$ eşitliği sağlanır.

Şimdi, $X \subseteq \mathbb{R}$ ve $0 \in X$ varsayımı altında bazı sonuçlar geliştireceğiz. Buna göre, $\xi \in X^A$, $\emptyset \neq B \subseteq A$ ve B'nin karakteristik fonksiyonu χ_B ise noktasal çarpım $\xi\chi_B \in X^A$ anlamına gelir.

Lemma 2.2. Eğer $\emptyset \neq B \subseteq A$ ve $0 \in X \subseteq \mathbb{R}$ ise aşağıdaki gibi tanımlanan $P_B : \mathbb{R}^{X^A} \to j_B(\mathbb{R}^{X^B})$ fonksiyonu bir örgü homomorfizmi ve $j_B(\mathbb{R}^{X^B})$ üzerine bir izdüşümdür:

$$(P_B f)(\xi) = f(\xi\chi_B) \quad (\xi \in X^A,\ f \in \mathbb{R}^{X^A})$$

Ayrıca, $B_1, B_2 \subseteq A$ ve $B_1 \cap B_2 \neq \emptyset$ ise $P_{B_1}P_{B_2} = P_{B_2}P_{B_1} = P_{B_1 \cap B_2}$ sağlanır.

Kanıt. P_B'nin X^A'nın kendi içinde iyi tanımlanmış bir vektör örgü homomorfizmi olduğu açıktır. Eğer $\xi, \eta \in X^A$ ve $\xi_B = \eta_B$ ise $(P_B f)(\xi) = f(\xi\chi_B) = f(\eta\chi_B) = (P_B f)(\eta)$, ve böylece Lemma 2.1 den her $f \in \mathbb{R}^{X^A}$ için $P_B f \in j_B(\mathbb{R}^{X^B})$ bulunur. Ayrıca, $f \in \mathbb{R}^{X^B}$ ise herhangi bir $\xi \in X^A$ için ξ ve $\xi\chi_B$ fonksiyonları B üzerinde eşit olduklarından ve tekrar Lemma 2.1'i kullanarak $P_B(j_Bf)(\xi) = (j_Bf)(\xi\chi_B) = (j_Bf)(\xi)$ elde edilir. Dolayısıyla, P_B gerçekten bir izdüşümdür.

Son olarak, $f \in \mathbb{R}^{X^A}$ ve $\xi \in X^A$ ise

$$\begin{aligned} P_{B_1}P_{B_2}f(\xi) &= (P_{B_2})(f\chi_{B_1}) \\ &= f(\xi\chi_{B_1}\chi_{B_2}) \\ &= f(\xi\chi_{B_1\cap B_2}) \\ &= (P_{B_1\cap B_2}f)(\xi) \end{aligned}$$

olur, ki bu $P_{B_1}P_{B_2} = P_{B_1\cap B_2}$ olduğunu gösterir. Benzer şekilde, $P_{B_2}P_{B_1} = P_{B_2\cap B_1} = P_{B_1\cap B_2}$ bulunur, ve bu da ispatı tamamlar. □

Bundan sonra $\mathbb{R}^{X^B}$'yi $\mathbb{R}^{X^A}$ nın vektör alt örgüsü $j_B(\mathbb{R}^{X^B})$ ile özdeşleştireceğiz.

D kümesi bir E vektör örgüsünün boş olmayan bir alt kümesi ise $\langle D\rangle$ ile L de D tarafından üretilen vektör alt örgü gösterilecektir. D'nin tüm elemanları, sonlu sayıda çarpma, toplama, supremum ve infimum işlemlerinin uygulanmasıyla elde edilebilir ve aşağıdaki eşitlik sağlanır:

$$\begin{aligned} \langle D\rangle &= \left\{ \bigvee_{i=1}^{n} x_j - \bigvee_{j=1}^{n} y_j : n \in \mathbb{N},\, x_1, x_2, ..., x_n, y_1, y_2, ..., y_n \in \operatorname{Span} D \right\} \\ &= (\operatorname{Span} D)^{\wedge\vee} \\ &= (\operatorname{Span} D)^{\vee\wedge} \end{aligned}$$

Bu gözlemin aşağıdaki basit sonucu doğrudan kanıtlanabilir:

Lemma 2.3. *L ve M vektör örgüler olmak üzere $T : L \to M$ bir vektör örgü homomorfizmi ve $\emptyset \neq D \subseteq L$ ise $\langle T(D)\rangle = T(\langle D\rangle)$ olur.*

$X = \mathbb{R}$ durumunda $\mathbb{R}^A$ uzayı üzerinde çarpım topolojisini (A üzerinde noktasal yakınsaklık topolojisi) göz önüne alabiliriz. Tanımdan, bu topoloji her bir $a \in A$ için $\delta_a : \xi \mapsto \xi(a)$ fonksiyonlarını sürekli yapan en zayıf topolojidir. Sonuç olarak, $\langle\{\delta_a : a \in A\}\rangle \subset C(\mathbb{R}^A)$ olur. Aslında bundan daha iyisini yapabiliriz. Bir $f : \mathbb{R}^A \to \mathbb{R}$ fonksiyonu, her $\xi \in \mathbb{R}^A$ ve $t \in [0, \infty)$ için $f(t\xi) = tf(\xi)$ koşulunu sağlıyorsa pozitifli homojen veya kısaca homojen olarak adlandırılır. $\mathbb{R}^A$ üzerindeki sürekli homojen gerçel değerli fonksiyonların kümesi, $H(\mathbb{R}^A)$ uzayı, $C(\mathbb{R}^A)$' vektör örgüsünü bir vektör alt örgüsüdür, ve açıkça $\langle\{\delta_a : a \in A\}\rangle \subset H(\mathbb{R}^A)$ görülür. Öte yandan, $\Delta_A = [-1,1]^A$ olarak alındığında Δ_A üzerindeki sürekli homojen gerçel değerli fonksiyonların kümesi $H(\Delta_A)$, $C(\Delta_A)$'yı supremum normu ile donattığımızda $C(\Delta_A)$'nın kapalı bir vektör alt örgüsüdür.

Bölüm 3

Serbest Vektör Örgüleri

Bu bölümde, hem bu çalışmayı mümkün olduğunca kendi kendine yeterli kılmak için hem gösterimimizi kurmak için (ki bu, serbest vektör örgüleri üzerine diğer kaynaklarda kullanılanlarla örtüşmeyebilir) hem de daha sonra kullanacağımız bazı özellikleri belirtmek için serbest vektör örgüleri teorisinin çoğunu özetleyeceğiz.

Tanım 3.1. A boş olmayan bir küme olmak üzere A üzerinde bir *serbest vektör örgü*, $(F, \imath)$ ikilisidir burada F bir vektör örgü ve $\imath : A \to F$ bir fonksiyon öyle ki herhangi bir E vektör örgüsü ve herhangi bir $\phi : A \to E$ fonksiyonu için $\phi = T \circ \imath$ eşitliğini sağlayan tek türlü belirli bir $T : F \to E$ vektör örgü homomorfizmi vardır.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\imath"] \arrow[dr, "\phi"'] & F \arrow[d, "\exists!\, T"] \\ & E \end{tikzcd}$$

Tanımdan, $\imath$ fonksiyonunun injektif olması gerektiği sonucu çıkar, çünkü ϕ fonksiyonunu injektif yapacak şekilde E ve ϕ seçebiliriz.

Önerme 3.2. $(F, \imath)$, A üzerinde bir serbest vektör örgü ise F tam olarak $\imath(A)$ tarafından üretilen vektör örgüye eşittir.

Kanıt. G, $\imath(A)$ tarafından üretilen F vektör örgüsünün vektör alt örgüsü olsun. $\phi : A \to G$ fonksiyonunu $\phi(a) = \imath(a)$ olarak tanımlayın, o zaman tanımdan $a \in A$ için $T(\imath(a)) = \phi(a) = \imath(a)$ eşitliğini sağlayan tek türlü belirli $T : F \to G$ vektör örgü homomorfizminin var olduğu sonucu çıkar. $j : G \to F$ içerme fonksiyonu olmak üzere $j \circ T : F \to F$ vektör örgü homomorfizmi her $a \in A$ için $(j \circ T)(\imath(a)) = j(\imath(a)) = \imath(a)$

eşitliğini sağlar. Aynı zamanda $I_F : F \to F$ özdeşlik fonksiyonu $I_F(\imath(a)) = \imath(a)$ olacak şekilde bir vektör örgü homomorfizmidir. A'dan F'ye $a \mapsto \imath(a)$ fonksiyonuna serbest vektör örgü tanımının tek türlü belirlilik kısmını uygulamak bize bu iki fonksiyonun eşit olduğunu söyler, yani $j \circ T = I_F$. Buradan $F \subseteq G$ olduğunu görülür ve dolayısıyla $F = G$ eşitliği elde edilir.. $\square$

Bir serbest vektör örgü tanımından aşağıdaki sonuç kolayca kanıtlanabilir.

Önerme 3.3. $(F, \imath)$ ve (G, κ), A kümesi üzerinde serbest vektör örgüleri iseler tek türlü belirli bir $T : F \to G$ vektör örgü izomorfizmi vardır öyle ki her $a \in A$ için $T(\imath(a)) = \kappa(a)$ sağlanır.

Bunu göz önünde bulundurarak, A kümesi üzerindeki bir $(F, \imath)$ serbest vektör örgüyü, *A serbest vektör örgü* olarak (veya bazen A kümesini bu serbest vektör örgünün bir alt kümesiyle özdeşleştirdiğimizde *A tarafından üretilen serbest vektör örgü olarak*) atıfta bulunacağız. Bunu FVL(A) ile göstereceğiz. A ve B eşit kardinaliteye sahip kümelerse, o zaman FVL(A) ve FVL(B) izomorfik vektör örgülerdir, böylece FVL(A) sadece A kümesinin kardinalitesine bağlıdır. Bu nedenle A kümesinin kardinalitesi $\mathfrak{a}$ olduğunda FVL(A) için FVL$(\mathfrak{a})$ gösterimini de kullanacağız. Bu notasyon literatürde başka yerlerde de bulunabilir. A ve B aynı kardinaliteye sahip olduğu zaman bile, $B \subset A$ olduğunda FVL(B)'nin FVL(A)'ya öz içermelerini kullanabilmek için her iki notasyonu da kullanmayı devam ettireceğiz.

