

GENELLEŞTİRİLMİŞ SPROTT SİSTEMLERİNDE NORMAL FORM YAKLAŞIMI

N. Ziya PERDDAHCİ¹, Medine İLDEŞ², Avadis HACINLIYAN³

ÖZET

İkinci mertebeden otonom olmayan veya üçüncü mertebeden otonom diferansiyel denklemler kaotik davranış gösteren en basit sistemlerdir[1]. Sprott tarafından önerilen bu tür sistemlerden[2] lineerleştirilmiş öz değer yapısı $(1/4 \pm i\alpha, -1)$ olan, ve bu nedenle $\{1+5k, k=1,2,\dots\}$ mertebelerde rezonant davranış gösteren Sprott F H ve Q sistemlerinin normal form açılımları bu çalışmada incelenmiştir. Daha önce benzer şekilde incelemiş olduğumuz, lineerleştirilmiş öz değer yapısı $(\pm i\alpha, -1)$ olan ve $(1+2k, k=1,2,\dots)$ mertebelerde rezonansa giren Sprott C ve E sistemlerinde olduğu gibi[3] bu daha karmaşık durumda da açılımının sistemi beklendiğinden çok daha uzun süre ile temsil edebildiği görülmüştür. Normal form metodu yerel bir yöntem olmasına rağmen yaklaşık korunan büyüklükler aracılığı ile olası sıfır Liapunov üsteli gibi sistemin yerel olmayan bir özelliği hakkında da bilgi verebilmiştir.

1. GİRİŞ:

Uzun zamandan beri lineer teoriler, çoğu zaman kesin, bazen de bir ilk yaklaşıtırm olarak fiziksel olayları başarı ile açıklayabiliyordu. Klasik mekanik, elektromagnetik teori, hatta belirsizlik ilkesi koşul olarak ele alınırsa kuantum mekaniği lineer teorilerdir. Lineer teorilerin en önemli özelliği genel çözümün bir sabitle çarpılması sonucu yeni bir çözüme ulaşmamızı sağlayan üst üste bindirme ilkesidir. Bu nedenle çözümün büyüklüğü hakkındaki bilgi hareket denkleminde yer almaz.

Yirminci yüzyılda lineer olmayan teorilerin önemi arttı. İlk kullanılan yaklaşım lineer olmayan teorileri ona yaklaşık olarak uyan lineer bir teori artı küçük olduğu varsayılan bir düzeltme olarak inceleyen pertürbasyon yaklaşımı idi. Bu yolla teorinin nitel özellikleri hakkında yararlı bilgiler edinmekle birlikte çözümün büyüklüğü hakkında bilgi verecek potansiyele sahip, lineer olmayan kısmın küçük olduğu varsayılınca güçlüklerle karşılaşıldı. Bunun sonucunda lineer olmayan teorilerin de sistematik bir şekilde incelenmesi ihtiyacı doğdu. Lineer teorilerde alıştığımız bazı davranışların lineer olmayan teorilerde olmaması, bu davranışların kaotik davranış olarak nitelenmesine yol açtı. Bu tür davranış gösteren en basit diferansiyel denklemler Van der Pol gibi ikinci mertebeden otonom olmayan yahut Lorenz veya Rössler gibi üç serbestlik dereceli (veya üçüncü mertebe) otonom denklemlerdir. Her iki halde de sistem üç diferansiyel denklem takımından oluşan otonom sistem şeklinde yazılabilir.

Sprott[2] en basit kaotik davranış gösteren sistemi bulmak üzere sistematik bir araştırma yapmış, yalnızca ikinci dereceden lineer olmayan terimleri içeren ve kaotik davranış gösteren sistemlerin Lorenz ve Rössler sistemleri ile sınırlı olmadığını göstermiş, ikinci dereceden iki terim içeren yalnızca beş terimli ve ikinci dereceden bir terim içeren yalnızca altı terimli ve en çok iki serbest parametre içeren on dokuz sistem önermiştir. Bu sistemlerden çoğunun Siegel bölgesinde denge noktası dolayında lineerleştirilmiş öz değerleri olduğundan kaotik davranış söz konusudur.

