Journal of İstanbul Kültür University
2006/4 pp. 27-32

FRAKTAL SALKIM OLUŞUMUNUN RASGELE YÜRÜYÜŞ YÖNTEMİ İLE MODELLENMESİ

Mustafa BÖYÜKATA[1], Yusuf PANDIR[2]

ÖZET

Bu çalışmada salkım (cluster) oluşumu ve büyüme mekanizması basitçe rasgele yürüyüş yöntemi ile gerçekleştirildi. Büyüme mekanizmasının oluşumunda difüzyon-sınırlı toplanım (Diffusion-limited aggregation) modeli kullanıldı . Doğada gözlenen desenlerle benzerlik içerisinde elde edilen salkımın dağılım fonksiyonları hazırlandı. Model dentritik yapıların incelenmesinde de kullanılabilir.

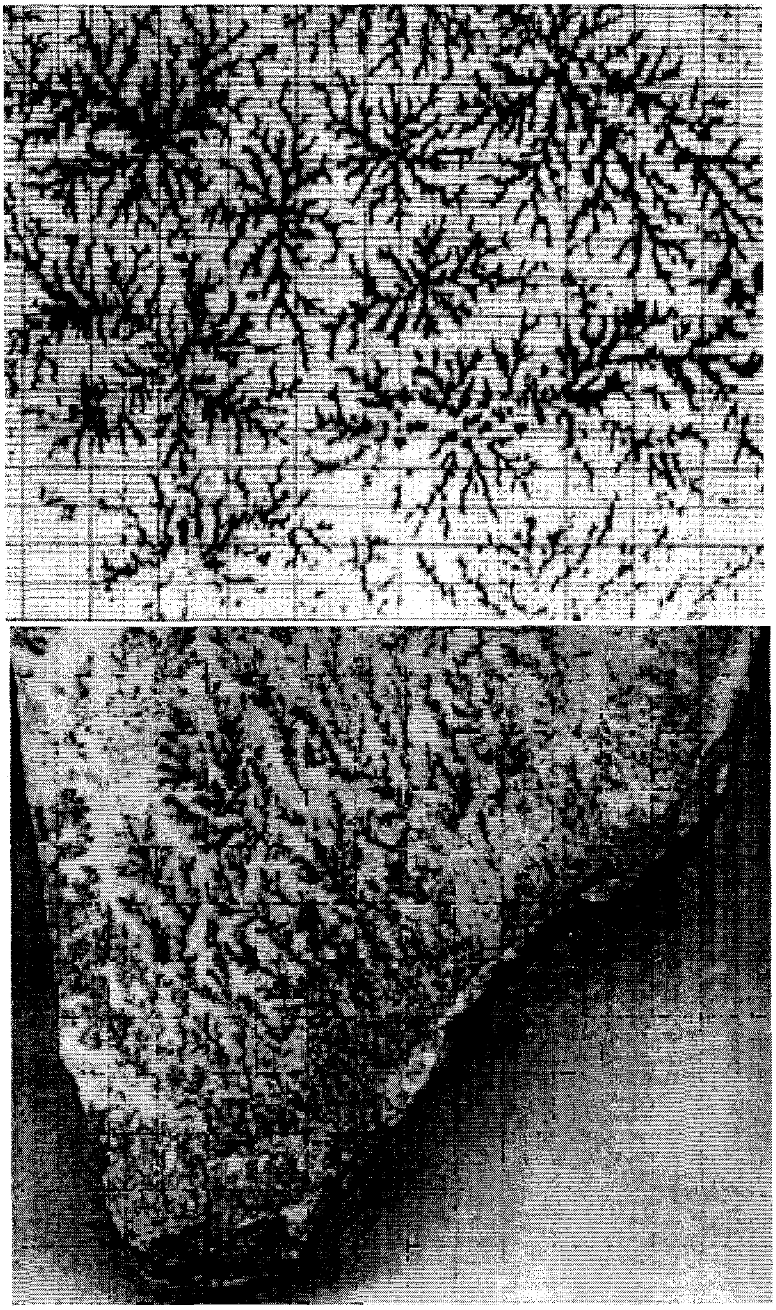
1. GİRİŞ

Doğada bulunan objeler birçok farklı geometrik desenlere sahiptir. Ortamlarındaki şartlara göre fraktal yada dentritik salkım desenleri, tanecikler kümesinden oluşmaktadır. Farklı ortam şartları ve düzensizliklere rağmen bu kümeler simetrik veya yarı simetrik dallanma özellikler taşımaktadır. Bu konuyla ilgili pek çok araştırma yapılmıştır [1,2]. Dinamik mekanizmaları deterministik olarak matematiksel formüller ile ifade edilememiş olan karmaşık sistemlerin, oluşum mekanizmaları Monte Carlo (MC) gibi stokastik yaklaşımlarla incelenebilmektedir. Difüzyonla fraktal yapılarının oluşumu modellenebilen salkım (cluster) ve dentritik yapılar için iki tipik örnek Şekil 1 de görülmektedir. Çalışmalarda herhangi bir salkımın tasvirinde fraktal boyut önemli bir nicelik olarak hesaplanmaktadır.

Bu çalışmada Şekil 1'in üst panelinde verilen fraktal salkımların oluşum mekanizmalarının araştırılmasına dönük bilgisayar ortamında simülasyon gerçekleştirildi. Büyüme mekanizmasının oluşumunda difüzyon-sınırlı toplanım (Diffusion-limited aggregation, DLA) modeli kullanılarak, doğada gözlenen desenlerle