Eğer $\imath : A \to \mathrm{FVL}(A)$ tanımda belirtilen A kümesinin FVL(A) içine gömülmesi ise o zaman $\imath(a)$ için sık sık δ_a yazacağız ve $\{\delta_a : a \in A\}$ kümesini FVL(A)'nın *serbest üreteçleri* olarak adlandıracağız.

$\imath(A)$, bir üretici küme olduğunu belirtmek için örgü homomorfizminin tek türlü belirliliğinden vazgeçerek bir serbest vektör örgünün tanımını yeniden ifade etmek bazen yararlıdır. Bunun ispatı yukarıdaki sonuçlardan hemen gelir.

Önerme 3.4. A boş olmayan bir küme ise, F vektör örgüsü A üzerindeki serbest vektör örgüsüdür ancak ve ancak aşağıdakiler sağlanır:

(1) $a \neq b$ için $\delta_a \neq \delta_b$ olacak şekilde $\{\delta_a : a \in A\} \subset F$ altkümesi F vektör örgüsünü bir vektör örgü olarak üretecek şekilde vardır.

(2) Her E vektör örgüsü ve herhangi bir $\{x_a : a \in A\} \subset E$ ailesi için bir $T : F \to E$ vektör örgü homomorfizması vardır öyle ki her $a \in A$ için $T(\delta_a) = x_a$ olur.

Aşağıdaki basit sonuç daha sonraki bölümlerde kullanılacaktır.

Önerme 3.5. A boş olmayan bir küme ve $\{\delta_a : a \in A\}$ kümesi FVL(A)'nın serbest üreteçleri olsun. B ve C, $B \cap C \neq \emptyset$ olan A'nın boş olmayan altkümeleri olsun.

(1) $\{\delta_b : b \in B\}$ tarafından üretilen FVL(A)'nın vektör alt örgüsü FVL(B) serbest vektör örgüsüdür (izomorfiktir).

(2) FVL(A)'dan FVL(B)'ye bir P_B örgü homomorfizm izdüşümü vardır.

(3) $P_C P_B = P_B P_C = P_{B\cap C}$.

Kanıt. **(1)** F ile FVL(A) nın $\{\delta_b : b \in B\}$ tarafından üretilen vektör alt örgüsü gösterilsin. E bir vektör örgüsü ve $\pi : B \to E$ herhangi bir fonksiyon olsun. Tek türlü belirli bir T : FVL(A) $\to E$ vektör örgü homomorfizmi vardır öyle ki her $b \in B$ için $T(\delta_b) = \pi(b)$ ve her $a \in A \setminus B$ için $T(\delta_a) = 0$ sağlanır. T'nin F'ye kısıtlanması $S : F \to E$ bir vektör örgü homomorfizmi ve $S(\delta_b) = \pi(b)$ eşitliğini verir. Önerme 3.4'ten $F =$ FVL(B) çıkar.

(2) FVL(A)'nın serbestlik özelliği

$$P_B : \mathrm{FVL}(A) \to \mathrm{FVL}(A)$$

örgü homomorfizmini verir öyle ki $b \in B$ için $P_B(\delta_b) = \delta_b$, ve $a \in A \setminus B$ için $P_B(\delta_a) = 0$ olur. P_B, FVL(A)'nın üreteçlerini FVL(B) nın içine götürdüğünden P_B(FVL(A)) $\subseteq$ FVL(B) içermesine sahip oluruz. Ayrıca, P_B, FVL(B)'nin üreteçleri üzerindeki özdeşliktir, ve dolayısıyla P_B, FVL(B) üzerindeki özdeşlik lineer operatörü, böylece gerçekten bir izdüşümdür.

(3) Eğer $a \in B \cap C$ ise $P_C P_B \delta_a = P_B P_C \delta_a = P_{B\cap C}\delta_a = \delta_a$, ve eğer $a \notin B \cap C$ ise $P_C P_B \delta_a = P_B P_C \delta_a = P_{B\cap C}\delta_a = 0$'dır. Böylece, $P_B P_C$, $P_C P_B$ ve $P_{B\cap C}$ vektör örgü homomorfizmleri FVL(A) nın üreteçlerinin kümesi üzerinde çakışırlar, ve dolayısıyla eşittirler. □

Şimdiye kadar serbest vektör örgüleriyle ilgili tüm tartışmalarımız oldukça kuramsaldı, çünkü onların var olduğunu göstermedik. Ancak [6]'de (ayrıca [8]'e bakınız) onların var olduğu gösterilmiştir. Esas itibariyle aşağıdaki teorem sağlanır.

Teorem 3.6. Herhangi bir boş olmayan A kümesi için FVL(A) mevcuttur ve $\mathbb{R}^{R^A}$ nın δ_a $(a \in A)$ tarafından üretilen vektör alt örgüsüdür burada $\xi \in \mathbb{R}^A$ için $\delta_a(\xi) = \xi(a)$ olarak tanımlanır.

FVL(A) nın bu temsilinin yukarıda belirtilen serbest vektör örgülerin özellikleri ile nasıl etkileştiğini sormak mantıklıdır. Eğer $\emptyset \neq B \subseteq A$ ise $j_B : \mathbb{R}^{\mathbb{R}^B} \to \mathbb{R}^{\mathbb{R}^A}$ fonksiyonu $\mathbb{R}^{\mathbb{R}^B}$'nin $\mathbb{R}^{\mathbb{R}^A}$ içine bir vektör örgü gömmesidir. Bu tam olarak, Önerme 3.5'te belirtildiği gibi FVL(B)'nin FVL(A) içine gömülmesine karşılık gelir. Eğer δ_a ile $\mathbb{R}^A$ üzerinde $\xi \mapsto \xi(a)$ fonksiyonunu ve η_b ile $\mathbb{R}^A B$ üzerinde $\xi \mapsto \xi(b)$ fonksiyonunu gösterirsek $b \in B$ ve $\xi \in \mathbb{R}^A$ için

$$(j_B\eta_b)(\xi) = \eta_b(\xi_B) = \xi(b) = \delta_b(\xi)$$

eşitlikleri sağlanır, böylece $j_B\eta_b = \delta_b$ olur. j_B bir vektör örgü homomorfizmidir öyle ki j_B(FVL(B)), FVL(A) nın $\{\delta_b : b \in B\}$ tarafından üretilen vektör alt örgüsüdür ki bu tam olarak Önerme 3.5'te betimlenen yapıdır.

Ayrıca, $B \subseteq A$ ise FVL(B) $\subseteq$ FVL(A) $\subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{R}^A}$ içermelerini düşünebiliriz. Önerme 3.5 (2)'de tanımlanan P_B : FVL(A) $\to$ FVL(B) izdüşümü tam olarak *Lemma 2.2*'de açıklanan $P_B : \mathbb{R}^{\mathbb{R}^A} \to \mathbb{R}^{\mathbb{R}^B}$ izdüşümünün FVL(A) kümesine kısıtlanışıdır. Soyut izdüşümden ayırt etmek için bu izdüşümü geçici olarak $\tilde{P}_b$ ile göstereceğiz. Eşitliği sağladığımızda, bu ayrım gerekli olmayacak ve tildayı atacağız. P_B ve $\tilde{P}_b$'nin her ikisi de vektör örgü homomorfizmaları olduğundan FVL(A)'nın üreteçleri için bu eşitliği kanıtlamak yeterlidir. Eğer $b \in B$ ise $\xi \in \mathbb{R}^A$ için

$$(\tilde{P}_B\delta_b)(\xi) = \delta_b(\xi_{XB}) = (\xi_{XB})(b) = \xi(b) = \delta_b(\xi)$$

olduğundan $\tilde{P}_B\delta_b = \delta_b = P_B\delta_b$ olur. Öte yandan, $a \in A \setminus B$ ise $\xi \in \mathbb{R}^A$ için

$$(\tilde{P}_B\delta_a)(\xi) = \delta_a(\xi_{XB}) = 0$$

olduğundan $(\tilde{P}_B\delta_a)(\xi) = \delta_a(\xi_{XB}) = 0$ olur.

Aşağıdaki gözlemler daha sonra kullanılacaktır.

Önerme 3.7. A, boş olmayan bir küme ve $\mathcal{F}(A)$, A kümesinin tüm boş olmayan sonlu alt kümelerinin topluluğunu gösterirse aşağıdaki eşitlik sağlanır:

$$\mathrm{FVL}(A) = \bigcup_{B \in \mathcal{F}(A)} \mathrm{FVL}(B).$$

Kanıt. FVL(A)'nın herhangi bir elemanı sonlu sayıda $\{\delta_{a_1}, \delta_{a_2}, ..., \delta_{a_n}\}$ üreteçleri tarafından üretilen FVL(A)'nın vektör alt örgüsündedir, yani FVL($\{\delta_{a_1}, \delta_{a_2}, ..., \delta_{a_n}\}$) içinde yer alır. □

Önerme 3.8. A, sonlu bir küme ise $\sum_{a\in A} |\delta_a|$, FVL(A) için bir sıra birimdir (strong order unit).

Kanıt. FVL(A), $\{\delta_a : a \in A\}$ kümesi tarafından üretildiğinden ispat açıktır. □

Önerme 3.9. FVL(A) üzerindeki gerçel değerli vektör örgü homomorfizmaları tam olarak $\mathbb{R}^A$ nın noktalarındaki değerlendirmelerdir.