¹ Işık Üniversitesi Enformasyon Teknolojileri Bölümü, 34398 Maslak, İstanbul

² Boğaziçi Üniversitesi Fizik Bölümü, 34342 Bebek, İstanbul

³ Yeditepe Üniversitesi Fizik Bölümü, 34755 Kadıköy, İstanbul

Doğa ilk yaklaşıtımda dengeye yakın bir konumdadır. Bu nedenle lineer olmayan teorileri denge noktası civarlarında incelemek yararlı bir yaklaşımdır. Normal form yaklaşımı [4] sistemi önce denge noktası civarında bir seriye açar. Ardından sistemi daha basit bir sistem ve birime yakın bir dönüşüm haline getirir. Bazı durumlarda basit sistem lineer bir sistem olduğundan lineer olmayan tüm etkiler dönüşümde gözlemlenir. Rezonans durumunda ise basitleştirilmiş sistemde de lineer olmayan terimler yer alır. Denge noktası dolayındaki lineer kısmın öz değerleri basitleştirilmiş sistemde ne gibi terimlerin yer alacağını tayin eder. Bu çalışmanın bir amacı, söz konusu açılımın sistemi bir pertürbatif yaklaşımdan beklenmeyecek kadar uzun bir süre için temsil edebildiğini göstermektir. Bir diğer amacı ise bu yaklaşımla sıfır Liapunov üstellerinin varlığı anlamını taşıyan yaklaşık olarak korunan büyüklüklerin inşa edilebileceğini göstermektir. Normal form yaklaşımının yakınsaması için ek olarak korunan bir büyüklük gereklidir.[5] Korunan büyüklükler sistemin simetrisi ile yakından ilgilidir. Yaklaşık olarak korunan büyüklükler ise simetri bozulmasına işaret edebilir.

2. NORMAL FORMLAR YÖNTEMİ

İncelediğimiz sistemler $\dot{x} = v(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $v \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ile verilen n. mertebeden zamanda sürekli otonom dinamik sistemlerdir. Sistemin $v(x_0) = 0$ ile verilen $x = x_0$ sabit noktasını önce $\bar{x} = x - x_0$, $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ dönüşümü ile orijine taşırız. Sistem $\dot{\bar{x}} = v(\bar{x} + x_0) \equiv H(\bar{x})$ şeklini alır. Ardından vektör alanın lineer kısmını $\dot{\bar{x}} = DH(0)\bar{x} + \bar{H}(\bar{x})$ şeklinde ayırırız. $\bar{H}(\bar{x})$ denge noktası civarındaki vektör alanının $\bar{H}(\bar{x}) \equiv H(\bar{x}) - DH(0)\bar{x}$ ile verilen lineer olmayan kısmıdır. Lineer kısım olan $DH(0)$ matrisini reel Jordan kanonik formuna dönüştüren T matrisi yardımı ile $\bar{x} = T\tilde{x}$, $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$ değişkeni cinsinden sistemi $\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + F(\tilde{x})$ şekline getirebiliriz. Burada $A \equiv T^{-1}DH(0)T$ ile verilen köşegen yahut Jordan kanonik formunda bir matris, $F(\tilde{x}) = T^{-1}\bar{H}(T\tilde{x})$ dir. $F(\tilde{x})$ 'i Taylor serisine açarak sistemi şu şekle getirebiliriz:

$$\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + F_2(\tilde{x}) + F_3(\tilde{x}) + \dots + F_{r-1}(\tilde{x}) + O(|\tilde{x}|^r) \quad (2.1)$$

Burada $F_i(\tilde{x})$ i.ci mertebeden, i.ci derece homojen monom terimler içeren bir ifadedir. Şimdi bu sisteme birime yakın şu koordinat dönüşümünü uygularız:

$$\tilde{x} = y + h_2(y) \quad , \quad y \in \mathbb{R}^n \quad (2.2)$$

$h_2(y)$ $\{y_i\}$ değişkenlerinde ikinci dereceden ve sistemi basitleştirecek şekilde belirlenecek homojen bir polinomdur. (2.2) dönüşümünü (2.1) sistemine yerleştirince $\dot{\tilde{x}} = (I + Dh_2(y))\dot{y} = Ay + Ah_2(y) + F_2(y + h_2(y)) + F_3(y + h_2(y)) + \dots + F_{r-1}(y + h_2(y)) + O(|y|^r)$

ifadesini buluruz. $F_k(y + h_2(y)) = F_k(y) + O(|y|^{k+1}) + \dots + O(|y|^{2k})$, $2 \leq k \leq r-1$ ve $(I + Dh_2(y))^{-1} = I - Dh_2(y) + O(|y|^2)$ açılımları yardımı ile şu sisteme erişiriz:

$$\dot{y} = Ay + Ah_2(y) - Dh_2(y)Ay + F_2(y) + \tilde{F}_3(y) + \dots + \tilde{F}_{r-1}(y) + O(|y|^r) \quad (2.4)$$