benzerlik gösteren salkımın dağılım fonksiyonları hazırlandı. Fraktal salkım oluşumu ve büyüme mekanizması basitçe rasgele yürüyüş yöntemi ile gerçekleştirildi. Programda örgü genişliği ve parçacık sayısı farklı alınarak modellemenin sonuçları elde edildi. Hesaplama sonuçları ile literatürdeki sonuçlar karşılaştırıldı. Buradan programın güvenirliği test edildi.

[1] *Erciyes Üniversitesi, Yozgat Fen Edebiyat Fakültesi, Fizik Bölümü 66100 Yozgat, Tel:0354-2421021/121, Faks:0354-2421022, e-posta: boyukata@erciyes.edu.tr*

[2] *Erciyes Üniversitesi, Yozgat Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü 66100 Yozgat, Tel:0354-2421021/148, Faks:0354-2421022, e-posta: yusufp@erciyes.edu.tr*



Şekil 1. Fraktal ve dentritik yapılar

2. YÖNTEM

İki boyutlu uzayda fraktal salkımlar ve dentritik özellik taşıyan seyrek tanecikli yapılar için difüzyon-sınırlı toplanım yöntemi (DLA) tanecik kümeleşmeleri ilk kez 1981 yılında T.Witten ve L.M. Sender tarafından gerçekleştirilmiştir [3]. Rasgele yürüyüş yöntemi bilgisayar simülasyonuyla çalışmaktadır. Bu yöntem korelasyonları önceden ölçülmüş olan metal parçacık toplanmalarına uygulamada elverişlidir. Toplanma sürecinde yoğunluk korelasyonları uzaklık arttıkça düşecektir. Dentritik ve fraktal büyümeler için iyi bir model teşkil etmektedir.

Şekil 1'deki gibi bir parçacıklar kümesinin oluşumu konusundaki en basit model Eden modelidir [3]. Eden modeli parçacıkların merkeze yakın yerlere rastgele eklendiği bir örgü modelidir. Bu oluşum süreci, yoğunluk korelasyonlarının geniş sınırlar içerisinde uzaklığa bağlı olmadan daha az tanecikli bir küme oluşturur. Bundan dolayı rastgele yürüyüşler, oluşan kümelerin yoğunluk fonksiyonlarına benzerler.