Kanıt. $\xi \in \mathbb{R}^A$ ise $\omega_\xi : f \mapsto f(\xi)$ fonksiyonunun $\mathbb{R}^{\mathbb{R}^A}$ üzerinde, ve dolayısıyla FVL(A) üzerinde bir gerçel değerli vektör örgü homomorfizmidir. Özellikle, $\omega_\xi(\delta_a) = \delta_a(\xi) = \xi(a)$ olduğunu not edelim. Tersine, ω, FVL(A) üzerinde bir gerçel değerli vektör örgü homomorfizmi ise $\xi \in \mathbb{R}^A$ elemanını her $a \in A$ için $\xi(a) = \omega(\delta_a)$ şeklinde tanımlayabiliriz. Şimdi, ξ için ω_ξ nın FVL(A) üzerinde bir gerçel değerli vektör örgü homomorfizması öyle ki $\omega_\xi(\delta_a) = \xi(a) = \omega(\delta_a)$ olduğunu görürüz. ω ve ω_ξ fonksiyonları FVL(A) nın üreteçlerinin herhangi bir kümesi üzerinde çakışırlar, böylece vektör örgü homomorfizmaları olarak eşit olurlar. □

Bölüm 4

Serbest Banach Örgüleri

Tanım 4.1. A boşdan farklı bir küme, X bir Banach örgüsü ve $\imath : A \to X$ sınırlı bir fonksiyon olsun. Eğer herhangi bir Y Banach örgüsü ve herhangi bir $\kappa : A \to Y$ sınırlı fonksiyonu için $\kappa = T \circ \imath$ ve $\|T\| = \sup\{\|\kappa(a)\| : a \in A\}$ eşitliklerini sağlayan tek türlü belirli bir $T : X \to Y$ vektör örgü homomorfizmi varsa $(X, \imath)$ çiftine *A üzerinde bir serbest Banach örgü* denir.

$\{\imath(a) : a \in A\}$ kümesi bir Banach örgü olarak X Banach örgüsünü ürettiği açıktır (Önerme 3.2).

Not 4.2. Tanımdan her bir $\imath(a)$ elemanının normunun tam olarak 1 olduğu elde edilir. Çünkü, her bir $a \in A$ için $\kappa(a) = 1 \in \mathbb{R}$ olarak tanımlaırsa var olduğu garanti edilen T fonksiyonunun normu 1 dir, böylece $1 = \|T(\imath(a))\| \leq \|\imath(a)\|$ sağlanır. Öte yandan, $\kappa = \imath$ alırsak T, normu 1 olan özdeşlik operatörüdür, dolayısıyla $\sup\{\|\imath(a)\| : a \in A\} = 1$ bulunur.

Önerme 4.3. Eğer $(X, \imath)$ ve (Y, κ) bir A kümesi üzerinde serbest Banach örgüleri ise (tek türlü belirli) bir $T : X \to Y$ izometrik örgü izomorfizmi vardır öyle ki her $a \in A$ için $T(\imath(a)) = \kappa(a)$ sağlanır.

Kanıt. $(X, \imath)$ serbest olduğundan önceki önerme ile $\|T\| = \sup\{\|\kappa(a)\| : a \in A\} = 1$ ve her $a \in A$ için $T(\imath(a)) = \kappa(a)$ eşitliğini sağlayan bir $T : X \to Y$ vektör örgü homomorfizmi vardır. Benzer şekilde, $S(\kappa(a)) = \imath(a)$ olan bir büzülme (contraction) $S : Y \to X$ vektör örgü homomorfizmi vardır. Tek türlü belirliliğe göre, $S \circ T$ ve $T \circ S$ bileşimleri özdeşlik operatörleri olmalıdır. Bu iddiamızı kanıtlamak için yeterlidir. $\square$

Serbest vektör örgü durumuna benzer şekilde, eğer varsa, A üzerindeki serbest Banach örgüsü için $\mathrm{FBL}(A)$ gösterimini kullanırız (daha sonra bunun varlığını göstereceğiz). A ve B kümeleri aynı kardinaliteye sahip olması durumunda, $\mathrm{FBL}(A)$ ve $\mathrm{FBL}(B)$ nın izometrik olarak sıra-izomorfik olduğunu bildiğimizden, bir $\mathfrak{a}$ kardinalitesini bir kümesi üzerinde bir serbest Banach örgüyü göstermek için $\mathrm{FBL}(\mathfrak{a})$ gösterimini de kullanacağız. Yine, $\imath(a)$ için δ_a gösterimini ve $\mathrm{FBL}(A)$ nın serbest üreteçleri olarak $\{\delta_a : a \in A\}$ kümesini kullanacağız.

İlk olarak serbest Banach örgülerinin gerçekten varlığını göstermek için aşağıdaki tanımı vereceğiz.

Tanım 4.4. A, boş olmayan bir küme olmak üzere $\mathrm{FVL}(A)^\sim$ vektör örgüsünden genişletilmiş negatif olmayan reellere aşağıdaki fonksiyonu tanımlayalım:

$$\|\phi\|^\dagger = \sup\{|\phi|(|\delta_a|) : a \in A\}.$$

Ayrıca, şu kümeyi tanımlayalım:

$$\mathrm{FVL}(A)^\dagger = \{\phi \in \mathrm{FVL}(A)^\sim : \|\phi\|^\dagger < \infty\}.$$

Açık olarak, $\mathrm{FVL}(A)^\dagger$, Dedekind tam $\mathrm{FVL}(A)^\sim$ vektör örgüsünün bir idealidir.

ϕ, her bir $|\delta_a|$ elemenında sıfır olan bir pozitif fonksiyonel olsun. $\mathrm{FVL}(A)$ daki her bir x elemanı üreteçlerin sonlu bir $\{a_k : 1 \leq k \leq n\}$ kümesi tarafından üretilen alt örgü tarafından içerilir. Önerme 3.8 ile $e = \sum_{k=1}^n |\delta_{a_k}|$ bu alt örgü için bir sıra-birimdir. Bu yüzden $|x| \leq \lambda e$ olacak şekilde bir $\lambda \in \mathbb{R}$ vardır öyle ki $|\phi(x)| \leq \phi(|x|) \leq \phi(\lambda e) = \lambda \sum_{k=1}^n \phi(|\delta_{a_k}|) = 0$ olur, ve dolayısıyla $\phi = 0$ bulunur. Açık olarak $\|\cdot\|^\dagger$, $\mathrm{FVL}(A)^\dagger$ üzerinde bir örgü normudur. Teorem 3.6'da verilen $\mathrm{FVL}(A)$ nın $\mathbb{R}^{\mathbb{R}^A}$ içine gömülmesi göz önüne alındığında, eğer $\xi \in \mathbb{R}^A$ ise $\omega_\xi \in \mathrm{FVL}(A)^\dagger$ olması için gerek ve yeter koşul $\xi : A \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun sınırlı olmasıdır, ve böylece $\|\omega_\xi\|^\dagger = \sup_{a\in A}|\xi(a)|$ eşitliği sağlanır. Lemma 3.9'a göre bu fonksiyonlar örgü homomorfizmleridir. Eğer A sonsuz bir küme ise bir sınırsız $\xi \in \mathbb{R}^A$ vardır ki $\omega_\xi \in \mathrm{FVL}(A)^\sim \setminus \mathrm{FVL}(A)^\dagger$ elemanının varlığını verir.

Tanım 4.5. A boş olmayan bir küme olmak üzere her $f \in \mathrm{FVL}(A)$ için

$$\|f\|_F = \sup\{\phi(|f|) : \phi \in \mathrm{FVL}(A)^\dagger_+,\ \|\phi\|^\dagger \leq 1\}$$

tanımlansın.

Önerme 4.6. Boş olmayan herhangi bir A kümesi için $\|\cdot\|_F$ fonksiyonu $\mathrm{FVL}(A)$ üzerinde bir örgü normudur.

Kanıt. İlk olarak $\|\cdot\|_F$ fonksiyonunun gerçel değerli olduğunu gösterelim: Önerme 3.7 ile herhangi bir $f \in \mathrm{FVL}(A)$ elemanı aslında sonlu bir $B \subseteq A$ alt kümesi için $\mathrm{FVL}(B)$ serbest vektör örgüsünde bulunur. Önerme 3.8 ile $\sum_{b\in B}|\delta_b|$, $\mathrm{FVL}(B)$ nın bir sıra-birimidir, böylece en az bir λ için $|f| \leq \lambda\sum_{b\in B}|\delta_b|$ eşitsizliği gerçeklenir. Eğer $\phi \in \mathrm{FVL}(A)^\dagger_+$ ve $\|\phi\|^\dagger \leq 1$ ise aşağıdaki sağlanır,

$$\phi(|f|) \leq \phi\Big(\lambda\sum_{b\in B}|\delta_b|\Big) = \lambda\sum_{b\in B}\phi|\delta_b| \leq \lambda\sum_{b\in B}1,$$

böylce, $\|f\|_F$ kesinlikle sonlu bir sayıdır.

Eğer $\|f\|_F = 0$ ise her $\phi \in \mathrm{FVL}(A)^\dagger_+$ için $\phi(|f|) = 0$ olur. Yukarıdaki gözlemi kullanarak, sınırlı herhangi bir $\xi : A \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için $f(\xi) = \omega_\xi(f) = 0$ bulunur. Fakat, $f \in \mathrm{FVL}(B)$ olacak şekilde sonlu bir $B \subset A$ alt kümesi vardır, öyle ki her $\xi \in \mathbb{R}^A$ için $f(\xi) = f(\xi_{XB})$ olur. Her bir ξ_{χ_B} sınırlı olduğundan her $\xi \in \mathbb{R}^A$ için $f(\xi) = 0$, ve dolayısıyla $f = 0$ olur.

$\|\cdot\|_F$ fonksiyonunun alt-lineer ve pozitifli homojen olduğu açıktır, böylece $\|\cdot\|_F$, $\mathrm{FVL}(A)$ üzerinde bir örgü normudur. $\square$

Özellikle her $a \in A$ için kesinlikle $\|\delta_a\|_F = 1$ sağlandığını not edelim. Aslında, bu yapı istediğimiz serbest Banach örgülerini verir.

Teorem 4.7. Boş olmayan herhangi bir A kümesi için $\|\cdot\|_F$ normu altında $\mathrm{FVL}(A)$ nın tamamlanışı ve $\imath : a \to \delta_a$ fonksiyonundan oluşan çift, A üzerinde serbest Banach örgüsüdür.