$O(|y|^2)$ mertebeli terimleri ortadan kaldırabilmek için gerekli koşul şudur:

$$Dh_2(y)Ay - Ah_2(y) = F_2(y) \quad (2.5)$$

Lineerleştirilmiş sistemin öz değerleri λ_k nin negatif olmayan tamsayılar c_k ile çarpımlarının toplamı $\sum c_k \lambda_k$ sıfır değilse basitleştirilmiş sistem lineerleştirilmiş denklemlerden ($\dot{y} = Ay$) ibarettir. Eğer sıfır toplamını veren bir durum varsa bu tür terimler $h_2(y)$ olarak 2.5 denkleminin sol tarafına yerleştirilince 0 sonucunu vereceği için $F_2(y)$ 'de bu tür bir terimi ortadan kaldırmak mümkün değildir. Örneğin lineerleştirilmiş sistemin öz değerleri $1/4 \pm i\alpha$, -1 ise $u = (y_1 y_2)^2 y_3$ değişkeni sıfır öz değere karşılık gelir ve basitleştirilmiş sistem $\dot{y}_k = \lambda_k y_k + P_k(u) y_k$ şekline indirgenebilir. Burada $P_k(u)$, u değişkeninde bir polinomdur. Aynı süreç istenilen mertebeye kadar $\tilde{x} = y + h_n(y)$ ardışık olarak tekrarlanabilir.

Sprottt sistemlerinden ikisi ikinci mertebeden, Sprottt C ve E adları ile bilinen iki sistem üçüncü mertebeden, diğerleri ise 4 ya da daha üst mertebelerden rezonansa girer. Sprottt C ve E sistemleri daha önce incelenmiş, beşinci ve yedinci dereceye kadar hesaplanmış normal formların sistemdeki çekiciyi beklenenden uzun bir süre temsil edebildiği, yaklaşık korunan büyüklüklerin bulunabildiği gösterilmiştir [3]. Normal form açılımlarının belirli bir mertebeye kadar sistemi yeterince tasvir edebileceği artık k-bağımlılık kavramı olarak pragmatik bir yaklaşım olarak görülmektedir. [6].

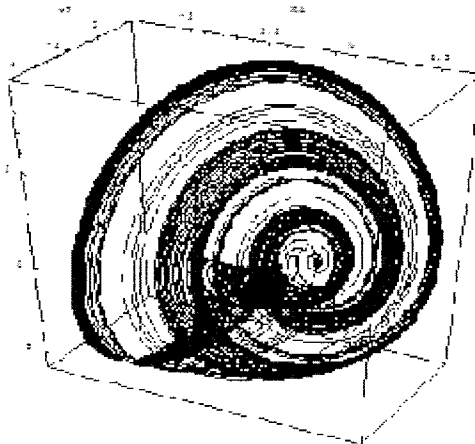
3. PROTT Q SİSTEMİ

Sprottt Q sistemi şu denklemlerle verilir: Çekicisi sistemle birlikte gösterilmiştir

$$\frac{dx_1}{dt} = -x_3 \quad (3.1)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = x_1 - x_2 \quad (3.2)$$

$$\frac{dx_3}{dt} = 3.1x_1 + x_2^2 + 0.5x_3 \quad (3.3)$$



Sprott Q sisteminin standart köşegenleştirilmiş şekli şu denklemlerle verilir:

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dt} = & 0.155917203954irz - 0.155917203954ir\bar{z} - 0.0295368620038iz^2 \\ & + 1.74284250579iz + 0.0295368620038i\bar{z}^2 - 0.573775310549r^2 \\ & + 0.217391304348rz + 0.217391304348r\bar{z} - 0.00999903807963z^2 \\ & - 0.0623668815814z\bar{z} + 0.25z - 0.00999903807963\bar{z}^2\end{aligned}\quad (3.4)$$

$$\begin{aligned}\frac{dr}{dt} = & 0.0590737240076irz - 0.0590737240076ir\bar{z} - 0.0111908909974i2^2 \\ & + 0.0111908909974i\bar{z}^2 - 0.217391304348r^2 + 0.0823649577407rz \\ & + 0.0823649577407r\bar{z} - r - 0.00378842360483z^2 - 0.023629489603z\bar{z}\end{aligned}\quad (3.5)$$

Bu sistemin 21^{ci} merteye normal form açılımı şu şekildedir:

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} = & -0.00000000695199066281iu^9\bar{u}^8w^4 + 0.000000226743237833iu^7\bar{u}^6w^3 \\ & - 0.00000898599024676iu^5\bar{u}^4w^2 + 0.000576451865303iu^3\bar{u}^2w \\ & + 1.74284250579iu - 0.0000000133154703656u^9\bar{u}^8w^4 \\ & + 0.000000414334286634u^7\bar{u}^6w^3 - 0.0000154627282699u^5\bar{u}^4w^2 \\ & + 0.000892924730024u^3\bar{u}^2w + 0.25u\end{aligned}\quad (3.6)$$

$$\begin{aligned}\frac{dw}{dt} = & 0.0000000506060029783u^8\bar{u}^8w^5 - 0.00000149326594996u^6\bar{u}^6w^4 \\ & + 0.0000519977279321u^4\bar{u}^4w^3 - 0.00267877419007u^2\bar{u}^2w^2 - w\end{aligned}\quad (3.7)$$