Bu çalışmada kullandığımız yöntem Eden yönteminin bir varyasyonudur. Eden modelinin ilk basamağı örgünün kaynağındaki bir çekirdek parçacığıdır. Oluşturulacak N boyutlu bir kare örgüde örgü merkezinde bir tanecik bulunacak şekilde yerleştirildi. Geri kalan bütün hücreler boş bırakıldı. Bilgisayar programında NxN'lik matrisin dolu olan hücreleri 1 ile boş olanlar ise 0 ile tanımlandı. İkinci bir parçacık örgünün kenarındaki hücrelerden birisine rasgele yerleştirilip yine rasgele yürüyüş ile örgü içerisinde aşağı-yukarı ve ileri-geri şeklinde dört yönde harekete bırakıldı. Örgü içerisinde bu parçacığın merkezdeki hücreye komşu bir hücreye ulaşması ile hareketi durdurularak örgünün ikinci bir dolu hücreye sahip olması sağlandı. Dolayısıyla salkımın ilk iki merkez taneciği belirlenmiş oldu. Yine kaynaktan epey uzakta rasgele bir yere benzer şekilde eklenen üçüncü tanecik aynı yolla salkıma eklendi. Bu rasgele yürüyüş sürecinde örgü sınırlarına çıkan tanecikler periyodik sınır şarları kullanılarak örgü içerisine sokuldu. Bu şekilde parçacıklar çekirdeğe yakın bir yere gelinceye kadar rasgele hareket eder. Daha sonra bu hareketli parçacık kümenin parçası olur. Bu süreç belirlenen maksimum parçacık sayısına ulaşılıncaya kadar devam ettirilir. Bu noktada örgü büyüklüğü ile maksimum parçacık sayısının uyumlu seçilmesi gerekir.

Günümüzde DLA modeli simülasyon çalışmalarında fraktal kümedeki tanecik sayısı 10^7'den daha fazla değerlere kadar ulaşılmıştır. Bu sonuç eldeki bilgisayarların durumuna bağlı olarak daha da gelişmektedir. Ayrıca çok boyutlu uzayda bulunan kümeler içinde çalışmalar yapılmaktadır. Parçacık dağılımı hakkında yoğunluk korelasyon fonksiyonu ile bilgi elde edilir. N parçacık toplanmasındaki korelasyon fonksiyonu için [3];

$$C(r) = N^{-1}\sum_{r'} \rho(r')\rho(r'+r) \quad (1)$$

ifadesi bütün takımın ortalama korelasyon fonksiyonuna bir yaklaşımdır. Hesaplamaları kontrol etmek için C(r) kesin bir Koch eğrisinden ölçülebilir. Koch Eğrileri ve model toplanmalar için ölçülen C(r), r toplanmanın büyüklüğü ile kıyaslanabilir. Bir model toplanmanın büyüklüğü r, parçacıkların sayılarına göre (artan veya azalan) değişimlidir. Bir fraktal kümenin korelasyon fonksiyonu,

$$C(r) = A.r^{-\alpha} \quad (2)$$

eşitliği ile bulunur. İfade r 'nin bir kuvveti şeklinde değişmektedir. Buradaki A bir sabit, α ise yoğunluk korelasyon fonksiyon üssü olup, logaritma grafiğinin (log (C) nin log (r) ye karşı grafiği) eğiminden hesaplanır. Korelasyon yoğunluk fonksıyon üssü ile topolojik boyut arasında (*d* boyut olmak üzere),

$$D = d - \alpha \quad (3)$$

ilişkisi vardır. Kapalı bir örgü tamamen doldurulmuş ise örgü boyutu Öklid boyutu d ile tanımlanır. Bu durumda Öklit boyutu tam sayı değerleri alır. Örgünün topolojik boyutu *D*, içinde bulunduğu uzay Öklit boyutu *d* arasında $D \leq d$ ilişkisinin sağlanması gerekir.

Örgünün topolojik boyutunu hesaplamada kullanılan metotlardan ikincisi kutu sayma yöntemidir. Örgüye ait olan parçacıkların bulunduğu r yarıçaplı bölge içinde N(r) deki kutular sayılır.