Kanıt. Y, herhangi bir Banach örgüsü ve Y_1, Y nin birim topu olmak üzere $\kappa : A \to Y_1$ fonksiyonunun var olduğunu kabul edelim. $\mathrm{FVL}(A)$ serbest olduğundan her $a \in A$ için $T(\imath(a)) = \kappa(a)$ olacak şekilde bir $T : \mathrm{FVL}(A) \to Y$ vektör örgü homomorfizmi vardır. Şunu iddia ederiz ki eğer $f \in \mathrm{FVL}(A)$ ve $\|\cdot\|_F \leq 1$ ise Y de $\|T_f\| = \big\||T_f|\big\| = T(|f|) \leq 1$ sağlanır, burada Y'nin normunun bir örgü normu ve T nin vektör örgü homomorfizmi olduğu kullanılmıştır. Eğer bu durum olmasaydı, $\psi(T(|f|)) > 1$ olacak şekilde Y üzerinde normu en fazla 1 olan bir pozitif lineer fonksiyonel $\psi \in Y^*_{1+}$ bulabilirdik.

Her $a \in A$ için $\|T(\imath(a))\| = \|\kappa(a)\| \leq 1$ olduğundan, tekrar T nin vektör örgü homomorfizmi olduğu kullanılarak $\big\||T(\imath(a))|\big\| = \big\|T(|\imath(a)|)\big\|$ buluruz. Dolayısıyla her $a \in A$ için $\left|\psi\Big(T\big(|\imath(a)|\big)\Big)\right| \leq 1$ olur. $\|f\|_F$ tanımında $\psi \circ T$ fonksiyonelini kullanarak $\|f\|_F \geq \psi(T(|f|)) > 1$ elde ederik ki bu $\|f\|_F \leq 1$ varsayımımızla çelişir.

FVL(A) nın tamamlanışı bir Banach örgüsüdür ve Y tam olduğundan T, bu tamamlanışa hala Y de değerler alacak şekilde sürekli olarak genişletilir. □

Nihayetinde farklı serbest Banach örgüleri arasındaki ilişkiyi bilmemiz gerekli olacaktır, bu yüzden şimdi aşağıdaki sonucu veririz.

Önerme 4.8. B, A kümesinin boş olmayan bir alt kümesi ise FVL(B), $\{\delta_b : b \in B\}$ tarafından üretilen FVL(A) nın kapalı alt örgüsüne izometrik olarak sıra izomorfiktir. Ayrıca, FVL(A)'nın FBL(B) üzerine bir büzülme örgü homomorfik P_B izdüşümü vardır.

Kanıt. Önerme 3.5'ten FVL(B), FVL(A)'nın $\{\delta_b : b \in B\}$ tarafından üretilen alt örgüsüne izomorfik olduğunu ve $b \in B$ ise $P_B(\delta_b) = \delta_b$, ve $a \in A \backslash B$ ise $P_B(\delta_a) = 0$ olan FVL(A)'nın FVL(B) üzerine bir örgü homomorfik P_B izdüşümünün var olduğunu hatırlayalım. FBL(A) ve FBL(B) da $\|\delta_b\|_F = 1$ olduğundan FBL(B) nin FBL(A) içine ve FBL(B) nin FBL(A) üzerine büzülme örgü homomorfizmleri vardır ki üreteçler üzerinde aynı şekilde hareket ederler, böylece FVL(A) ve FVL(B) arasında homomorfizmlere genişlerler. Sonuç şimdi açıktır. □

Dual uzayları arasında da basit bir ilişki vardır. Bu aşağıdaki sonucun bir neticesidir. Benzer sonuçlar için [15, IV.12, Problem 6] ve [10, Lemma VI.3.3] bakınız.

Önerme 4.9. P, bir X Banach örgüsünden bir Y kapalı alt örgüsüne büzülme örgü homomorfik izdüşüm ise P^*Y^*, X^* uzayında zayıf*-kapalı bandtır, ki Y^* uzayına izometrik olarak sıra izomorfiktir.

Kanıt. X'te bir örgü ideali olan P'nin çekirdeği için $\ker(P)$ yazılsın ve X^* uzayında zayıf*-kapalı band olan

$$Z = \{\phi \in X^* : \phi_{|\ker(P)} \equiv 0\}$$

kümesini tanımlayalım. $P^*X^* = Z$ olduğu açıktır.

$J : Y^* \to X^*$ fonksiyonunu $J_\phi = \phi \circ P$ olarak tanımlanırsa $J : Y^* \to Z$ ve $\|J\| \leq \|P\|$ bulunur. $\phi \in Z$ ise $J(\phi_{|Y}) = \phi$ olur, böylece J aslında Y^*'nin Z üzerine bir izometrisidir. Hem J hem de J^{-1} pozitiftir. Dolayısıyla, $J : Y^* \to P^*X^*$ bir izometrik sıra izomorfizmdir. □

Sonuç 4.10. Eğer B, A kümesinin boş olmayan bir alt kümesiyse $\mathrm{FBL}(B)^*$ dual uzayı $\mathrm{FBL}(A)^*$ dual uzayında bir zayıf*-kapalı banda izometrik olarak sıra izomorfiktir.

Cebirsel durumda olduğu gibi, eğer $B \cap C = \emptyset$ olacak şekilde A kümesinin iki alt kümesi B ve C ise $P_B P_C = P_C P_B = P_{B\cap C}$ olur.

Özellikle, sonlu üreteçli serbest kapalı alt örgülerin gömülmesi önemlidir.

Önerme 4.11. *A kümesinin bütün sonlu boş olmayan alt kümelerinin topluluğu içerme bağıntısı düşünülerek $\mathcal{F}(A)$ ile gösterilsin. $\mathrm{FBL}(A)$ serbest Banach örgüsünde izdüşümlerin $\{P_B : B \in \mathcal{F}(A)\}$ ağı $\mathrm{FBL}(A)$'daki özdeşlik operatörüne kuvvetli yakınsar.*

Kanıt. Eğer $f \in \mathrm{FVL}(A)$ ise $B_0 \in \mathcal{F}(A)$ vardır öyle ki $B_0 \subset B$ olduğunda $P_B(f) = f$ sağlanır. P_B bir büzülme dönüşümüdür. Eğer $\epsilon > 0$ ve $f \in \mathrm{FBL}(A)$ ise $\|f - f'\|_F < \epsilon/2$ olacak şekilde $f' \in \mathrm{FBL}(A)$ seçilsin, ve bu durumda $B_0 \subset B$ için $B_0 \in \mathcal{F}(A)$ ve $P_B(f') = f'$ sağlanır. Dolayısıyla, $B_0 \subset B$ ise aşağıdaki kanıtı tamamlar:

$$\|P_B f - f\|_F \leq \|P_B f - P_B f'\| + \|P_B f' - f'\|_F + \|f' - f\|_F < \epsilon.$$

□

$\mathrm{FBL}(A)$'nın bazı özelliklerine ayrıntılı olarak bakmadan önce, norm dualiyle ilgileneceğiz.

Önerme 4.12. *A boş olmayan bir küme olmak üzere aşağıdaki normlu uzaylar izometrik olarak sıra izomorfiktir:*

$$(\mathrm{FVL}(A)^\dagger, \|\cdot\|^\dagger), \quad (\mathrm{FVL}(A), \|\cdot\|_F)^* \quad \text{ve} \quad \mathrm{FBL}(A)^*$$

Kanıt. Eğer $\phi \in \mathrm{FBL}(A)^*$ ise $\phi \mapsto \phi_{|\mathrm{FVL}(A)}$ kısıtlama fonksiyonu bir sıra izomorfizmidir, süreklilikden ve $\|\delta_a\| = 1$ olduğundan $|\phi|(\delta_a)|| \leq \|\phi\|$ elde edilir, böylece

$\|\phi_{\mathrm{FVL}(A)}\|^\dagger \leq \|\phi\|$ sağlanır. Öte yandan, her bir $\|\delta_a\| = 1$ için

$$\begin{aligned} \|\phi\| = \big\||\phi|\big\| &= \sup\{|\phi|(f) : \|f\|_F \leq 1\} \\ &\leq \sup\{|\phi|(|\delta_a|) : a \in A\} = \|\phi_{|\mathrm{FVL}(A)}\|^\dagger \end{aligned}$$

olduğundan birinci ve üçüncü uzayların izometrik sıra izomorfik olduğu kanıtlanır. FVL(A) nın FBL(A) uzayında yoğun olmasından ikinci ve üçüncü uzayların izometrik sıra izomorfik olduğu elde edilir. □

Yukarıda belirttiğimiz gibi, eğer A sonsuz ise FVL$(A)^\dagger \neq$ FVL$(A)^\sim$ olur. Öte yandan, aşağıdaki sonuç elde edilir.

Önerme 4.13. Eğer $n \in \mathbb{N}$ ise $\|\cdot\|^\dagger$ normu altında FBL$(n)^*$ dual uzayı FVL$(n)^\sim$ sıra dualine izometrik olarak sıra izomorfiktir.

Kanıt. Gösterilmesi gereken tek şey, her $\phi \in$ FVL(n) için $\|\phi\|^\dagger$ değerinin sonlu olduğudur. Bu durumda, $\|\phi\|^\dagger$ değeri $|\phi|(|\delta_a|)$ gerçel değerlerinin sonlu bir supremumu olduğu açıktır. □

Bölüm 5

Daha Küçük Bir Gösterim Uzayı

$\Delta_A = [-1,1]^A$ kümesi $\mathbb{R}^A$ uzayının kompakt bir alt kümesidir. Her $t \in [0,1]$ ve $\xi \in \Delta_A$ için $f(t\xi) = tf(\xi)$ sağlanırsa $f : \Delta_A \to \mathbb{R}$ fonksiyonu homojen olarak adlandırılır (bu, $\mathbb{R}^A$ daki fonksiyonlar için verilen tanımla tutarlıdır). Δ_A üzerinde sürekli homojen gerçel değerli fonksiyonların uzayı $H(\Delta_A)$ ile gösterilir. Eğer $C(\Delta_A)$ uzayı $\|\cdot\|_\infty$ supremum normu ile donatırsak $H(\Delta_A)$, $C(\Delta_A)$'nın kapalı bir vektör alt örgüsüdür (ve dolayısıyla $H(\Delta_A)$'nın kendisi bu norma göre bir Banach örgüsüdür).