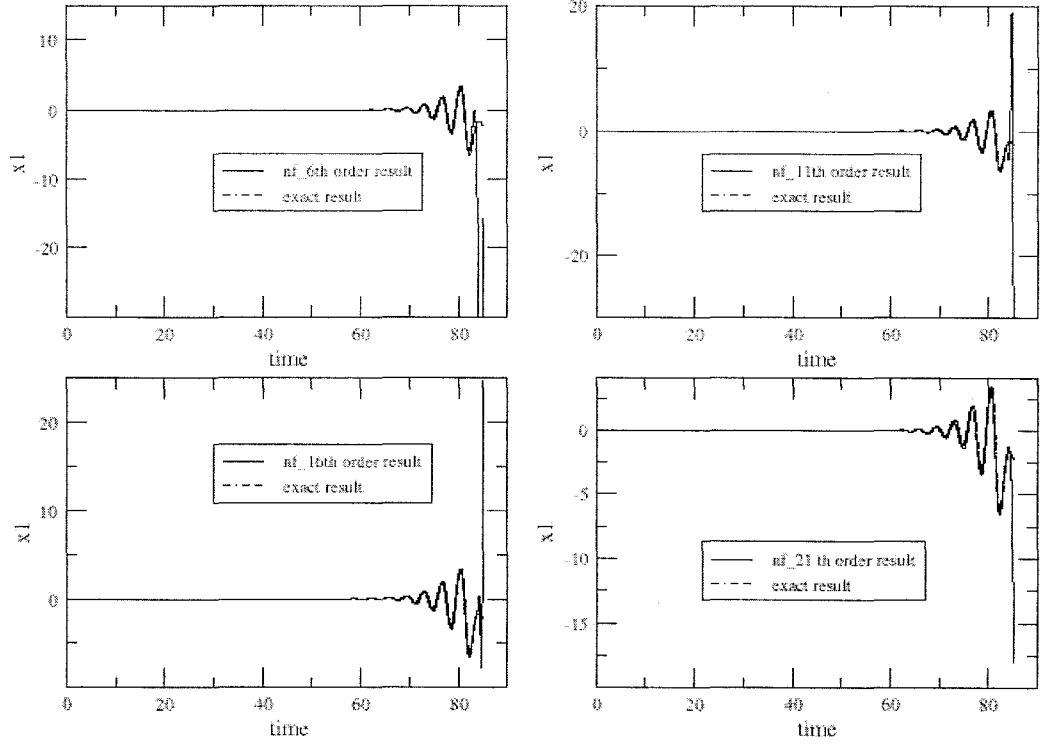
Normal form açılımına $u = \rho e^{-i\varphi}$ dönüşümünü uygulayınca şu sonucu buluruz:

$$\begin{aligned}\dot{\rho} = & -0.0000000133154703656\rho^{17}w^4 + 0.000000414334286634\rho^{13}w^3 \\ & - 0.0000154627282699\rho^9w^2 + 0.00089292473002424\rho^5w + 0.25\rho\end{aligned}\quad (3.8)$$