$$N(r) = (1/r)^D = r^{-D} \quad (4)$$

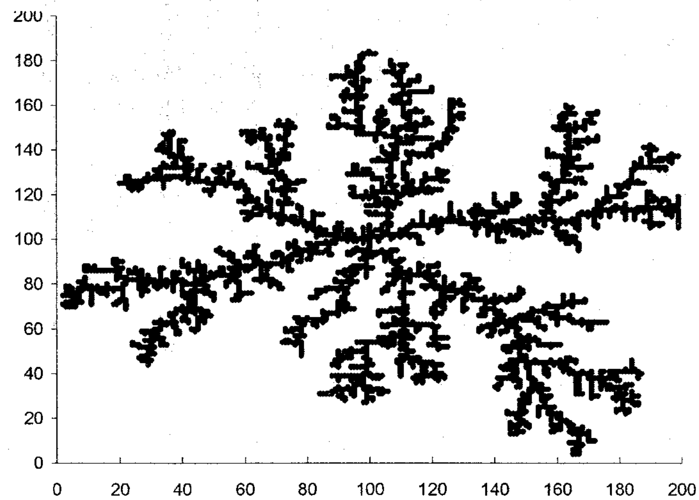
bağıntısı yardımıyla log-log grafiğinin eğimi ile topolojik boyutu elde edilecektir. Böylece fraktal yapıların boyutları hakkında genel bilgi elde edilmiş olacaktır. Yani (3) ve (4) bağıntıları aynı sonucu vermelidir.

Eğer gözleme dayalı bir deneysel ölçüm gerçekleştirilmek istenirse izlenecek yol tarama yöntemidir. Bu yöntem yardımıyla, objenin yüzeyinde bulunan tanecikleri tarayıcı ile görüntüsü alındıktan sonra, bilgisayar ortamında seçilen kümenin etrafındaki kümeye ait olmayan kısımlar temizlenir. Küme bir kare örgü içerisine alınıp, doğal olan görüntünün her gözünün doluluk oranı belirlenir. Daha sonra örgüdeki dolu taneciklerin sayısı bulunur. Buradan $N(r)$ hesaplanır ve bu sayının logaritması alınarak doğrunun limit değerindeki eğimi olan D bulunur.

3. SONUÇ ve TARTIŞMA

Bu çalışmada MC simülasyon yöntemi kullanılarak, difüzyon-sınırlı toplanım modeli için hazırlanan algoritmaya göre Fortran dilinde yazılan program yardımıyla doğal fraktal yapıların benzerleri hazırlandı. Elde edilen sonuçlardan üretilen örnek bir salkım deseni Şekil 2'de görülmektedir. Bu rasgele toplanma modeli (300,300) örgü genişliğinde 4000 parçacıktan ibarettir.

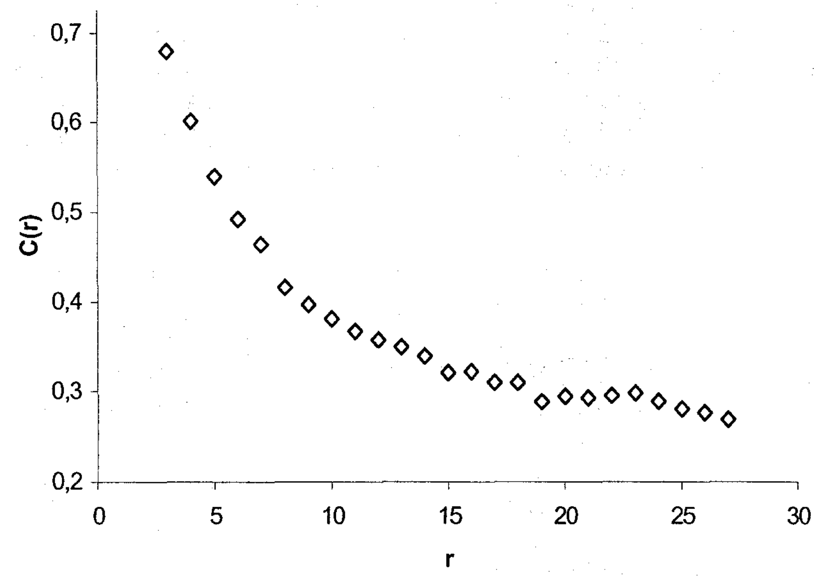
Uçlardaki dallanmalar, merkez bölgeye göre daha fazladır. Buradan açık uçlar kapalı uçlara göre daha hızlı bir büyüme göstermektedir. Bu durum örgüye sonradan gelen parçacıkların rasgele yürüyüş alanı zamanla azalacağından örgüye ilk gelenlerden daha hızlı olmasının sonucudur. Rasgele yürüyüş zamanı ve örgüdeki boş alan salkım büyüdükçe azalmaktadır. Örgü boyutları büyütülerek daha fazla sayıda noktadan oluşan geniş salkım ve dallanmalar elde etmek mümkündür. Fakat bu durum bilgisayarda hesap zamanını da doğal olarak artırmaktadır. Küçük yada büyük elde edilen salkımlar beklenen fraktal desenlerin benzerleridir. Ayrıca rassal sayı üreteci için başlangıç şartları değiştirilerek farklı salkım desenleri üretilebilir. Desen uçlarındaki dallanmalarda yine salkımın bütünündeki gibi fraktal özelliklere sahiptir. Bu biçimde uzayan uçlar dentritik yapıları andırmaktadır.