Lemma 5.1. $R : H(\mathbb{R}^A) \to H(\Delta_A)$ kısıtlama fonksiyonu injektif vektör örgü homomorfizmidir.

Kanıt. İspatın tam olarak aşikar olmayan kısmı, R fonksiyonunun injektif olmasıdır. $f \in H(\mathbb{R}^A)$ ve $Rf = 0$ olduğunu varsayalım. A kümesinin tüm sonlu boş olmayan alt kümelerinin topluluğu içerme bağıntısı düşünülerek $\mathcal{F}(A)$ ile gösterilsin. Eğer $\xi \in \mathbb{R}^A$ ise $\mathbb{R}^A$ uzayında $\{\xi\chi_B : B \in \mathcal{F}(A)\}$ ağı ξ ye yakınsar. Herhangi bir $B \in \mathcal{F}(A)$ için $t > 0$ vardır öyle ki $t\xi\chi_B \in [-1,1]^A$, ve böylece homojenlikten $tf(\xi\chi_B) = f(t\xi\chi_B) = 0$ bulunur. $\square$

A kümesi sonlu olmadığı sürece, kısıtlama fonksiyonunun örten olmayacağını not edelim.

Örnek 5.2. $A = \mathbb{N}$ durumunda örten olamamayı kanıtlamak yeterlidir. $\xi \in \Delta_{\mathbb{N}}$ için $g \in H(\Delta_{\mathbb{N}})$ fonksiyonunu $g(\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}\xi(k)$ şeklinde tanımlayalım. $Rf = g$ olacak şekilde $f \in H(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ olduğunu varsayalım. $\eta \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ fonksiyonu $\eta(k) = 2^k$ biçiminde tanımlayalım, ve $n \in \mathbb{N}$ için $\eta_n = \eta\chi\{1,...,n\}$ olsun, ki bu durumda $\mathbb{R}^N$ uzayında

$\eta_n \to \eta$ olur. Ancak, her $n \in \mathbb{N}$ için

$$f(\eta_n) = 2^n f(2^{-n}\eta_n) = 2^n g(2^{-n}\eta_n) = n$$

eşitlği bulunur. f fonksiyonu sürekli varsayıldığından bu imkansızdır.

Ayrıca bu örnek, A kümesi sonsuz ise Δ_A üzerinde sup-normu ile donatılmış $H(\mathbb{R}^A)$ uzayının tam olmadığını gösterir. Bu, $H(\Delta_A)$ uzayını kullanmamızın nedenlerinden biridir.

Genel olarak, FVL(A) serbest vektör örgüsü $H(\mathbb{R}^A)$ uzayının bir vektör alt örgüsü ile özdeşleştirilebilir (bkz. Teorem 3.6), ki daha sonra Lemma 5.1 in sayesinde R kısıtlama fonksiyonu aracılığıyla $H(\Delta_A)$ uzayının bir vektör alt örgüsü ile özdeşleştirilebilir. Bu özdeşleştirme FBL(A) serbest Banach örgüsüne genişletilebilir. Bunun kanıtı tahmin edilenden biraz daha zordur.

Uygunluk için, $R : H(\mathbb{R}^A) \to H(\Delta_A)$ kısıtlama fonksiyonunun FVL(A) serbest vektör örgüsüne kısıtlanışını $J = J_A$ ile gösteririz. Her $a \in A$ için $\|J\delta_a\|_\infty = 1$ olduğundan $\|J\| = 1$, ve böylece her $f \in$ FVL(A) için $\|J\|_\infty \leq \|f\|_F$ olduğu açıktır. $H(\Delta_A)$, $\|\cdot\|_\infty$ normuna göre bir Banach örgüsü olduğundan süreklilik sayesinde J fonksiyonu, $\|J\| = 1$ olacak şekilde bir $J :$ FBL$(A) \to H(\Delta_A)$ örgü homomorfizmine genişletilebilir. FBL(A)'nın evrensel özelliği ile FBL(A)'dan $H(\Delta_A)$'ya J fonksiyonunun $J\delta_a = \delta|_{a\Delta_A}$ ($a \in A$) koşulunu karşılayan tek türlü belirli örgü homomorfizmi olduğunu not edelim. Bu, özellikle, eğer B, A'nın boş olmayan bir alt kümesiyse J_B, J_A'nın FBL(B) e kısıtlanışıdır (bkz. Önerme 4.8). Bu J genişlemesinin injektif olduğunu göstermek problemdir.

İlk olarak, A kümesinin sonlu olduğu durumu göz önünde alacağız.

Önerme 5.3. Herhangi bir boş olmayan sonlu A kümesi için $J :$ FBL$(A) \to H(\Delta_A)$ fonksiyonu bir sürjektif norm ve örgü izomorfizmidir.

Kanıt. Her $f \in$ FVL(A) için $\|f\|_F \leq n\|Jf\|_\infty$ olduğunu iddia ediyoruz, burada n, A'nın kardinalitesidir. Gerçekten, $f \in$ FVL(A) ise

$$|Jf| \leq \|Jf\|_\infty \bigvee_{a\in A} |J(\delta_a)|,$$

böylece

$$|f| \leq \|Jf\|_\infty \bigvee_{a\in A} |\delta_a|,$$

ve dolayısıyla,

$$\|f\|_F \leq \|Jf\|_\infty \Big\| \bigvee_{a\in A} |\delta_a| \Big\|_F \leq \|Jf\|_\infty \sum_{a\in A} \|\delta_a\|_F = n\|Jf\|_\infty$$

bulunur. Bu iddiayı kanıtlar. Sonuç olarak, $f \in \mathrm{FVL}(A)$ için $\|Jf\|_\infty \leq \|f\|_F \leq n\|Jf\|_\infty$ olur, ki bu da $J : \mathrm{FBL}(A) \to H(\Delta_A)$'nın bir norm ve örgü izomorfizmi olduğunu gösterir. Geriye J'nin sürjektif olduğu göstermek kalır. Bu amaçla, $S_A = \{\xi \in \Delta_A : \|\xi\|_A = 1\}$ ile verilen Δ_A'nın kompakt alt kümesini S_A ile gösterelim. A sonlu olduğundan, $r : H(\Delta_A) \to C(S_A)$ kısıtlama fonksiyonu bir sürjektif norm ve örgü izomorfizmidir. $\{\delta_{a|S_A} : a \in A\}$ fonksiyonları S_A nın noktalarını ayırdığından, Stone$-$Weierstrass teoremi ile $(r \circ J)(\mathrm{FBL}(A)) = C(S_A)$, ve dolayısıyla $J(\mathrm{FBL}(A)) = H(\Delta_A)$ elde edilir. Kanıt tamamlanmıştır. □

$n = 1$ olmadıkça bu norm izomorfizm bir izometri değildir. Gerçekten, $a_1, ..., a_n \in A$ farklı elemanlar ise $\big\| \bigvee_{j=1}^n |\delta_{a_j}| \big\|_F = n$ sağlanır (ℓ_1^n uzayındaki j-inci birim vektör e_j ile gösterilmek üzere $1 \leq j \leq n$ için $T(\delta_{a_j}) = e_j$ şeklinde tanımlanan $T : \mathrm{FBL}(A) \to \ell_1^n$ örgü homomorfizmini göz önüne alalım).

Bazen aşağıdaki, biraz daha zayıf açıklamayı kullanmak uygun olur.

Sonuç 5.4. Herhangi bir boştan farklı sonlu A kümesi için $\mathrm{FBL}(A)$, $H(\mathbb{R}^A)$ vektör örgüsüne lineer olarak sıra izomorfiktir.

Kanıt. A sonlu olduğunda $R : H(\mathbb{R}^A) \to H(\Delta_A)$ kısıtlama fonksiyonunun örten olduğunu gözlemlemek yeterlidir. □

$J : \mathrm{FBL}(A) \to H(\Delta_A)$ örgü homomorfizminin injektif olduğunu göstermek için genelde $\mathrm{FBL}(A)$ üzerinde tanımlı gerçel değerli lineer örgü homomorfizmlerini kullanırız, ki daha sonra bunları genel olarak karakterize etmemizi sağlayacak, yine de bilmeye değer bir şeydir!

Teorem 5.5. A boş olmayan bir küme ise $\omega : \mathrm{FBL}(A) \to \mathbb{R}$ bir örgü homomorfizmidir, ancak ve ancak $\xi \in \Delta_A$ ve $0 \leq \lambda \in \mathbb{R}$ vardır öyle ki her $f \in \mathrm{FBL}(A)$ için $\omega(f) = \lambda Jf(\xi)$ olur.

Kanıt. Eğer ω, $\mathrm{FBL}(A)$ üzerinde gerçel değerli bir örgü homomorfizmi ise, Önerme 3.9'dan $\eta \in \mathbb{R}^A$ vardır öyle ki her $f \in \mathrm{FVL}(A)$ için $\omega(f) = f(\eta)$ sağlanır. $\mathrm{FBL}(A)$ bir

Banach örgüsü olduğundan ω is $\|\cdot\|_F$-sınırlıdır, ve bu nedenle

$$\sup_{a\in A}|\eta(a)| = \sup_{a\in A}|\omega(\delta_a)| = \|\omega\| < \infty$$

bulunur. Dolayısıyla, bir $\lambda = \|\omega\| > 0$ vardır öyle ki $\xi = \lambda^{-1}\eta \in \Delta_A$ sağlanır. $f \in \mathrm{FVL}(A)$ ise

$$\omega(f) = f(\eta) = \lambda f(\lambda^{-1}\eta) = \lambda Jf(\xi)$$

elde edilir.