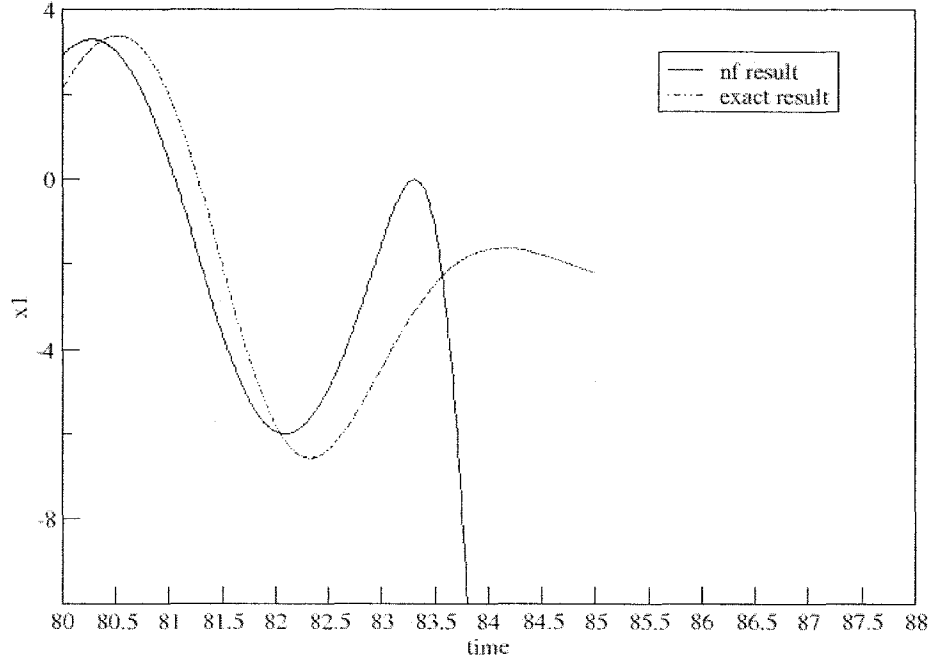
$$\begin{aligned}\dot{\varphi} = & 0.00000000695199066281\rho^{16}w^4 - 0.000000226743237833\rho^{12}w^3 \\ & + 0.00000898599024676\rho^8w^2 - 0.000576451865303\rho^4w - 1.74284250579\end{aligned}\quad (3.9)$$

$$\begin{aligned}\dot{w} = & 0.0000000506060029783\rho^{16}w^5 - 0.00000149326594996\rho^{12}w^4 \\ & + 0.0000519977279321\rho^8w^3 - 0.00267877419007\rho^4w^2 - w\end{aligned}\quad (3.10)$$

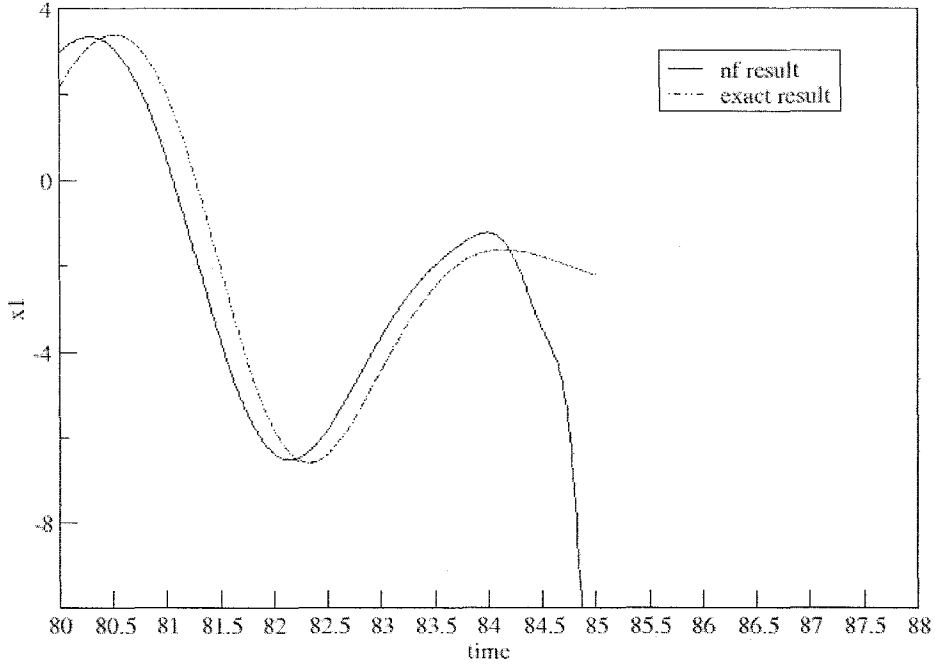
Aşağıdaki şekilde başlangıç noktası $\rho_0 = 10^{-8}$, $\varphi_0 = 10^{-1}$, $w_0 = 10^{-8}$ olmak üzere normal form denkleminin rezonansa giren 6, 11, 16, 21. mertebeler için sayısal çözümleri ile aynı başlangıç noktasına karşılık gelen Sprott denklemlerinin çözümü karşılaştırılmıştır.



İlk rezonans davranışının gözlemlendiği altıncı mertebe normal form çözümünün ıraksamaya başladığı nokta dolayındaki davranışın büyütülmüş şekli aşağıdadır.



Yirmibirinci mertebe normal form çözümünün ıraksamaya başladığı nokta dolayındaki davranışın büyütülmüş şekli aşağıdadır.



Görüldüğü gibi, mertebe arttıkça normal formun gerçek çözümü izlediği zaman aralığı artmakta, ancak bu artma ilk rezonansın olduğu altıncı mertebeden sonra beklendiği ölçüde değildir.