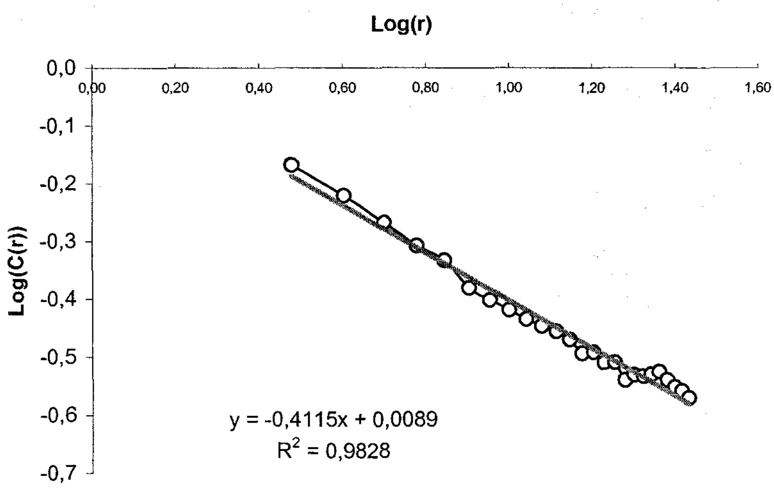
Şekil 2. Salkım modellenmesi

Yöntemimiz için yoğunluk bağıntısı $C(r)$' nin r' ye göre değişim grafiği Şekil 3 deki gibi elde edilmiştir. Açıkça görüldüğü gibi salkım yarıçapı r arttıkça C(r) dağılım fonksiyonu Denk. (2)'ye uygun azalma göstermektedir.

Korelasyon değerlerinin r'ye bağlı değişimleri Şekil 4'teki gibi logaritmik grafikle yeniden çizildi. Verilen grafikte simülasyon ile elde edilen kümenin topolojik boyut değişimi regresyon eğrisi ile karşılaştırılmaktadır. Bu regresyon doğrusunun eğimi ise fraktal yapının boyutudur. Bulunan üssel değer ise 0.41 olarak hesaplandı. Bu değer literatürde yapılan çalışmalarda ise yoğunluk korelasyon fonksiyon üssü 0.42 olarak verilmektedir [3]



Şekil 3. r~C (r) Grafiği



Şekil 4. Logaritma değerleri grafiği

Bir ön çalışma olarak seçtiğimiz modelimizde, parçacıklar örgüde yerleşmeye başladıktan sonra başlangıçta salkım desenindeki büyüme yavaş ama rasgele yürünebilecek alan gittikçe azaldığında büyüme zamanla hızlanmaktadır. Modelin bu çalışmada seçilen salkım için test sonuçlarının güvenilirli daha önceki çalışmalarda rapor edilen degerlere yakınlığı ile anlaşılmaktadır. Benzer şekilde üç boyutlu fraktal yapıların incelenmesi içinde çalışmalar genişletilebilir. Model dentritik yapıların incelenmesinde de kullanılabilir niteliktedir.

Kaynaklar

[1] Sander, L.M., (2000), "Diffusion-limited aggregation: a kinetic critical phenomenon?", Contemporary Physics 41, 203-218

[2] Lattuada, M., Wu, H.,Morbidelli, M., (2003), "A Simple Model for the Structure of Fractal Aggregates", *Journal of Colloid and Interface Science*, 268, 106-120

[3] Witten, T.A., Sander, L.M., (1981), "Diffusion-Limited Aggregation: a kinetic critical phenomenon", Physical Review Letters, 47, 1400-1403.

[4] Witten, T.A., Sander, L.M., (1983), "Diffusion-Limited Aggregation", Physical Review B, 27, 5686-5697.