$f \in \mathrm{FBL}(A)$ verilsin. Bu durumda, $\|f - g_n\|_F \to 0$ olacak şekilde $\mathrm{FVL}(A)$'da bir (g_n) dizisi seçilsin. Buradan, $\|Jf - Jg_n\|_\infty \to 0$, ve dolayısıyla $Jg_n(\xi) \to Jf(\xi)$ bulunur. Böylece, aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\omega(f) = \lim_{n\to\infty} \omega(g_n) = \lambda \lim_{n\to\infty} Jg_n(\xi) = \lambda Jf(\xi).$$

Tersine, $\xi \in \Delta_A$ ve $0 \leq \lambda \in \mathbb{R}$ ise $f \in \mathrm{FBL}(A)$ için $\omega(f) = \lambda Jf(\xi)$ formülü $\mathrm{FBL}(A)$ üzerinde bir örgü homomorfizmi tanımlar, bu da isteneni verir. □

Açık olarak, $f \in \mathrm{FVL}(A)$ için $f = 0$ gerek ve yeter koşul $Jf = 0$ gerek ve yeter koşul $\mathrm{FVL}(A)$ üzerindeki her $\|\cdot\|_F$-sınırlı gerçel değerli örgü homomorfizmi için $\omega(f) = 0$ olmasıdır. $f \in \mathrm{FBL}(A)$ için bu denkliğe ihtiyaç duymaktayız.

Sonuç 5.6. Herhangi bir boş olmayan A kümesi ve $f \in \mathrm{FBL}(A)$ için aşağıdakiler eşdeğerdir:

(i) $f = 0$;

(ii) $\mathrm{FBL}(A)$ üzerindeki gerçel değerli her ω örgü homomorfizması için $\omega(f) = 0$;

(iii) $Jf = 0$.

Kanıt. Teorem 5.5 den (i), (iii)'yi gerektirir, ve (iii) de (ii)'yi gerektirir.

Şimdi (ii)'nin sağlandığını varsayalım. İlk olarak, Önerme 5.3'den, boş olmayan herhangi bir sonlu altküme $B \subseteq A$ için J'nin $\mathrm{FBL}(B)$'ye kısıtlanışının injektif olduğu not edelim. Böyle bir B kümesi için $f \mapsto (JP_Bf)(\xi)$, $(f \in \mathrm{FBL}(A))$ fonksiyonu her $\xi \in \Delta_A$ için $\mathrm{FBL}(A)$ üzerinde gerçel değerli bir örgü homomorfizmidir, böylece $JP_Bf = 0$. J, $\mathrm{FBL}(B)$ üzerinde injektif olduğundan $P_Bf = 0$ bulunur. Önerme 4.11'den $\|\cdot\|_F$ için $P_Bf \to f$ olduğu sonucu çıkar, böylece $f = 0$ olur. Bu, kanıtı tamamlamak için yeterlidir. □

Sonuç 5.7. A boş olmayan herhangi bir küme ise

$$J : \mathrm{FBL}(A) \to H(\Delta_A)$$

örgü homomorfizmi injektiftir, böylece $\mathrm{FBL}(A)$, $H(\Delta_A)$'nın bir vektör alt örgüsüne lineer olarak sıra izomorfiktir.

Aşağıda, $\mathrm{FBL}(A)$'yı $H(\Delta_A)$'nın $J(\mathrm{FBL}(A))$ vektör alt örgüsü ile özdeşleştireceğiz.

Önerme 4.8 'de gördüğümüz gibi eğer B, A kümesinin boş olmayan bir alt kümesiyse $\mathrm{FBL}(A)$'nın $\{\delta_b : b \in B\}$ tarafından üretilen kapalı vektör alt örgüsü $\mathrm{FBL}(B)$ ile izometrik olarak özdeşleştirilir, ve böylece $\mathrm{FBL}(A)$ da $\mathrm{FBL}(B)$ üzerine kanonik büzülme bir örgü homomorfik P_B izdüşümü vardır. Aşağıdaki değişmeli diyagrama sahip olduğumuzu not edelim:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{FBL}(A) \arrow[r, "J_A"] & H(\Delta_A) \\
\mathrm{FBL}(B) \arrow[u, "k_B"] \arrow[r, "J_B"'] & H(\Delta_B) \arrow[u, "j_B"']
\end{tikzcd}$$

burada j_B, Bölüm 2'de tanıtılan injektif j_B örgü homomorfizminin $H(\Delta_B)$'ye kısıtlanışı ve k_B, Önerme 4.8 tarafından garanti edilen $\mathrm{FBL}(B)$'nin $\mathrm{FBL}(A)$ içine izometrik örgü gömülmesidir. Ayrıca, j_B'nin bir izometri olduğunu not edelim. $\mathrm{FBL}(B)$'nin serbest üreteçleri üzerinde fonksiyonların etkisi göz önüne alındığında diyagramın döndüğü elde edilir. Sonuç olarak, $\mathrm{FBL}(B)$'nin $\mathrm{FBL}(A)$'ya kanonik gömülmesi, $H(\Delta_B)$ nin $H(\Delta_A)$'ya kanonik gömülmesiyle uyumludur. Benzer şekilde aşağıdaki digayram da döner:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{FBL}(A) \arrow[r, "J_A"] \arrow[d, "P_B"'] & H(\Delta_A) \arrow[d, "(j_B)^{-1}\circ P_B"] \\
\mathrm{FBL}(B) \arrow[r, "J_B"'] & H(\Delta_B)
\end{tikzcd}$$

Bir sonraki önerme bunu, $H(\Delta_A)$'nın vektör alt örgüsü olarak görülen $\mathrm{FBL}(A)$ açısından açıklamaktadır. Bölüm 2'de açıklandığı gibi $\mathbb{R}^{\Delta_B}$, $\mathbb{R}^{\Delta_A}$'nın bir alt uzayı olarak görülür.

Eğer B, A'nın boş olmayan bir alt kümesi ise herhangi bir $\xi \in \Delta_A$ için ξ nin B'ye kısıtlanışı ξ_B ile gösterilir, böylece $\xi_B \in \Delta_B$.

Önerme 5.8. B, A kümesinin boş olmayan bir alt kümesi olsun. FBL(A) yı $H(\Delta_A)$'nın bir vektör alt örgüsü olarak düşünürsek, aşağıdakiler sağlanır:

(i) FBL(A)'nın FBL(B) üzerine kanonik P_B izdüşümü, her FBL(A) için $P_B f(\xi) = f(\xi\chi_B)$, $(\xi \in \Delta_B)$ ile verilir.

(ii) Eğer $f \in$ FBL(A) ise f'nin FBL(B) ait olması için gerek ve yeter koşul, $\xi, \eta \in \Delta_A$ ve $\xi_B = \eta_B$ olduğunda $f(\xi) = f(\eta)$ olmasıdır.

Kanıt. **(i)** FBL(A)'da FBL(B) üzerine kanonik izdüşüm P_B olsun (bkz. Önerme 4.8). O zaman, $a \in B$ ise $P_B\delta_a = \delta_a$, ve $a \in A \setminus B$ ise $P_B\delta_a = 0$ olur. Eğer $f \in$ FVL(A) ise Önerme 3.7'den önceki gözlemlerden $\xi \in \Delta_A$ için $P_B f(\xi) = f(\xi\chi_B)$ bulunur. $f \in$ FBL(A) verilsin. (f_n), FVL(A)'da bir dizi öyle ki $\|f - f_n\|_F \to 0$, ki bu $\|f - f_n\|_\infty \to 0$ olmasını gerektirir, ve böylece $\xi \in \Delta_A$ için $f_n(\xi) \to f(\xi)$ elde edilir. Ayrıca, $\|P_B f - P_B f_n\|_F \to 0$, ve dolayısıyla $P_B f_n(\xi) \to P_B f(\xi)$, $(\xi \in \Delta_A)$ olur. $P_B f_n(\xi) = f_n(\xi\chi_B) \to f(\xi\chi_B)$ olduğundan $P_B f(\xi) = f(\xi\eta_B)$, $(\xi \in \Delta_A)$ sonucuna ulaşılır.

(ii) Gereklilik. Eğer $f \in$ FBL(B) ve $\xi, \eta \in \Delta_A$ öyle ki $\xi_B = \eta_B$ ise $\xi\chi_B = \eta\chi_B$, böylece (i) 'den aşağıdaki elde edilir:

$$f(\xi) = P_B f(\xi) = f(\xi\chi_B) = f(\eta\chi_B) = P_B f(\eta) = f(\eta)$$

Yeterlilik. Eğer $f \in$ FBL(A) öyle ki $\xi, \eta \in \Delta_A$ ve $\xi_B = \eta_B$ olduğunda $f(\xi) = f(\eta)$ ise $\xi \in \Delta_A$ için $(\xi\chi_B)_B = \xi_B$ olduğundan $P_B f(\xi) = f(\xi\chi_B) = f(\xi)$ olur, ve dolayısıyla $f = P_B f \in$ FBL(B) elde edilir. □

Bir L örgüsünün bir H alt örgüsüne *düzenli gömülü* (regularly emdedded) olduğu söylenir, eğer H da supremumu (sırasıyla infimumu) var olan H ın her alt kümesi L de aynı supremuma (sırasıyla infimuma) sahiptir. Eğer vektör örgüleriyle uğraşırsak, sadece H'da 0 a aşağı yönlendirilmiş H ın alt kümesini göz önünde bulundurmak ve L'de de infimumunun 0 olduğunu kontrol etmek yeterlidir.

Önerme 5.9. A, boş olmayan bir kümeyse ve B, A'nın boş olmayan bir alt kümesiyse, FBL(B), FBL(A) da düzenli gömülüdür.