4. SPROTT F VE H SİSTEMLERİ

Sprott F sistemi şu denklemlerle verilir:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2 + x_3 \quad (4.1)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -x_1 + 0.5x_2 \quad (4.2)$$

$$\frac{dx_3}{dt} = x_1^2 - x_3 \quad (4.3)$$

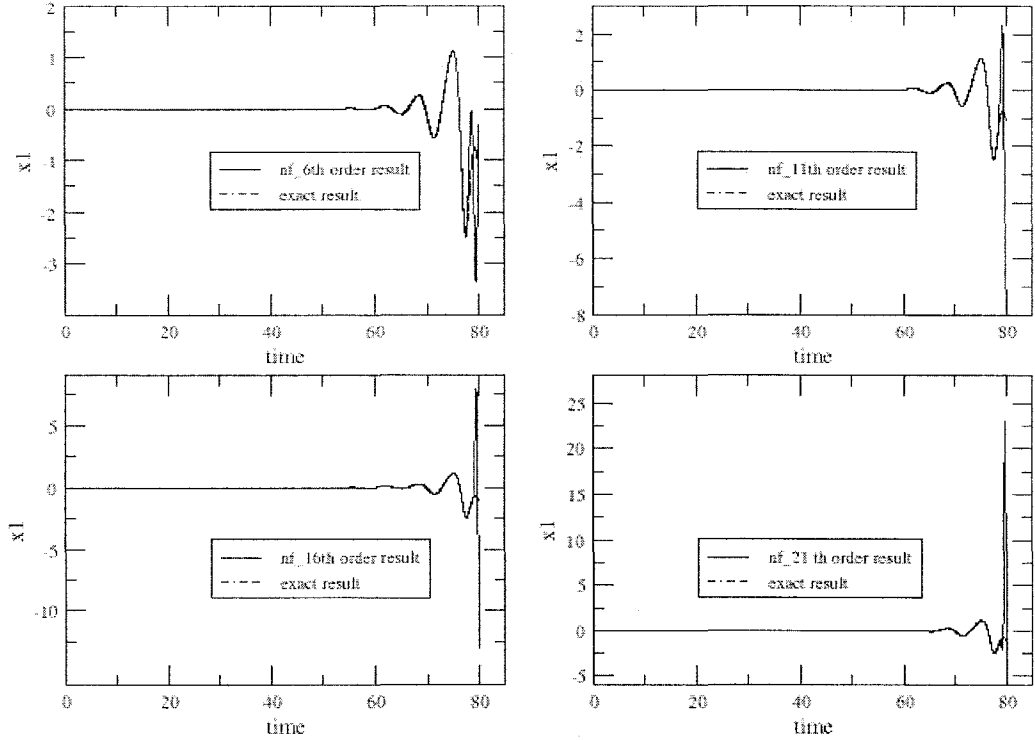
Sprott Q sisteminde uygulananlarla aynı işlemler yapılnca şu sonuç bulunur:

$$\begin{aligned} \dot{\rho} = & -1687.81442023\rho^{17}w^4 - 86.6172031936\rho^{13}w^3 \\ & - 5.34829808898\rho^9w^2 - 0.515898748371\rho^5w + 0.25\rho \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} \dot{\phi} = & -795.186235293\rho^{16}w^4 - 38.9400262058\rho^{12}w^3 \\ & - 2.2198465555\rho^8w^2 - 0.176734525397\rho^4w - 0.968245836552 \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} \dot{w} = & 6215.20912547\rho^{16}w^5 + 305.565695119\rho^{12}w^4 \\ & + 17.8056492347\rho^8w^3 + 1.54769624511\rho^4w^2 - w \end{aligned} \quad (4.6)$$

Aşağıdaki şekilde başlangıç noktası $\rho_0 = 10^{-8}, \varphi_0 = 10^{-1}, w_0 = 10^{-8}$ olmak üzere normal form denkleminin rezonansa giren 6, 11, 16, 21. mertebeler için sayısal çözümleri ile aynı başlangıç noktasına karşılık gelen Sprot sisteminin çözümü karşılaştırılmıştır.



Sprot H sistemi ise şu denklemlerle verilir:

$$\frac{dx_1}{dt} = -x_2 + x_3^2 \quad (4.7)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = x_1 + 0.5x_2 \quad (4.8)$$

$$\frac{dx_3}{dt} = x_1 - x_3 \quad (4.9)$$

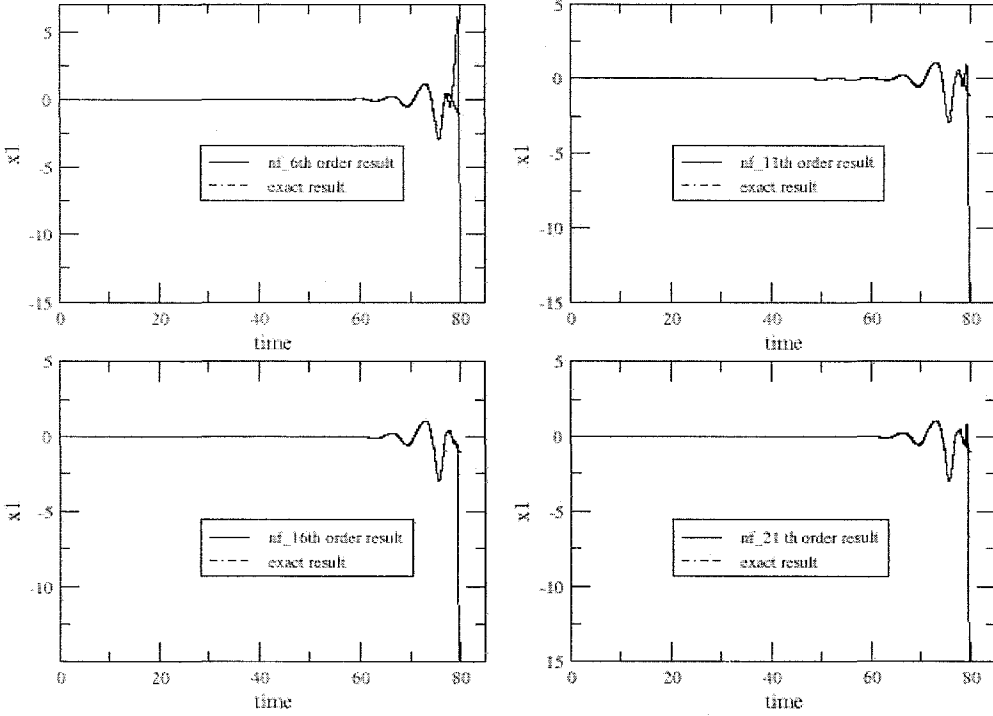
Sprot Q sisteminde uygulananlarla aynı işlemler yapılmca şu sonuç bulunur:

$$\begin{aligned} \dot{\rho} = & -3589.23388444\rho^{17}w^4 + 401.005570341\rho^{13}w^3 \\ & -14.8563835805\rho^9w^2 + 0.859831247285\rho^5w + 0.25\rho \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} = & 792.20844668\rho^{16}w^4 + 180.277899101\rho^{12}w^3 \\ & -6.16624043194\rho^8w^2 + 0.294557542328\rho^4w - 0.968245836552 \end{aligned} \quad (4.11)$$

$$\begin{aligned} \dot{w} = & 75839.1745963u^8\bar{u}^8w^5 - 1414.65599592u^6\bar{u}^6w^4 \\ & + 49.460136763u^4\bar{u}^4w^3 - 2.57949374186u^2\bar{u}^2w^2 - w \end{aligned} \quad (4.12)$$

Aşağıdaki şekilde başlangıç noktası $\rho_0 = 10^{-8}, \varphi_0 = 10^{-1}, w_0 = 10^{-8}$ olmak üzere normal form denkleminin rezonansa giren 6, 11, 16, 21. mertebeler için sayısal çözümleri ile aynı başlangıç noktasına karşılık gelen Sprot sistemini çözümü karşılaştırılmıştır.



Görüldüğü gibi, her üç Sprot sistemi benzer davranışa sahip olup normal formun sistemi temsil ediş süresi olan 80 zaman birimi, Liapunov üstelinden beklenen değer olan 6 ila 7 zaman birimine göre yüksek, ancak daha önce incelemiş olduğumuz Sprot C ve E sistemlerinde gözlenen 1000 zaman birimine göre oldukça düşüktür. Bu duruma, söz konusu bu son üç sistemin lineer kısmının ilk ikisinden (C ve E) farklı olarak sıfır sanal özdeğerlerinin olmaması yol açabilir.