Kanıt. $(f_\gamma)_{\gamma\in\Gamma} \subseteq$ FBL(B) ve $f_\gamma \downarrow_\gamma 0$ olsun. Her $\gamma \in \Gamma$ için $0 < g \leq f_\gamma$ olacak şekilde bir $g \in$ FBL(A) var olduğunu varsayalım. $\xi_0 \in \Delta_A$ öyle ki $g(\xi_0) > 0$ olsun. $\xi_0\chi_B \neq 0$

olduğunu varsayabileceğimizi iddia ediyoruz. Seçtiğimiz ξ_0 için $\xi_0\chi_B = 0$, yani $\xi_0 = \xi_0\chi_{A\setminus B}$ ise $\xi_\epsilon = \xi_0 + \epsilon\xi_B$'yi göz önüne alalaım. Ayrıca, $\epsilon \downarrow 0$ ve g sürekli olduğundan Δ_A da $\xi_\epsilon \to \xi_0$ sağlanır. Buna göre $g(\xi_\epsilon) > 0$ olacak şekilde $\epsilon \in (0,1]$ seçilebilir, ve ardından ξ_0'ı bu ξ_ϵ ile değiştiririz. $b \in B$ verilsin. Bu durumda $h \in H(\Delta_A)$ fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlansım:

$$h(\xi) = g\left(\xi\chi_B + \frac{|\xi(b)|}{\|\xi_0\chi_B\|_\infty}\xi_0\chi_{A\setminus B}\right), \quad (\xi \in \Delta_A).$$

Şimdi, $h \in \mathrm{FBL}(A)$ olduğunu iddia ediyoruz. Gerçekten, $T : H(\Delta_A) \to H(\Delta_A)$ örgü homomorfizmi her $f \in H(\Delta_A)$ için şu şekilde tanımlansın:

$$Tf(\xi) = f\left(\xi\chi_B + \frac{|\xi(b)|}{\|\xi_0\chi_B\|_\infty}\xi_0\chi_{A\setminus B}\right), \quad (\xi \in \Delta_A).$$

Buna göre

$$T\delta_a = \delta_a\chi_B(a) + \frac{|\xi(b)|}{\|\xi_0\chi_B\|_\infty}\delta_a(\xi_0)\chi_{A\setminus B}(a)$$

olduğu gözlemlendiğinde her $a \in A$ için $T\delta_a \in \mathrm{FVL}(A)$ olur ki $\sup_{a\in A}\|T\delta_a\|_F < \infty$ bulunur. Sonuç olarak, tek türlü belirli $S : \mathrm{FBL}(A) \to \mathrm{FBL}(A)$ örgü homomorfizmi vardır öyle ki her $a \in A$ için $S\delta_a = T\delta_a$ sağlanır. Açık olarak her $f = \mathrm{FVL}(A)$ için $Tf = Sf$ olur. Öte yandan bir $f \in \mathrm{FBL}(A)$ verildiğinde, f'ye $\|\cdot\|_F$ normuna göre bir (f_n) dizisi ile yaklaşabiliriz. $\|\cdot\|_F$ normuna göre yakınsama Δ_A'da noktasal yakınsamayı gerektirdiğinden $Sf = Tf$ elde edilir (Önerme 5.8 in ispatına bakınız). Özellikle, bu $h = Tg = Sg \in \mathrm{FBL}(A)$ olmasını gerektirir ki iddiamızın kanıtını verir.

Eğer $\xi, \eta \in \Delta_A$ ve $\xi_B = \eta_B$ ise $h(\xi) = h(\eta)$ olur, ve böylece Önerme 5.8 ve Lemma 2.1 ile $h \in \mathrm{FBL}(B)$ elde edilir. Eğer $\xi \in \Delta_A$ ise aşağıdaki sağlanır:

$$\xi_B = \left(\xi\chi_B + \frac{|\xi(b)|}{\|\xi_0\chi_B\|_\infty}\xi_0\chi_{A\setminus B}\right)_B$$

(B alt simgesi kısıtlamanın B alt kümesine yapıldığını göstermektedir), ve dolayısıyla

$$\begin{aligned} f_\gamma(\xi) &= f_\gamma\left(\xi\chi_B + \frac{|\xi(b)|}{\|\xi_0\chi_B\|_\infty}\xi_0\chi_{A\setminus B}\right) \\ &\geq g\left(\xi\chi_B + \frac{|\xi(b)|}{\|\xi_0\chi_B\|_\infty}\xi_0\chi_{A\setminus B}\right) \\ &= h(\xi), \quad (\xi \in \Delta_A), \end{aligned}$$

yani, her $\gamma \in \Gamma$ için $f_\gamma \geq h \geq 0$ olur. $h = 0$ olduğu sonucuna varılır.

Özellikle, aşağıdaki eşitlik doğrudur:

$$g\left(\xi_0\chi_B + \frac{|\xi_0(b)|}{\|\xi_0\chi_B\|_\infty}\xi_0\chi_{A\setminus B}\right) = 0, \quad (b \in B).$$

$|\xi_0(b_n)| \to \|\xi_0\chi_B\|_\infty$ olacak şekilde bir $(b_n) \subseteq B$ dizisi alınsın. Yukarıdaki sonuç $b = b_n$'ye uygulandığında g'nin sürekliliği

$$g(\xi_0) = g(\xi_0\chi_B + \xi_0\chi_{A\setminus B}) = 0$$

olmasını gerektirir, ki bu bir çelişkidir. Kanıt tamamlanır. □

Bölüm 6

Serbest Banach Örgülerinin Özellikleri

X, boş olmayan bir küme olmak üzere $f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için $O_f := \{x \in X : f(x) \neq 0\}$ kümesi tanımlansın. W, $\mathbb{R}^X$'in boş olmayan bir alt kümesiyse $O_W := \bigcup\{O_f : f \in W\}$ olarak tanımlansın. Aşağıdaki sonuç muhtemelen iyi bilinmesine rağmen, çalışmanın tamlığı için verilecektir.

Önerme 6.1. X, bir Hausdorff topolojik uzay ve L, $C(X)$ in bir vektör alt örgüsü olsun. Eğer O_L açık kümesi bağlantılıysa, $\{0\}$ ve L, L alt örgüsündeki tek izdüşüm bandlardır.

Kanıt. B, L de bir izdüşüm bandı olsun. Bu durumda $L = B \oplus B^d$ eşitliği sağlanır. Eğer $f \in B$ ve $g \in B^d$ ise $f \perp g$ ve dolayısıyla $O_f \cap O_g = \emptyset$ olur. Buradan $O_B \cap O_{B^d} = \emptyset$ elde edilir. $x \in O_L$ verildiğinde, $f(x) > 0$ olacak şekilde bir $f \in L_+$ vardır. Ayrıca, $f = f_1 \oplus f_2$ eşitliğini sağlayan tek türlü belirli $0 \leq f_1 \in B$ ve $0 \leq f_2 \in B^d$ elemenları vardır. Açıkça, $f_1(x) > 0$ ya da $f_2(x) > 0$ olmalıdır, yani, $x \in O_{f_1} \cup O_{f_2} \subset O_B \cup O_{B^d}$ dir. Böylece, $O_L \subset O_B \cup O_{B^d}$ ve dolayısıyla $O_L = O_B \cup O_{B^d}$ dir. O_B ve O_{B^d} kümeleri hem açık hem de ayrıktır ve O_L, hipoteze göre bağlantılıdır. Bu, yalnızca O_B veya O_{B^d} boş kümeyse mümkündür ki buradan $L = B^d$ veya $L = B$ eşitlikleri elde edilir. $\square$

Sonuç 6.2. $|A| \geq 2$ ise $\{0\}$ ve FBL(A), FBL(A) daki tek izdüşüm bandlardır.

Kanıt. Sonuç 5.7 ile FBL(A) serbest Banach örgüsünü $H(\Delta_A)$ nın bir vektör alt örgüsü ile özdeşleştirebiliriz. Aşağıdaki içermeleri gözlemleyelim:

$$O_{\mathrm{FBL}(A)} \supset \bigcup_{a\in A} O_{\delta_a} = \bigcup_{a\in A} \{\xi \in \Delta_A : \xi(a) \neq 0\} = \Delta_A \backslash \{0\}.$$

Öte yandan, $O_{\mathrm{FBL}(A)} \subset \Delta_A\backslash\{0\}$ olduğundan $O_{\mathrm{FBL}(A)} = \Delta_A\backslash\{0\}$ eşitliği görülür. $|A| \geq 2$ olduğundan $O_{\mathrm{FBL}(A)}$ (yol) bağlantılıdır. □

Sonuç 6.3. $|A| \geq 2$ ise $\mathrm{FBL}(A)$ Dedekind σ-tam değildir.

Sonuç 6.4. $|A| \geq 2$ ise $\mathrm{FBL}(A)$ atoma sahp değildir.

Kanıt. Bir atom tarafından üretilen vektör alt uzay her zaman bir izdüşüm bandıdır. □

Sonuç 6.5. $a \in A$ ise δ_a, $\mathrm{FBL}(A)$ için bir zayıf-sıra-birimdir.

Kanıt. Eğer $f \in \mathrm{FBL}(A)$ ve $f \perp |\delta_a|$ ise $O_f \subset \{\xi \in \Delta_A : \xi(a) = 0\}$ olur, ve ikinci kümenin içi boştur. Böylece, $O_f = \emptyset$, ve dolayısıyla $f = 0$ bulunur. □

Sonuç 6.6. $\mathrm{FBL}(A)$ daki her dik sistem en fazla sayılabilirdir.

Kanıt. $\{u_i : i \in I\}$, $\mathrm{FBL}(A)$ nın kesin olarak pozitif elemanlardan oluşan dik bir aile ise O_{u_i} kümeleri, Δ_A nın boş olmayan ayrık açık alt kümeleridir. $\Delta_A = [-1, 1]^A$ kümesi ayrılabilir uzayların çarpımı olduğundan [14, Theorem 2], Δ_A nın yalnızca sayılabilir tane boş olmayan ayrık açık kümeler içerebileceğini söyler. Böylece tüm O_{u_i} kümelerinin ve tüm u_i elemanlarının aileleri gerçekten sayılabilir olduğu elde edilir. □

İlk olarak [16] de Weinberg tarafından kanıtlanan aynı sonuç $\mathrm{FVL}(A)$ için de geçerlidir. Esasen mevcut kanıt [6] de bulunabilir.

Bir Arşimedyan L vektör örgüsüne *sıra ayrılabilir* denir, eğer her $D \subset L$ alt kümesi, L de D ile aynı üst sınırlara sahip, en fazla sayılabilir bir alt küme içerir ise. Bu, sıfır olmayan elemanların her sıralı sınırlı dik ailesinin en fazla sayılabilir olmasına denktir [12, Theorem 29.3]. Dolayısıyla, Sonuç 6.6 dan $\mathrm{FBL}(A)$ nın evrensel tamamlanışının her zaman sıra ayrılabilir olduğu görülür [12, Definition 50.4].