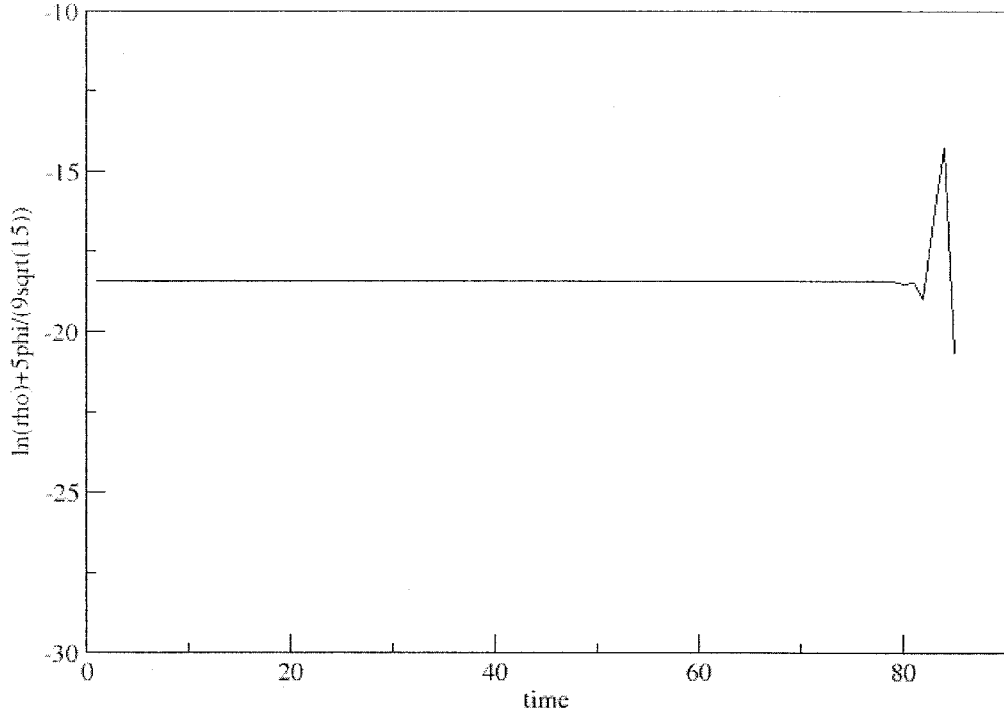
5. YAKLAŞIK KORUNAN BÜYÜKLÜĞÜN ÖNEMİ:

Nümerik hesaplar sonucunda Sprot sistemlerinin tümünde bir sıfır Liapunov üstelinin varlığı gözlemlenmiştir. Eğer bir değişken veya değişkenler grubu polinomla sınırlanmış bir davranışa sahipse birbirine yakın yörüngelerin üstel olarak yaklaşması ya da uzaklaşması söz konusu olamaz. Bu nedenle böyle bir davranış, söz konusu sistemde yaklaşık olarak sıfır Liapunov üstelinin varlığına işaret edebilir. Elimizdeki normal form denklemlerinin en

düşük mertebede $\dot{\rho} = a\rho$, $\dot{\varphi} = -b$ (a ve b sabit) olduğunu hatırlarsak $\ln \rho + \frac{a}{b}\varphi = \text{sabit}$.

şeklinde yaklaşık korunun bir büyüklüğe ulaşırız. Sprot Q sistemi için bu büyüklüğün

davranışı şekilde gösterilmiştir. Sprottt F ve H sistemleri için de benzer bir davranış söz konusudur. Normal formun gerçek çözüme uyduğu sürede yaklaşık korunan büyüklüğün de korunduğu görülmektedir.



6. SONUÇ:

Daha önce kritik altı Hopf dallanması gösteren Sprottt C ve E sistemlerinde normal form sistemlerinin oldukça uzun zamanlar için çekiciyi izleyerek kaotik davranışa geçişini yaklaşık olarak temsil edebildiği anlaşılmıştı. Bu kez farklı bir lineerleştirilmiş özdeğer spektrumu gösteren ve farklı bir normal form yapısına sahip olan Sprottt Q, F ve H sistemleri için rezonant yapının çok daha yüksek mertebeden normal form açılımı gerektirmesine rağmen karşılaştırılabilir bir durumun geçerli olduğu anlaşılmıştır. Entegre edilemeyen bu üç dinamik sistemde yaklaşık korunan büyüklükler, zamana bağlı fonksiyonun belli bir zaman dilimi için hesaplanması yolu ile bulunmuştur.

KAYNAKLAR:

- [1] Verhulst, F., *Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems*, Springer-Verlag, Berlin, 1996.
- [2] Sprottt, J.C., "Some Simple Chaotic Flows", *Physical Review E*, Vol. 50, pp. R647- R650, 1994.
- [3] Perdahçı, N.Z. and A. Hacınlıyan, "Normal forms and nonlocal chaotic behavior in Sprottt systems", *International Journal of Engineering Science*, Vol. 41, pp. 1085-1108, 2002.
- [4] Wiggins, S., *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*, Springer-Verlag, New York, 1990.
- [5] Cicogna, G., *J. Phys. A: Math. Gen.* Vol. 28, L179 (1995).
- [6] Murdock, J. "Normal Forms and Unfoldings for Local Dynamical Systems" Springer Verlag, New York (2003).