Her Banach örgüsü, bir serbest Banach örgüsünün bölüm uzayıdır. Aslında bu ifadeyi oldukça kesin yapabiliriz. Aşağıdaki lemma iyi bilinir, ki $\mathfrak{a} = \aleph_0$ durumunda

Banach ve Mazur'un bir sonucuna kadar uzanır [7]. Yine $\mathfrak{a} = \aleph_0$ durumunda (genel durum için gerekli değişiklikler küçük olsa da) daha erişilebilir bir ispat [9, ch. VII, Theorem 5] nın ispatının bir parçası olarak verilir.

Lemma 6.7. *X, bir Banach uzayı ve D, X in birim topunun yoğun bir alt kümesi olsun. $x \in X$ ve $\|x\| < 1$ ise $(x_n) \subset D$ ve $(\alpha_n) \subset \mathbb{R}$ dizileri vardır öyle ki $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n| < 1$ ve $x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$ sağlanır.*

Önerme 6.8. *X bir Banach örgüsü olsun. D, X in birim topunun $\mathfrak{a}$ kardinaliteli yoğun bir alt kümesi ise FBL$(\mathfrak{a})$ nın bir kapalı J ideali vardır, öyle ki X, FBL$(\mathfrak{a})/J$ bölüm uzayına izometrik olarak sıra izomorfiktir.*

Kanıt. $D = \{x_a : a \in \mathfrak{a}\}$ olsun. Serbest Banach örgüsü tanımından tek türlü belirli bir büzülme örgü homomorfizmi T : FBL$(\mathfrak{a}) \to X$ vardır, öyle ki her $a \in \mathfrak{a}$ için $T(\delta_a) = x_a$ olur. Eğer $x \in X$ ve $\|x\| < 1$ ise Lemma 6.7 kullanıldığında $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n| < 1$ ve $x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_{a_n}$ olacak şekilde $(x_{a_n}) \subset D$ ve $(\alpha_n) \subset$ R dizileri bulunur. Eğer $f \in$ FBL$(\mathfrak{a})$ elemanı $f = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \delta_{a_n}$ biçiminde tanımlanırsa (seri mutlak yakınsar) $\|f\|_F < 1$ ve $Tf = x$ sağlanır. Burada T, FBL$(\mathfrak{a})$ nın açık birim topunu X in açık birim topunun üzerine gönderir. Özellikle, T sürjektiftir.

J, T nin çekirdeğini göstermek üzere Q : FBL$(\mathfrak{a}) \to$ FBL$(\mathfrak{a})/J$ bölüm fonksiyonu olsun. U : FBL$(\mathfrak{a})/J \to X$ operatörü her $f \in$ FBL$(\mathfrak{a})$ için $U(Qf) = Tf$ olarak tanımlansın (açıkça, iyi tanımlanmıştır). U nun bir büzülme örgü izomorfizmi olduğu açıktır. T, FBL$(\mathfrak{a})$ nın açık birim topunu X in açık birim topunun üzerine gönderdiğinden ve Q, FBL$(\mathfrak{a})$ nın açık birim topunu FBL$(\mathfrak{a})/J$ nin açık birim topunun üzerine gönderdiğinden U, FBL$(\mathfrak{a})/J$ nin açık birim topunu X in açık birim topunun üzerine gönderir, böylece U bir izometridir. □

Sonuç 6.9. *X bir Banach örgüsü olsun. D, X in birim topunun $\mathfrak{a}$ kardinaliteli yoğun bir alt kümesi ise FBL$(\mathfrak{a})^*$, X^* uzayına izometrik olarak sıra izomorfik olan bir zayıf*-kapalı band içerir.*

Kanıt. Önerme 6.8 de elde edilen bölüm fonksiyonu T : FBL$(\mathfrak{a}) \to X$ ile gösterilirse $T^* : X^* \to$ FBL$(\mathfrak{a})^*$ bir izometri ve görüntü kümesi, $\ker(T)^{\perp}$, bir zayıf*-kapalı band olur. T sürjektif bir örgü homomorfizmi olduğundan T^* bir örgü izomorfizmidir. □

Sonuç 6.10. *$\mathfrak{a}$ herhangi bir kardinal ise FBL$(\mathfrak{a})^*$ da, $\ell_\infty(\mathfrak{a})$ uzayına izometrik olarak sıra izomorfik olan bir zayıf*-kapalı band vardır.*

Kanıt. Eğer $\mathfrak{a}$ sonsuz ise $\ell_1(\mathfrak{a})$ in birim topunun $\mathfrak{a}$ kardinaliteli yoğun bir alt kümeye sahip olduğunu ve $\ell_\infty(\mathfrak{a})$ un $\ell_1(\mathfrak{a})^*$ ile özdeşleştirilebileceğini belirtmek yeterlidir.

Şimdi, card$(A) = \mathfrak{a}$ nın sonlu olduğunu varsayalım. $a \in A$ için $\xi_a \in \Delta_A = [-1, 1]^A$ elemanı $\xi_a(a) = 1$, ve $a \neq b$ ise $\xi_a(b) = 0$ olarak tanımlansın. $b \in A$ ise $a = b$ olduğunda $|\delta_b|(\xi_a) = |\delta_b(\xi_a)| = 1$, ve $a \neq b$ olduğunda $|\delta_b|(\xi_a) = |\delta_b(\xi_a)| = 0$ olur. Teorem 5.5 den, $f \mapsto f(\xi_a)$ fonksiyoneli FBL(A) üzerinde bir örgü homomorfizmdir, ve bu nedenle FBL(A) nin normu 1 olan atomu olduğu sonucu çıkar. Bu tür fonksiyonların sonlu toplamlarının da norm 1 olur. Bu, $\ell_\infty(A)$ nin bir kopyasını izometrik olarak FBL$(A)^*$ deki bir ideal üzerine gömer, ki bu ideal sonlu boyutlu olduğundan kesinlikle bir zayıf*-kapalı band olur. □

Sonuç 6.11. *X bir ayrılabilir Banach örgüsü ise X, FBL$(\aleph_0)$ nin bir Banach örgü bölümüne izometrik olarak sıra izomorfiktir ve X^*, FBL$(\aleph_0)^*$ ın bir zayıf*-kapalı bandına izometrik olarak sıra izomorfiktir.*

Bu, serbest Banach örgülerinin ve onların duallerinin ne kadar zengin bir yapıya sahip olduğunu oldukça etkili bir şekilde gösterir. Örneğin, X ve Y ayrılabilir Banach örgüleri öyle ki X^* ve Y^* de sıfırdan farklı izometrik olarak izomorfik olan iki band olmasın, bu durumda FBL$(\aleph_0)^*$ deki izometrik olarak sıra izomorfik olan bandlar dik (örgü teorik anlamda) olmalıdır. Böylece, örneğin, aşağıdaki sonuca sahip oluruz.

Sonuç 6.12. FBL$(\aleph_0)^*$ de karşılıklı olarak dik zayıf*-kapalı A ve B_p $(p \in (1, \infty])$ bandları vardır, öyle ki B_p, $L_p([0, 1])$ e izometrik olarak sıra izomorfik ve A, ℓ_∞ a izometrik olarak sıra izomorfiktir.

Bu, FBL$(\aleph_0)^*$ de continuum tane sıfırdan farklı dik elemanlar olduğunu verir, ki Sonuç 6.6 ile karşılaştırılmalıdır.

Kaynakça

[1] A. Avilés, G. Plebanek, A. Rodríguez, D. José, *Chain conditions in free Banach lattices*, J. Math. Anal. Appl. 465 (2018), no. 2, 1223-1229.

[2] A. Avilés, J. Rodríguez, P. Tradacete, *The free Banach lattice generated by a Banach space*, J. Funct. Anal. 274 (2018), no. 10, 2955-2977.

[3] A. Avilés, A. Rodríguez, D. José, *The free Banach lattice generated by a lattice*, Positivity 23 (2019), no. 3, 581–597.

[4] A. Avilés, A. Rodríguez, D. José *Projectivity of the free Banach lattice generated by a lattice*, Arch. Math. (Basel) 113 (2019), no. 5, 515–524.

[5] A. Avilés, P. Tradacete, I. Villanueva, *The free Banach lattices generated by ℓ_p and c_0*, Rev. Mat. Complut. 32 (2019), no. 2, 353-364.

[6] A. K. Baker, *Free vector lattices*, Canad. J. Math. **20** (1968), 58–66.

[7] S. Banach and S. Mazur, *Zuhr Theorie der linearen Dimension*, Studia. Math. **4** (1933), 100–112.

[8] D. R. Bleier, *Free vector lattices*, Trans. Am. Math. Soc. **176** (1973), 73–87.

[9] J. Diestel, *Sequences and series in Banach spaces*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 92, Springer-Verlag, New York, 1984.

[10] N. Dunford and J. T. Schwartz, *Linear operators, part I: general theory*, Wiley Classics Library, (Wiley, 1988).

[11] H. Jardón-Sánchez, N. J. Laustsen, M. A. Taylor, P. Tradacete, V. G. Troitsky, *Free Banach lattices under convexity conditions*, Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat. Ser. A Mat. RACSAM 116 (2022), no. 1, Paper No. 15, 25 pp.

[12] W. A. J. Luxemburg and A. C. Zaanen, *Riesz spaces.* Vol. 1, (Amsterdam: North-Holland, 1971).

[13] B. de Pagter, A. W. Wickstead *Free and Projective Banach Lattices*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **145A** (2015), 105–143

[14] K. A. Ross and A. H. Stone, *Products of separable spaces*, Amer. Math. Monthly **71** (1964), 398–403.

[15] A. E. Taylor, D. C. Lay, *Introduction to functional analysis*, 2nd edn (Melbourne, FL: Krieger 1986).

[16] E. C. Weinberg, *Free lattice-ordered abelian groups. II*, Math. Ann. **159** (1965), 217–222.

[17] V. G. Troitsky, *Simple constructions of* $\mathrm{FBL}(A)$ *and* $\mathrm{FBL}[E]$, Positivity 23, 1173–1178 (2019)